

基于课程思政角度谈泰勒公式教学设计

李 燕

上海理工大学理学院, 上海

收稿日期: 2022年10月18日; 录用日期: 2022年11月16日; 发布日期: 2022年11月23日

摘 要

本文以《高等数学》教材中的泰勒公式为例, 探讨如何在传统教学的基础上将思政元素潜移默化地融入到课程教学设计中。文章分别从建立泰勒公式的原因、如何建立泰勒公式、泰勒公式的应用三个方面作为切入点, 引入思政教育元素, 展现课程所蕴含的数学思维和科学思想, 向学生传递积极的世界观、人生观和价值观, 充分展现唯物主义辩证法。通过课堂上启发和自主探究相结合的教学, 培养学生发现问题、分析问题、解决问题的能力, 培养学生的文化自信, 推动学生形成健全人格。

关键词

课程思政, 泰勒公式, 教学设计, 近似代替

An Instructional Design of Ideological and Political Education Involving Taylor Formula

Yan Li

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Oct. 18th, 2022; accepted: Nov. 16th, 2022; published: Nov. 23rd, 2022

Abstract

In this paper, we discuss how to integrate the elements of ideological and political education into the curriculum design of Taylor Formula in traditional class. We introduce ideological and political elements from three aspects, namely the reason to construct Taylor Formula, how to construct Taylor Formula, and the application of Taylor Formula. It is shown that the mathematical thinking, scientific thinking, materialistic dialectics, view of life and values, and correct ideas for world outlook are contained in the curriculum. Through the combination of inspiration and independent

inquiry between teaching and learning, it cultivates students' abilities to find, analyze, and solve the problems. In the end, we realize the idea of cultivating cultural confidence and promoting students to form a healthy and sound personality.

Keywords

Ideological and Political Education, Taylor Formula, Instructional Design, Approximate Substitution

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

数学课程在于研究客观世界的自然规律[1], 高等数学是高校数学课程建设的重点。作为一门基础学科, 高等数学不仅是学好其他专业课程的前提和保障, 还是很多后续课程的基础和工具[2], 在各专业的后续学习和更高阶段的研究生考试中扮演着至关重要的角色。以往高等数学教学更多地侧重于知识点的讲解、定力的证明和习题的演算[3], 具有高度抽象和逻辑性强的特点。学习高等数学可以极大地提高我们的抽象思维能力、逻辑推理能力、解决问题的能力 and 创新能力。高等数学不仅是一门工具, 更是一种素养, 一种文化。

2016年习近平总书记在全国高校思想政治工作会议上的讲话强调, 高校思想政治教育工作关系到高校培养什么样的人、如何培养人以及为谁培养人这个根本问题。我们要坚持把立德树人作为教学的中心环节, 把思想政治工作贯穿教育教学的整个过程。习总书记在会上还指出, 要用好课堂教学这个主渠道, 使各类课程与思想政治理论课同向同行, 形成协同效应[4]。为高校数学课程的教学提出了一个全新的方向, 即课程思政。在教学的准备与实施过程中, 充分发掘各类课程和教学方式中蕴含的思想政治教育资源, 做好课程育人设计、创新教育教学方式方法, 发挥专业课程的育人功能, 把思想政治教育贯穿人才培养全过程, 落实立德树人的根本任务, 实现全程育人, 全方位育人, 努力开创我国高等教育事业发展新局面。

习近平总书记的讲话为我们今后的教学改革开辟了一个新的方向。高等数学中的知识是全世界的科学家经过几个世纪地不懈奋斗创造出的优秀文化成果, 蕴含着丰富的思想政治元素[5]。高等数学中蕴藏着丰富的数学史, 数学史不仅可以培养学生的科学家精神, 还可以激发学生的学习积极性, 向学生传递坚持不懈、追求真理的科学精神; 高等数学课程中蕴含着丰富的科学思想与人生哲理, 帮助学生形成正确的, 积极的世界观、人生观和价值观; 高等数学体现了唯物主义辩证观, 揭示了数学与哲学的密切联系。将思政元素融入到高等数学的教学中, 在传道授业解惑的同时实现价值引领, 起到润物细无声的作用, 深化社会主义核心价值观, 为国家和社会培育有用的人才。

