

关于角的概念的高中数学课堂教学探究

李雪菁

上海师范大学数理学院, 上海

收稿日期: 2023年2月22日; 录用日期: 2023年3月23日; 发布日期: 2023年3月30日

摘要

角的概念从小学起便开始接触学习, 并在初中和高中逐步深入细化。本文将从角的发展出发, 进行角的概念的高中课堂教学设计, 希望能够帮助高中数学教师在阅读本文后对于角的概念的教学有更深刻的认识 and 思考。

关键词

角, 角的概念, 任意角, 高中数学, 教学设计

Research on the Concept of Angle in High School Mathematics Classroom Teaching

Xuejing Li

College of Mathematics and Physics, Shanghai Normal University, Shanghai

Received: Feb. 22nd, 2023; accepted: Mar. 23rd, 2023; published: Mar. 30th, 2023

Abstract

The concept of angle is learned from primary school and gradually refined in middle school and high school. In this paper, starting from the development of angle, the concept of angle is designed for high school classroom teaching, hoping to help high school mathematics teachers have a deeper understanding and thinking of the concept of angle teaching after reading this article.

Keywords

Angle, The Concept of Angle, Any Angle, High School Mathematics, Instructional Design

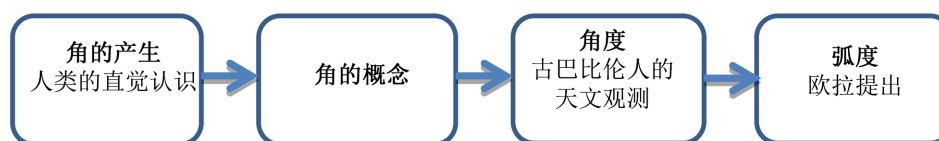


1. 角的发展

1.1. 角的历史发展

根据史料记载,角源于人类的直觉认识。早期人类通过对自身身体结构的观察,重复注意到手臂或腿弯曲所产生的形状,于是逐渐形成了关于角的模糊概念,且在很多语言中,角的边也称作“臂”或者“股”[1];古希腊早期数学家也依据形状和特征认识角,认为角源于线的“折断”或“偏斜”,将相等的角称为“相似的角”;《几何原本》中有关角的术语,例如锐角的“锐”字就是取“尖尖的,锋利”之意。

随着社会发展,人们抽象出了“角”的概念,角是从一点引出两条射线所组成的图形,用符号“ \angle ”表示,读作“角”。古巴比伦人在天文观测中发现,春分到秋分,太阳划过的轨迹是半个周天,与180个太阳直径相等,由此他们将圆周定为360度,平角为180度,至此,角的大小可以通过角度来衡量,角度的符号为“ $^\circ$ ”,读作“度”。之后,人们对于角度的研究范围也逐渐扩大,从平角之内到平角与周角之间,再到负角等等。而后,瑞士数学家欧拉又引入了“弧度”的概念,弧长等于半径的圆心角的度数定义为1弧度,符号为“rad”,此后角度制与弧度制之间也可以相互转化。



1.2. 角的学习发展

小学时就开始接触认识角,通过观察实物以及直观感知,从具体实物上的角抽象出角的几何图形,知道角有大小之分且与两边的张开程度有关,能够浅显地比较角的大小。因此在小学阶段学习角的过程中,初步感知生活中具体的角,抽象出角的几何图形,培养关于角的抽象思维意识和能力,建立角的正确表象。

初中在讲解《角》时,从静态的角度出发,给出定义“有公共端点的两条射线组成的图形叫做角”[2];引入角度的概念以此来衡量角的大小,介绍了角的常用度量单位——度,分,秒;并且在初中时,对于角的学习和探究的范围都是在 $0^\circ\sim 360^\circ$ 之间进行的。由此在初中学习角的过程中,形成了角的基本图形概念,掌握了用准确的数学语言表达和辨析角的能力[3]。

而在高中,学习角的定义时是从动态的角度出发的,给出“角可以看成一条射线绕着它的端点旋转所成的图形”[4];根据正时针或逆时针的旋转方向以及旋转量定义了正角、负角和零角的概念,由此将角的概念推广至任意角;并且将角放在直角坐标系中讨论,令角的始边与x轴的非负半轴重合,终边在第几象限就说这个角是第几象限角;此时就会发现,有无数个角的终边都是重合的,为此,又将角与集合相结合,所有与角 α 终边相同的角(包括角 α 本身)可构成一个集合 $S = \{\beta | \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$,定义了终边相同角的概念;同时,在直角坐标系中讨论研究角,也会发现角的终边在旋转 360° 后会回到原来的位置,体现角的周而复始的变化规律;并且在高中学习和研究任意角的范围拓宽至 $(-\infty, +\infty)$ 。因此,

