Advances in Education 教育进展, 2022, 12(12), 5182-5187
Published Online December 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2022.1212787

通过三种不同方式求解全概率公式中的概率问题

程　凤

西南交通大学数学学院，四川 成都

收稿日期：2022年11月1日；录用日期：2022年11月29日；发布日期：2022年12月6日

摘　要

全概率公式是通过“取条件”求概率问题的一个非常实用的方法，其“取条件”本质上是对影响该事件的样本空间进行划分，而样本空间划分选取的合适与否直接影响到概率的计算。对于多次试验中可重复出现的某随机事件，其出现与其前出现事件有内在联系，那其前出现事件的所有可能结果就是样本空间的划分。对于这样的问题，如果能准确给出样本空间的划分就可以运用全概率公式解决，其可能涉及到通过等式求解，通过递推关系求解，通过差分方程求解。本文给出了这三种方式求解全概率公式的分析过程，并通过具体例子给出了其求解过程，帮助学生深刻理解全概率公式的求法并加强其在生活中的应用。

关键词

全概率公式，构建等式，递推关系，差分方程，教学效果

Solving Probability Problems of the Total Probability Formula by Three Different Ways

Feng Cheng

School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu Sichuan

Received: Nov. 1st, 2022; accepted: Nov. 29th, 2022; published: Dec. 6th, 2022

Abstract

The total probability formula is very practical to solve probability problems through “taking con-

文章引用: 程凤. 通过三种不同方式求解全概率公式中的概率问题[J]. 教育进展, 2022, 12(12): 5182-5187.
DOI: 10.12677/ae.2022.1212787

ditions". The "taking condition" is to divide the sample space and whether it can be divided appropriately will affect the probability calculation. For a random event that can be repeated in multiple tests, its occurrence is inherently related to its previous events, so all possible results of the previous events are the division of sample space. In such a case, if the division of sample space can be accurately given, the total probability formula can be used to solve it, which may involve solving by equation, through recursive relation and difference equations. In this paper, the analysis of solving the total probability formula in these three ways is presented through the specific examples to help students deeply understand the total probability formula method and strengthen its application in life.

Keywords

Total Probability Formula, Formulating Equation, Recursive Relation, Difference Equations, Teaching Effect

1. 引言

概率论与数理统计是一门研究随机现象及其统计规律的数学学科，它是高等院校理工科各专业学生的必修课程。几乎所有的概率论与数理统计的教材都有全概率公式[1]，这里全概率公式的应用中试验一般只涉及两个阶段或步骤，样本空间的划分相对容易找到。当试验可多次进行时，样本空间的划分显得复杂，如果不能选取合适的样本空间的划分，那么不容易利用全概率公式计算概率。此时，最后一次试验的结果受到前面试验结果的影响，如果选取合适的样本空间的划分，那么利用全概率公式时可能会出现下面三种情况：通过等式求解概率，通过递推关系(一阶递推型)求解概率，通过差分方程(二阶递推型)求解概率。

通过等式求解概率问题的研究和例子很少。关于随机事件的递推算法已有不少作者研究，例如，童广鹏[2]给出了概率计算中的两类递推关系，分别为一阶递推型和二阶递推型；熊德之[3]利用递推关系计算事件概率的方法，并给出了具体的计算过程；沈春林[4]通过几个例子说明了递推思想在概率问题中的应用。本文拟在全面给出全概率公式在试验可多次进行时所使用的方法，并给出其具体例子。

本文首先介绍全概率公式，然后给出了通过三种方式计算全概率公式中的概率问题，最后给出本文的结论。

2. 全概率公式

全概率公式是概率论的基本公式之一，它把一个未知的复杂事件分解为若干个已知的简单事件求解，使一些难求的事件的概率变得简单易算。概率论与数理统计的教材都给出全概率公式的如下具体形式。

定理 1 **[1]**设随机试验 E 的样本空间为 S，事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 S 的一个划分，且 $P(A_i)>0$，则对任意的随机事件 $B\subset S$，有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B\mid A_i)P(A_i),$$

上式称为全概率公式。

2.1. 通过等式求解概率问题

我们在用全概率公式求解概率问题，会碰到将样本空间进行划分成几种情况时正好碰到其中一种情况中含有所求的概率，这样只需要通过等式计算出所求的概率即可。

例 1 假设甲、乙两人打乒乓球，每个球比赛获胜者得 1 分，目前他们处于局末平分的状态，比赛规定谁先领先 2 分就可以赢得此场比赛。假设每个球甲获胜的概率为 3/5，那么他最终赢得这场比赛的概率是多少？

分析：甲要赢得这场比赛有很多种情况，他可能连得 2 分，他可能先赢 1 分后输 1 分再连赢 2 分，他可能先赢后输，再赢再输，……最后连赢 2 分，等等。这样就有无数种情况了，不便于利用全概率公式计算概率。

