Advances in Education 教育进展, 2022, 12(12), 5208-5214
Published Online December 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2022.1212791

Hans汉斯

基于波利亚“怎样解题”表的解题与教学探究

——以一道平面几何公开问题为例

刘盼盼[1*]，**陈　维**[1,2#]

[1]伊犁师范大学，数学与统计学院，新疆 伊宁
[2]伊犁师范大学，应用数学研究所，新疆 伊宁

收稿日期：2022年11月1日；录用日期：2022年11月30日；发布日期：2022年12月7日

摘　要

解题教学，即解题活动的教学。数学解题的教与学是数学教学的重要内容，因此教会学生解题是数学教学中的核心问题。本文基于一道平面几何的公开问题，运用波利亚的“怎样解题”表来分析解决问题，通过解题的四个步骤及合理的推理过程，清晰明了的得出结果，培养师生运用波利亚解题理论的意识，从而提高教师的教学能力以及学生解决数学问题的能力。

关键词

平面几何，波利亚“怎样解题”表，解题教学

Problem Solving and Teaching Inquiry Based on Bollea’s “How to Solve Problems” Table

—Taking an Open Problem of Plane Geometry as an Example

Panpan Liu[1*], **Wei Chen**[1,2#]

[1]School of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yining Xinjiang
[2]Institute of Applied Mathematics, Yili Normal University, Yining Xinjiang

Received: Nov. 1st, 2022; accepted: Nov. 30th, 2022; published: Dec. 7th, 2022

*第一作者。
#通讯作者。

文章引用: 刘盼盼, 陈维. 基于波利亚“怎样解题”表的解题与教学探究[J]. 教育进展, 2022, 12(12): 5208-5214.
DOI: 10.12677/ae.2022.1212791

Abstract

Problem solving teaching is the teaching of problem solving activities. Teaching and learning of mathematical problem solving is an important part of mathematics teaching, so teaching students to solve problems is the core of mathematics teaching. This article is based on a public problem of plane geometry, using polya analysis of how "problem solving" table to solve the problem, through the four steps of problem solving and the reasonable inference process, clear results, cultivating the consciousness of teachers and students use polya problem solving theory, so as to improve teachers' teaching ability and the students' ability of solving math problems.

Keywords

Plane Geometry, Polya's "How to Solve Problems" Table, The Problem Solving Teaching

1. 引言

波利亚的“怎样解题”表在函数、方程、几何等方面的解题教学中应用广泛[1]。运用波利亚解题理论解决数学中的问题，总结出解一类题的一般规律。为了提高学生们的解题能力，下面以一道平面几何问题为例，首先介绍波利亚的“怎样解题”表，然后基于波利亚理论对解题各环节进行解析，进行多角度的思考，学会问题解决，培养学生的发散性思维，以及体会到波利亚“怎样解题”表的重要性。

2. “怎样解题表”的简介

在《怎样解题》一书中波利亚将解题分为 4 个阶段：理解题目、拟订方案、执行方案、回顾，每个阶段又设置了一系列问题启发联想(见表 1) [2]。

Table 1. Polya's "How to solve problems" table
表 1. 波利亚“怎样解题表”

解题过程	具体问题
第一阶段：理解题目	未知是什么？已知是什么？条件是什么？ 画个草图，引入适当的符号！
第二阶段：拟订方案	你以前见过类似的问题吗？ 能联想起相关的定理或公式吗？ 注意未知量！ 你把题中所有的关键信息都考虑到了吗？
第三阶段：执行方案	执行你的解题方案， 能确保每一个步骤的有效性吗？
第四阶段：回顾	能检验结果吗？ 有不同方法吗？能用该结果或方法到其他问题吗？