2. 教学设计

本文从课程思政的角度对于高等数学中重要的知识点——泰勒公式进行教学设计(表 1)。教学过程围绕提出问题、分析问题、解决问题的路线。通过学生熟悉的三角函数提出新的问题; 以熟悉的极限例题引导学生提出解决问题的方法; 以生动形象的龟兔赛跑的故事为导向, 引导学生构建出泰勒公式; 用所

学的内容解决了课堂开始提出的问题，再次强调了化繁为简与近似代替的数学思想和人生哲理；最后将泰勒公式的应用与实际相结合，提高了学生的抽象概括和实际应用的能力。遵循学生的认知规律，培养了学生的辩证唯物主义世界观。

Table 1. Instructional design

表 1. 教学设计

序号	教学内容	思政元素	引入方式
1	建立泰勒公式的原因	化繁为简的数学思想。	通过提问“如何计算非特殊角度的三角函数值”，启发式引入化繁为简的数学思想。
2	建立泰勒公式的过程	1) 近似代替的科学思想；2) 坚持不懈，追求真理的科学家精神。	1) 通过两道极限例题引入“用多项式近似代替三角函数”的思想。2) 通过数学家布鲁克·泰勒研究泰勒公式的数学史传递科学精神。
3	泰勒公式的应用	1) 近似计算中体现了两弹一星功勋克服重重困难，自力更生，艰苦奋斗，永攀科技高峰的科学精神；2) 不积跬步无以至千里，量变引起质变的人生哲理。	1) 通过例题引入近似计算在我国研制两弹一星的过程中的广泛应用；2) 通过例题引入励志公式。

3. 教学过程

3.1. 从三角函数提出新的问题——引入化繁为简的数学思想

在三角函数问题中，利用以往所学的知识，我们只能求出特殊角度的三角函数值，如 $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ ， $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ 等。但当角度为非特殊角度时，在不借助计算机的情况下，该如何计算函数值？例如， $\sin \frac{1}{10}$ 的值该如何求？

事实上，在很多工程科学研究和实际应用中，经常会遇到一些复杂的函数，因此我们希望在局部范围内，找到一个容易计算的函数来近似代替它，我们希望这个函数可以方便计算、方便研究，并且近似代替后与复杂函数的误差要足够小。泰勒公式的几何意义便是利用多项式函数来逼近函数，由于多项式函数可以任意次求导，易于计算，且便于求极值和判断函数的性质，因此可以通过泰勒公式来获取函数的信息[6]。

这其中蕴含着化繁为简的科学思想，用简单函数代替复杂函数，也就是化复杂问题为简单问题，是数学中一种非常重要的科学思想，也是我们人类探索未知问题时遵循的基本方法。

3.2. 极限例题——引入近似代替的数学思想

例 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ，该极限可以写为

$$\sin x = x + o(x) (x \rightarrow 0).$$

例 2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$ ，该极限可以写为

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) (x \rightarrow 0).$$

分析发现,例2用一个三次多项式在零点附近近似代替函数 $\sin x$ 。例1用一个一次多项式在零点附近近似代替函数 $\sin x$ 近似代替的误差分别是 $o(x)$ 和 $o(x^3)$ 。一次多项式与 $\sin x$ 在零点的函数值相等,一阶导数值相等;三次多项式与 $\sin x$ 在零点的函数值相等,一阶、二阶和三阶导数值均相等。三次多项式比一次多项式拟合效果要好,引导学生思考,得出高阶多项式比低阶多项式精度高的初步结论。

3.3. 故事启发——深入挖掘选择多项式函数的原因

乌龟与兔子在起跑线上同时出发开始比赛,假设跑道无限长,并且是笔直的。龟兔的初速度都是0,如果我们假设龟兔的加速度都是一个常数,显然兔子加速度比乌龟大,那么十秒后兔子跑的距离比乌龟要长。如果让乌龟骑自行车,假设这辆车与兔子的加速度一样,则十秒后它们跑的距离是一样的。但是在实际生活中,情况往往比较复杂,加速度可能是一个随时间变化的函数,加速度存在导函数,即为加速度的变化率,加速度的加速度可能也是一个随时间变化的函数,于是加速度的加速度也存在导函数。但只要乌龟和兔子的初始的速度相同,速度随时间变化的情况相同,加速度随时间变化相同,加速度随时间变化的变化率相同,一直相同下去,那么乌龟和兔子的运动轨迹就会无限相同。