此时，比赛的得分情况较为复杂，必须把其中的关系梳理清楚，将比赛结果分为更加简洁的方式，方便利用全概率公式。因此，考虑以下的三种情况：甲连赢 2 分；乙连赢 2 分；甲、乙各赢 1 分，不分先后顺序。然后分别计算这三种情况的概率并应用全概率公式就可以算出最后的概率问题了。

解：设事件 B 为甲最终赢得这场比赛，事件 A_1 为甲连赢 2 分，事件 A_2 为乙连赢 2 分，事件 A_3 为甲、乙各赢 1 分且不分先后顺序。

据题并通过简单计算得，

$$P(A_1)=3/5\times 3/5=9/25,\ P(B\mid A_1)=1,$$

$$P(A_2)=(1-3/5)\times(1-3/5)=4/25,\ P(B\mid A_2)=0,$$

$$P(A_3)=1-9/25-4/25=12/25,\ P(B\mid A_3)=P(B).$$

$P(B\mid A_3)=P(B)$ 是因为甲、乙又重新回到了局末平分的状态，其概率正是需要计算的概率 $P(B)$。根据全概率公式，

$$\begin{aligned}P(B)&=P(B\mid A_1)\times P(A_1)+P(B\mid A_2)\times P(A_2)+P(B\mid A_3)\times P(A_3)\\&=9/25\times 1+4/25\times 0+12/25\times P(B)\end{aligned},$$

这样得到一个关于 $P(B)$ 的等式，求解得，

$$P(B)=9/13.$$

因此，甲最终赢得比赛的概率是是 9/13。

例 2 假设甲、乙两人轮流抛掷一枚正面朝上的概率为 p 的硬币，且第一次是甲抛。第一个得到正面的人是赢家。试求甲是赢家的概率 $f(p)$。

分析：甲要是赢家，他可能第一次抛是正面；他可能第一次抛是反面且乙接着抛也是反面，他再抛是正面，等等。这样就有无数种情况了，不便于利用全概率公式计算概率。

此时，抛掷的情况较为复杂，必须把其中的关系梳理清楚，将抛掷情况分为更加简洁的方式，方便利用全概率公式。因此，考虑以下的两种情况：甲第一次抛是正面，则甲直接赢；甲第一次抛是反面，则乙接着抛，这相当于是乙第一次抛，那么乙赢的概率也是 $f(p)$，这样甲赢的概率就为$1-f(p)$。经过这样分析后就可以应用全概率公式算出最后的概率了。

解：设事件 B 为甲是赢家，事件 A 为甲第一次抛是正面，则 $\bar{A}$ 甲第一次抛是反面。

据题并通过简单计算得，

$$P(A)=p,\ P(B\mid A)=1,$$

$$P\left(\bar{A}\right)=1-p，\ P\left(B\mid\bar{A}\right)=1-f\left(p\right).$$

根据全概率公式，

$$f\left(p\right)=P\left(B\right)=P\left(B\mid A\right)\times P\left(A\right)+P\left(B\mid\bar{A}\right)\times P\left(\bar{A}\right)=p+\left(1-f\left(p\right)\right)\left(1-p\right),$$

这样得到一个关于 $f\left(p\right)$ 的等式，求解得，

$$f\left(p\right)=\frac{1}{2-p}.$$

因此，如果 $p=\frac{1}{2}$，则甲赢的概率为 $\frac{2}{3}$，这是因为甲第一次抛占有优势。

2.2. 通过递推关系求解概率问题

用全概率公式解题时会碰到概率的递推关系式 $P_n=aP_{n-1}+b,n=1,2,\cdots$，这样根据递推关系式和初始条件就可以求出概率。

例 3 假设袋中有 1 个白球，2 个黑球，每次摸出一球后就放入 1 个白球。这样进行了 n 次后，再从袋中摸出一球，求摸出的球是白球的概率。

分析：因为第 $i+1\ \left(i=1,2,\cdots,n\right)$ 次摸出白球的事件由 i 次摸出球的颜色决定，而第 i 次摸球结果分为摸出白球和摸出黑球，因此可以根据全概率公式得出第 $i+1$ 次摸出白球的概率与第 i 次摸出球的概率的关系。

解：设事件 $A_i\ \left(i=1,2,\cdots,n\right)$ 为第 i 次摸到白球，则根据全概率公式有，

$$P\left(A_{i+1}\right)=P\left(A_{i+1}\mid A_i\right)P\left(A_i\right)+P\left(A_{i+1}\mid\bar{A}_i\right)P\left(\bar{A}_i\right),$$