3. 基于波利亚“怎样解题”表的解题与教学探究

3.1. 题目呈现

例题：如图 1 所示，已知 AB = CD，∠ABD = X，∠BAD = 2X，∠BCD = 3X，求 X 的值。

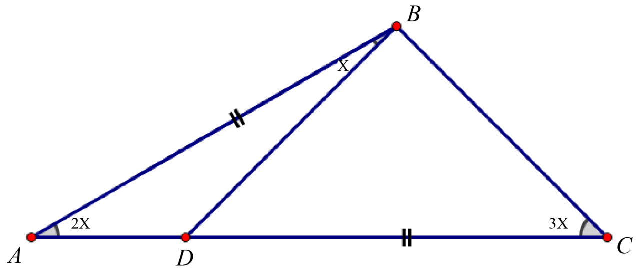

Figure 1. Example 1
图 1. 例题 1

思路分析：本道例题是一道平面几何题目，主要考查的是学生对平面几何知识的综合运用能力。题目当中涉及的知识点有等腰三角形的判定和性质定理、平行线的性质定理，全等三角形的判定和性质定理。从题目的已知条件出发，学生很容易直接从三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角和出发，利用从三角形的内角和性质来建立等量关系式，而此方法将没办法行到底。因此，这个时候就需要转变思维，由角的关系可以联想到利用平行线的性质，添加辅助线。然后利用三角形全等的判定定理和性质定理来解决问题。可是如何在一个三角形中，用含未知量的式子表示三角形的三个内角呢？这是解决问题的难点。

3.2. 基于波利亚“怎样解题”表的解题与教学探究

下面，将结合波利亚“怎样解题”表的提示语进行解答：

1) 理解题目[3]

题目要我们求解的什么？已知的条件是什么？

要求解的是三角形中∠ABD (X)的度数。已知的条件是 AB = CD，∠ABD = X，∠BAD = 2X，∠BCD = 3X。

从已有条件中，你能想到与之相关的知识点有哪些？

三角形内角和等于 180˚，三角形的外角性质；平行线的性质定理，全等三角形判定定理和性质定理。

2) 拟定方案[3]

上述相关知识点中，哪一个可以帮助你解决目标？——试试从三角形的外角性质进行解决。

由于已知∠ABD + ∠BAD = ∠BDC，所以∠BDC = ∠BCD = 3X，可得△BDC 是等腰三角形。在△ABD 中利用内角和为 180˚，整理得到关于∠BDC、∠BCD、∠DBC 的等量关系式为：∠BDC + ∠BCD + ∠DBC = 180˚即是∠DBC = 180˚ − 6X；利用三角形内角和定理进行解答，得到的结果总是恒等式。

显然是不能将未知量 X 求解出来的，你还能得到其他的等量关系吗？——不能。

你还可以利用什么条件？回到前面的相关知识点中看看？——平行线的性质！

你是否需要添加辅助线？——过点 D 作线段 AB 的平行线与线段 BC 相交于点 H，如图 2 所示。

由此你能得到哪些条件？——根据平行线的性质得：∠BAD = ∠HDC = 2X，∠BDH = ∠ABD = X。

接下来怎么办？你是否需要再次添加辅助线？——作∠A 的角平分线与线段 BD 相交于点 G、与直

线 DH 相交于点 E，如图 3 所示。

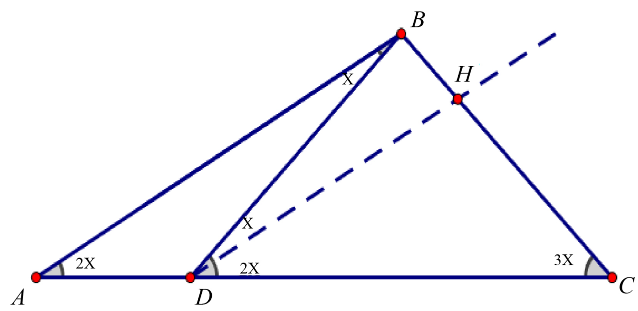

Figure 2. Example 2
图 2. 例题 2

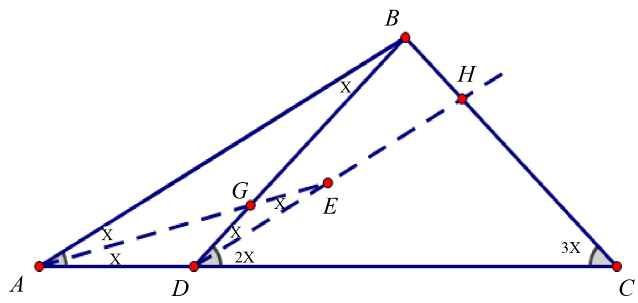

Figure 3. Example 3
图 3. 例题 3

因此你能得到哪些条件？——根据角平分线的性质得：∠BAE = ∠DAE = X。因为 DE//AB，所以∠BAE = ∠AED = X，所以△ADE 是等腰三角形，即 AD = DE。