直观解释,我们想要追赶兔子的脚步,即模仿一个事物的变化曲线,不能仅仅模仿表面,还要模仿它变化,使其初始值相同,变化率相同,变化率的变化率也相同。即只要每个细节都相同,那我们就可以紧随兔子的脚步,并且误差极小。通过导数的学习,我们知道一阶导数的意义即为变化率,即距离函数的一阶导数为速度函数,二阶导数为变化率的变化率,即为加速度函数,导数的导数的导数就是变化率的变化率的变化率。这个例子启发我们,如果我们要找个函数来模仿原函数,就需要令其初始值相同,并且各阶导数都相同。在简单函数中,多项式函数可以保证有 n 阶导数。这就是在泰勒公式中,我们选择多项式函数来近似代替复杂函数的原因。

经过运算,得出泰勒多项式[7]

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

3.4. 泰勒公式背后的数学史

18世纪早期英国牛顿学派最优秀的代表人物之一——数学家布鲁克·泰勒,其主要著作是1715年出版的《正的和反的增量方法》,书中陈述了他于1712年7月给他老师梅钦信中提出的著名定理——泰勒定理。泰勒公式是从格雷戈里—牛顿插值公式发展而来。泰勒公式是为了研究复杂函数性质时经常使用的近似方法之一,也是函数微分学的一项重要应用内容。1772年,拉格朗日强调了泰勒公式的重要性,称其为微分学基本定理,但是泰勒定理的证明中并没有考虑级数的收敛性,这个工作直到19世纪20年代,才由柯西完成。泰勒定理开创了有限差分理论,使任何单变量函数都可以展开成幂级数,因此,人们称泰勒为有限差分理论的奠基者[8]。

泰勒公式是高等数学中的一个非常重要的内容,它将一些复杂的函数近似地表示为简单的多项式函数,泰勒公式这种化繁为简的功能,使得它成为分析和研究许多数学问题的有力工具。泰勒公式是研究函数极限和估计误差等方面不可或缺的数学工具,泰勒公式集中体现了微积分“逼近法”的精髓,在近似计算上有独特的优势。利用泰勒公式可以将非线性问题化为线性问题,且具有很高的精确度,因此其在微积分的各个方面都有重要的应用。泰勒公式可以应用于求极限、判断函数极值、求高阶导数在某点的数值、判断广义积分收敛性、近似计算、不等式证明等方面[8]。

这告诉我们科学的发展不是一蹴而就的,是经历了众多数学家的不断改进,才有了最终的结果。泰勒公式的发展史告诉我们要具有勇于探索,不断追求真理的科学精神。

3.5. 理论联系实际——泰勒公式的应用

数学看似抽象，实则来源于自然，来源于生活，是世界万物的高度概括，数学研究的成果最终将用于实践，服务人类。

3.5.1. 近似计算

问题一 计算 $\sin \frac{1}{10}$ 的 5 阶泰勒公式，

$$\sin \frac{1}{10} = 0.1 - \frac{0.1^3}{3!} + \frac{0.1^5}{5!} \approx 0.099833416666\cdots$$

而其准确值为

$$\sin \frac{1}{10} = 0.099833416646\cdots$$

其准确值的误差在小数点后 12 位，误差非常小，验证了泰勒公式的有效性。我们用泰勒多项式解决了课程一开始提出的问题，回顾了化繁为简、近似代替的数学思想。

问题二 估计 1.01^{365} 和 0.99^{365} 的倍数。

设 $A = \left(\frac{1.01}{0.99}\right)^{365}$ ，由于 $\frac{1.01}{0.99} = 1.0202\cdots$ 且 $\ln(1+x) \sim x (x \rightarrow 0)$ ，所以

$$A = \left(\frac{1.01}{0.99}\right)^{365} = e^{365 \ln 1.0202\cdots} \approx e^{365 \times 0.02} = e^{7.3}$$