据题并通过分析得，

$$P\left(A_{i+1}\mid A_i\right)=P\left(A_i\right),$$

$$P\left(\bar{A}_i\right)=1-P\left(A_i\right),$$

$$P\left(A_{i+1}\mid\bar{A}_i\right)=P\left(A_i\right)+1/3.$$

其中，$P\left(A_{i+1}\mid\bar{A}_i\right)$ 表示第 i 次摸到黑球的条件下，再在袋中放入 1 个白球，则第 $i+1$ 次取到白球的概率。假设第 i 次摸球时袋中有 x 个白球，y 个黑球 $\left(x=1,2;y=0,1,2;x+y=3\right)$，则

$$P\left(A_i\right)=\frac{x}{x+y},\ P\left(A_{i+1}\mid\bar{A}_i\right)=\frac{x+1}{x+y}=\frac{x}{x+y}+\frac{1}{x+y},$$

因此，$P\left(A_{i+1}\mid\bar{A}_i\right)=P\left(A_i\right)+1/3$。

将上述关系代入全概率公式，

$$P\left(A_{i+1}\right)=P\left(A_i\right)\times P\left(A_i\right)+\left(P\left(A_i\right)+1/3\right)\times\left(1-P\left(A_i\right)\right)=\frac{2}{3}P\left(A_i\right)+\frac{1}{3},$$

这样得到一个关于 $P\left(A_{i+1}\right)$ 和 $P\left(A_i\right)$ 之间的递推关系，且又有 $P\left(A_1\right)=1/3$，因此，

$$P\left(A_{n+1}\right)=1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1},$$

即第 $n+1$ 次摸出白球的概率为 $1-\left(2/3\right)^{n+1}$。可以看出，随着摸球次数的增多，摸出白球的概率增加，当 $n\to\infty$ 时，$P\left(A_{n+1}\right)\to1$。

2.3. 通过差分方程求解概率问题

用全概率公式解题时会碰到概率的递推关系式 $a_0P_n + a_1P_{n-1} + a_2P_{n-2} = 0, n = 2,3,\cdots$，这样根据递推关系式和初始条件就可以求出概率。

例 4 连续抛掷一枚均匀硬币，出现正面朝上得 1 分，出现反面向上得 2 分。求得分为 n 分的概率 P_n。

分析： 事件得分为 $n+2$ 分由两个互斥事件组成：一是“得分已经为 $n+1$ 分，且下次抛掷出现一次正面朝上得 1 分”，这个事件发生的概率为 $\frac{1}{2}P_{n+1}$；另一个是“得分已经为 n 分，且下次抛掷出现一次反面朝上得 2 分”，这个事件发生的概率为 $\frac{1}{2}P_n$。

解： 设事件 B 为得分为 $n+2$ 分，事件 A_1 为得分已经为 $n+1$ 分，事件 A_2 为得分已经为 n 分。据题并通过简单计算得，

$$P(A_1) = P_{n+1},\ P(A_2) = P_n,$$

$$P(B \mid A_1) = \frac{1}{2},\ P(B \mid A_2) = \frac{1}{2}.$$

根据全概率公式，

$$P(B) = P(B \mid A_1) \times P(A_1) + P(B \mid A_2) \times P(A_2),$$

即，

$$P_{n+2} = \frac{1}{2}P_{n+1} + \frac{1}{2}P_n$$

这样得到一个关于 P_n 的差分方程，即，

$$P_{n+2} - P_{n+1} = -\frac{1}{2}(P_{n+1} - P_n).$$

又根据初值，$P_1 = \frac{1}{2}$，$P_2 = \frac{3}{4}$，则解此方程得，

$$P_n = \frac{1}{6}\left[4 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right],$$

因此，得分为 n 分的概率 P_n 为 $\frac{1}{6}\left[4 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$。

3. 结论

在有关概率和随机模型的研究中，凡是涉及到用概率分析的方法，全概率公式几乎都会被使用，那么能够灵活使用全概率公式就会为解决问题提供很大的方便。但是学生在学习的过程中会碰到不知道如何合理划分样本空间，导致无法使用全概率公式的情况。特别是试验可多次进行时，样本空间的划分显得复杂，一不小心就使得问题变得难以解决。本文给出可能出现这种情况的例子，并对其进行了分析，说明通过等式、递推关系、差分方程就能很好的解决这些问题。同时，这些方法能加深学生对全概率公式的理解和应用，培养学生的知识扩展能力。

致　谢

作者非常感谢相关文献对本文的启发以及审稿专家提出的宝贵意见。

基金项目

西南交通大学 2020 年本科教育教学研究与改革项目(20201035-07)。

参考文献

[1] 李裕奇, 赵联文, 王沁, 等. 概率论与数理统计[M]. 第 3 版. 北京: 国防工业出版社, 2011.

[2] 童广鹏. 概率计算中的两类递推关系[J]. 数学通讯, 2004(19): 24-25.

[3] 熊德之. 随机事件概率的递推算法[J]. 统计与决策, 2005(12): 21-22.

[4] 沈春林. 递推思想在概率问题中的有趣应用[J]. 数学通讯, 2013(10): 38-40.