还可以得到哪些结论？——连接 BE，因为 DH//AB，所以∠BAE = ∠AED = X，∠ABD = ∠BDE = X。因此△GAB 和△GDE 是等腰三角形，GA = GB，GD = GE；又因为∠AGD = ∠BGE，所以△AGD 和△BGE 全等(SAS)。

由三角形全等的性质定理可得∠GBE = ∠GAD = X，即∠ABE = 2X。所以四边形 ADEB 是等腰梯形。如图 4 所示。

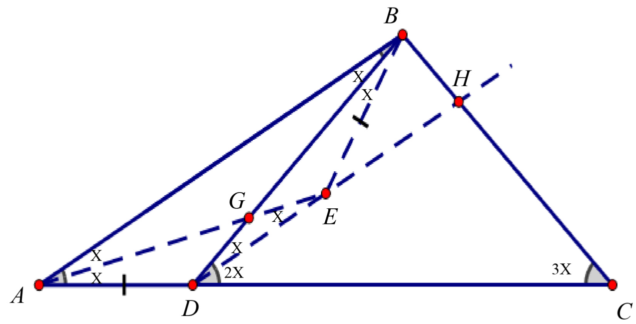

Figure 4. Example 4
图 4. 例题 4

目标解决了吗？——没有，还需要构造一个以 DC 为边的三角形与△ABD 全等。

要证明全等，根据现有条件，选择什么证明方法？——边角边。连接 CE，已知 AB = CD，还有∠BAD = ∠HDC，AD = DE，所以△ABD ≌ △DCE (SAS)。如图 5 所示。

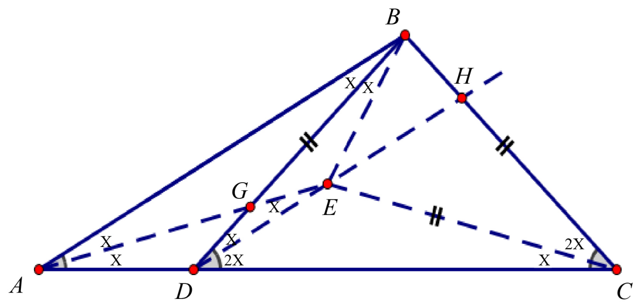

Figure 5. Example 5
图 5. 例题 5

你能得到什么有用的条件？——若两个三角形全等，则它们的对应边和对应角分别相等。即 BD = CE、∠ABD = ∠DCE = X。

离目标越来越近了，还差什么？——若能在一个三角形中用含 X 的未知量来表示并且每一个内角，就能得出 X 的值了。

纵观题目，你还有哪个条件没有用上？——BC = CE。可得△CBE 是等腰三角形，所以∠BCE = 2X，∠BEC = ∠EBC。

可以在一个三角形中用含 X 的未知量来表示每一个内角了吗？——可以了。

因为∠HEC 是△ECD 的一个外角，所以∠HEC = 3X；因为∠BEH 与 ∠ABE 是内错角，所以∠ABE = 2X；即得到∠BEC = 5X。

那么 X 的值呢？——在△CBE 中，∠BCE + ∠BEC + ∠EBC = 180˚，且∠BEC = ∠EBC，因而 X = 15˚。

3) 执行方案[3]