实际上，A 的准确值为

$$A = 1480.66\cdots$$

这个例子常被称为励志公式，每天努力一点点，日积月累将有质的变化；每天懈怠一点点将一事无成。

$$1.01^{365} = e^{365 \ln 1.01} \approx e^{365 \times 0.01} = e^{3.65} \approx 38.47,$$

$$0.99^{365} \approx -e^{-3.65} = 0.02599.$$

3.5.2. 实际应用

泰勒公式最广泛的应用即为近似计算，几乎所有的计算机与计算器中均利用泰勒公式来计算初等函数的值并控制误差。

事实上，在我国研制两弹一星的过程中，科学家们是利用手摇计算机，计算尺等工具进行计算的，其中涉及到了大量的近似计算，很多复杂的计算均用到了泰勒公式。其中蕴含着不畏艰难、勇攀高峰的思想，培养了学生的家国情怀，增强民族自信心和自豪感。

4. 教学实践与反思

本教学内容在 2022 年进行了教学班(133 人)的线上课程思政教学展示，并邀请学生(108 人)参与了问卷调查(图 1)，形成了一份泰勒公式教学改革报告。学生反馈，通过龟兔赛跑的例子生动的诠释了建立泰勒公式的原因与方法，并学习到了近似代替和化繁为简的数学思想，能够利用泰勒公式逼近函数和近似计算，受到了学生的一致好评。

泰勒公式学习情况问卷调查

第 1 题 您的专业是 [填空题]

填空题数据请通过下载详细数据获取

第 2 题 您对课堂中的教学内容有何想法 [多选题]

选项	小计	比例
理解了化繁为简的数学思想	93	86.11%
理解了近似代替的数学思想	83	76.85%
加深了对数学史和数学家的认识	72	66.67%
学习到了坚持不懈的科学家精神	86	79.63%
掌握了泰勒公式的应用	106	98.15%
不清楚有什么想法	2	1.85%
本题有效填写人次	108	

第 3 题 通过引例与龟兔赛跑的故事，您是否理解了泰勒公式建立的原因和方法 [单选题]

选项	小计	比例
理解了	92	85.19%
比较理解	10	9.26%

Figure 1. Taylor's Formula teaching questionnaire

图 1. 泰勒公式教学调查问卷

5. 结语

数学本来天生丽质，美丽动人[9]，但由于外在表现刻板、形式化，让人无法窥探到她丰富的内在美。本文针对《高等数学》课程中泰勒公式的思政元素的必要性进行了分析阐述，并对课程中的思政元素进行了初步的挖掘与研究。好的课程思政是润物细无声的，不刻板、不生硬，而数学史、科学思维、数学思想可以将课程思政灵活融入到教学过程。潜移默化地塑造了学生坚持不懈、坚忍不拔的人生观与价值观，提高了学生的科学素养，培养了学生发现问题，分析问题，解决问题的能力。打造高质量的数学课堂，真正高效地发挥课堂主阵地的作用，让课程与思政同向同行，实现协同育人目标。

基金项目

上海市教委青培计划项目(ZZ202203016)。

参考文献

- [1] 马翔. 《线性代数》课程思政教育探索与实践[J]. 高等数学研究, 2022, 25(3): 90-93.
- [2] 贾瑞玲. 探讨高等数学的重要性[J]. 数学学习与研究, 2020(5): 7.
- [3] 苏涵, 李清栋. 基于课程思政角度的教学设计——常数项级数的概念[J]. 高等数学研究, 2022, 25(3): 72-76.
- [4] 杨威, 陈怀琛, 刘三样, 等. 大学数学类课程思政探索与实践——以西安电子科技大学线性代数教学为例[J]. 大

学教育, 2020(3): 77-79.

- [5] 邓瑞娟, 陈倩倩, 李艳午. 大学数学课程思政的探索和实践[J]. 宁波工程学院院报, 2020, 32(3): 100-104.
- [6] 上海交通大学数学系组. 高等数学: 上册[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2017: 122.
- [7] 同济大学数学系. 高等数学: 上册[M]. 第 8 版. 北京: 人民邮电出版社, 2018: 137-143.
- [8] 张昭昭, 乔俊飞. 模块化神经网络结构分析与设计[M]. 沈阳: 辽宁科学技术出版社, 2014: 37.
- [9] 李尚志. 从数学中享受快乐[J]. 数学通报, 2004(12): 1-6.