现在可以把你的解题计划进行实施了，落实与检查每一步骤。

过点 D 作线段 AB 的平行线交 BC 与点 H，∵ DH//AB，∠BAD = ∠HDC = 2X，∴∠BDH = ∠ABD = X。作∠A 的角平分线交 DH 与点 E，根据角平分线的性质得：∠BAE = ∠DAE = X，∵DE//AB，∴∠BAE = ∠AED = X，∴△ADE 是等腰三角形，即 AD = DE。连结 BE，∵DE//AB，∴∠BAE = ∠AED = X，∠ABD = ∠BDE = X。因此△GAB 和△GAB 都是等腰三角形，即 GA = GB，GD = GE；又∵∠AGD = ∠BGE，∴△AGD ≌ △BGE (SAS)。由三角形全等的性质定理可得∠GBE = ∠GAD = X，即∠ABE = 2X。∴四边形 ADEB 是等腰梯形。在△ABD 和△DCE 中，∵ AB = DC，∠BAD = ∠CDE，AD = DE，∴△ABD ≌ △DCE (SAS)，∴BD = CE、∠ABD = ∠DCE = X；又∵BD = CB，∴BC = CE。可得△CBF 是等腰三角形，∠BCE = 2X，∠CBE = ∠CHE。∵∠BCE 是△ECD 的一个外角，∴∠HEC = 3X；∵DE//AB，∴∠BEH = ∠ABE = 2X，∴∠CBE = ∠HEC + ∠BEH = 3X + 2X = 5X。在△CBE 中，∠BCE + ∠BEC + ∠EBC = 180˚，即 2X + 5X + 5X = 180˚，12X = 180˚，X = 15˚。

4) 回顾[3]

你能检验你的结果吗？

能，解答过程中的每一步都没有疏漏，论证中的每一步都是等价的，因此我们的结果是正确的。

你能用不同的方法解决这个问题吗？

解题思路：作辅助线的方法与上述不相同，因为有两条线段相等，所以可以通过做两条线段的垂直平分线来进行解答。已知△BDC 是等腰三角形，可作底边 DC 的中线 BE，因为 AB = CD；作线段 AB 的垂直平分线，交 AB 于点 M，交 AC 点 N；如图 6 和图 7 所示。

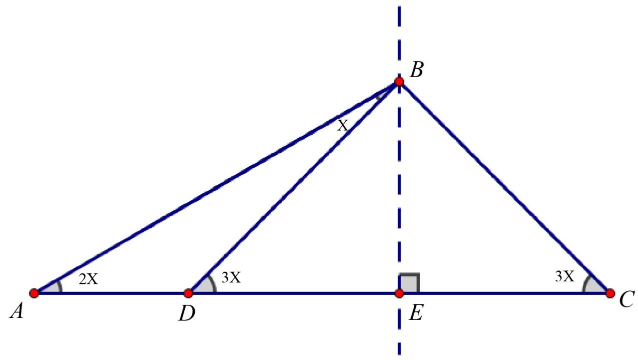

Figure 6. Example 6
图 6. 例题 6

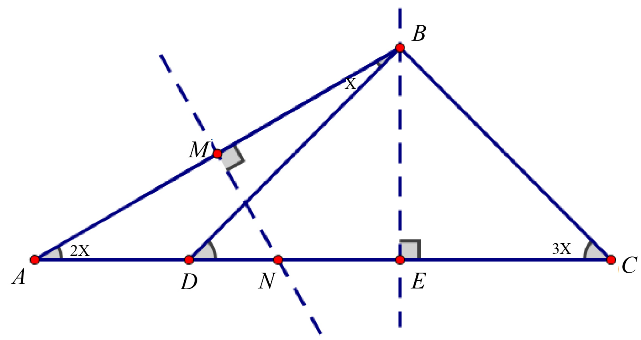

Figure 7. Example 7
图 7. 例题 7

作∠DBF = 2X，点 F 在垂线 MN 上；连接 BN。接下来只需证明两次三角形全等，问题就迎刃而解了，最终求得 X 的值仍然等于 15°。如图 8 和图 9 所示。

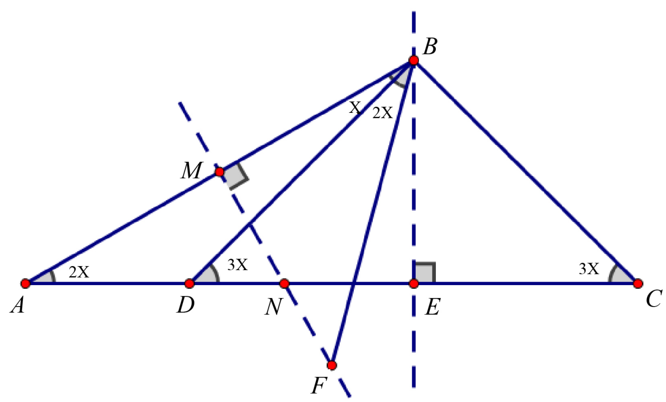

Figure 8. Example 8
图 8. 例题 8

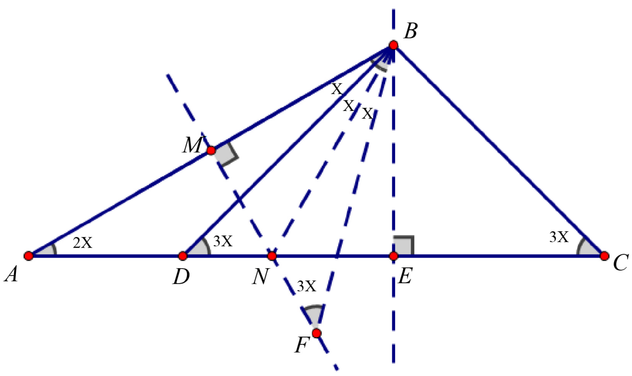

Figure 9. Example 9
图 9. 例题 9

解题步骤：

∵∠ABD = X，∠BAD = 2X，∠BCD = 3X，∴∠BDC = ∠BCD = 3X。即△BDC 是等腰三角形。

作底边 DC 的中线 BE，因为 AB = CD，得 DE = CE，∠BED = ∠BEC = 90˚。作线段 AB 的垂直平分线交 AB 于点 M，交 AC 于点 N；得 BM = AM，∠BED = ∠BEC = 90˚。作∠DBF = 2X，点 F 在垂线 MN 上，∵∠ABD = X，∴得∠MBF = 3X 可得∠EDB = ∠MBF。∵MB = DE，∠BMF = ∠DEB = 90˚，∴△BMF ≌ △DEB (ASA)可得 BD = BF，∠BFM = ∠DBE = 3X。连接 BN，已知直线 MN 是线段 AB 的垂直平分线。∵AN = BN，∴∠ABN = ∠BAN = 2X。∵∠DBF = 2X，∴∠DBN = ∠FBN = X，得 BN 是∠FBN 的角平分线。因此在△DBN 和△FBN 中，∠DBN = ∠FBN、BN = BN、AB = CD，∴△DBN ≌ △FBN（SAS)，可得∠BDN = ∠BFN，即∠BFN = 3X。在△BMF 中，∠BMF + ∠MFB + ∠MBF = 180˚，即 90˚ + 3X + 3X = 180˚，6X = 90˚，X = 15˚。

正确检验每一步，推理是正确的，回顾解题的过程可以看到，解题首先要弄清题意，由问题中已知的条件，联想以前学过的知识，提取相关的信息。进而得出我们想要的结果。

你还能想到其他做辅助线的方法吗？并尝试将过程写出来。

4. 结语

欧拉认为如果不能把解决数学问题背后的思维过程教给学生的话，数学教学就是没有意义的。因此，在遇到需要解决的问题时，应该培养学生按照波利亚“怎样解题”表的四个步骤进行思考分析，领悟每一道题背后的思考过程，进而更好地接近揭示问题的本质。

参考文献

[1] 郑育玲. 基于波利亚“怎样解题”表的数学问题探究——以一道初中平面几何题为例[J]. 中学数学研究(华南师范大学版), 2021(20): 48-50.

[2] 蒋文彬. 波利亚的“解题表”——解题之宝[J]. 江西教育, 1998(1): 29.

[3] 波利亚. 怎样解题[M]. 阎育苏, 译. 北京: 科学出版社, 1982: 125-132.