在高中学习探究角的过程中，通过任意角再次加深感悟客观世界周期性的变化规律，实现了角在数值范围上的突破[5]以及概念的推广，为接下来学习三角函数做好铺垫。

2. 角的概念的教学设计

任意角

【教学内容】人教版高中数学必修——168 页：任意角与弧度制第一课时。

【教学理念】

1. 课堂教学融入数学史，渗透数学文化，培育并提升学生的价值观和数学学科素养；
2. 课堂教学中加强初、高中知识的衔接，使学生能够理解并体会初高中学习内容的区别和联系；
3. 运用现代教育技术，实现教学优化，促进学生学习的积极性和主动性；
4. 牢牢把握基础知识，加深易错易混淆知识点的辨析和理解，高效精准教学。

【教学目标】

1. 了解任意角的概念，能够辨别象限角，并运用集合表示终边相同角；
2. 理解并掌握角的概念的推广和扩充，体会角的周期性和任意性；
3. 感悟角的数学文化，提升数学学科素养，经历任意角数学表示的过程，体验数学学习的奇妙和快乐。

【教学重难点】

教学重点：了解任意角的概念；辨别象限角；终边相同角的定义和性质。

教学难点：角的概念的推广和扩充；角的周期性和任意性。

【教学过程】

1. 了解角

问题 1：同学们在初中是否了解过角的数学史呢？可以分享一下吗？

留给学生适量思考时间并引导其分享想法

教师开始介绍数学史：根据史料记载，角源于人类的直觉认识。

教师向同学们展示弯曲手臂，并介绍早期人类通过对自身身体结构的观察，重复注意到手臂或腿弯曲所产生的形状，逐渐形成了角的模糊概念，且在很多语言中，角的边也称作“臂”或者“股”[1]；同时古希腊早期数学家也认为角源于线的“折断”或“偏斜”，将相等的角称为“相似的角”；《几何原本》中有关角的术语，例如锐角的“锐”字就是取“尖尖的，锋利”之意。

而后，古巴比伦人通过天文观测，发现春分到秋分，太阳划过的轨迹是半个周天，与 180 个太阳直径相等，由此他们将圆周定为 360 度，平角为 180 度，角度由此产生。再后来，瑞士数学家欧拉又引入了“弧度”的概念，角度与弧度又能够相互转化……

设计意图：通过提问学生之前所了解的角的数学史，引起学生思考，从而进一步介绍角的数学史，渗透数学文化。

2. 回顾角

问题 2：

- (1) 那么初中时对于角是如何定义的？
- (2) 我们曾经学习过哪些类型的角？
- (3) 那我们曾经所学过的角范围是多少呢？

学生思考，得出结论：

- (1) 有公共端点的两条射线组成的图形叫做角；一条射线绕着它的端点旋转所成的图形也叫做角。

(2) 曾经学习过锐角, 直角, 钝角, 平角, 周角……

(3) $0^\circ \sim 360^\circ$

设计意图: 复习回顾初中所学角的知识, 唤起学生的回忆, 为后续新课讲解埋下伏笔, 并且尝试引导学生构建初高中知识上的衔接。

3. 认识角

师: 同学们对于角给出了两种定义, 我们可以发现第一种是静态定义, 而第二种是动态定义。本节课我们就从角的动态变化出发, 学习新的知识。

问题 3: 根据角是一条射线绕着它的端点旋转所成的图形, 请同学们观察大屏幕中的动画, 思考教师的操作有何区别。

教师打开 GeoGebra, 鼠标右键分别单击点 B 和点 E, 开启动画, 边 AB 和边 DE 开始转动(见图 1)。

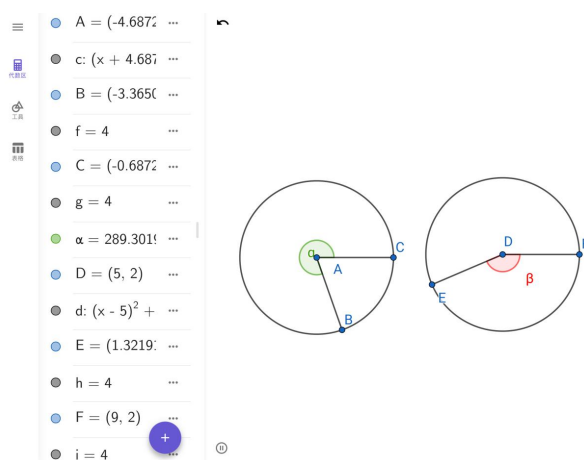


Figure 1. GeoGebra showing positive and negative angles
图 1. GeoGebra 展示正负角

学生思考, 得出结论: 动画 1 和 2 中, 角的终边旋转方向不同。

由此, 教师给出正角、负角、零角的定义: 我们规定, 一条射线绕其端点按逆时针方向旋转形成的角叫做正角, 按顺时针方向旋转形成的角叫做负角。如果一条射线没有做任何旋转, 就称它形成了一个零角[4]。并且, 任意角包括正角、负角和零角。

而后, 教师打开另一个 ggb 文件, 按不同旋转方向旋转边 AB 和边 DE 或者不做任何旋转, 根据所学的任意角概念, 随机挑选同学判断并回答 $\angle CAB$ 、 $\angle EDF$ 、 $\angle HGI$ 的度数(见图 2)。

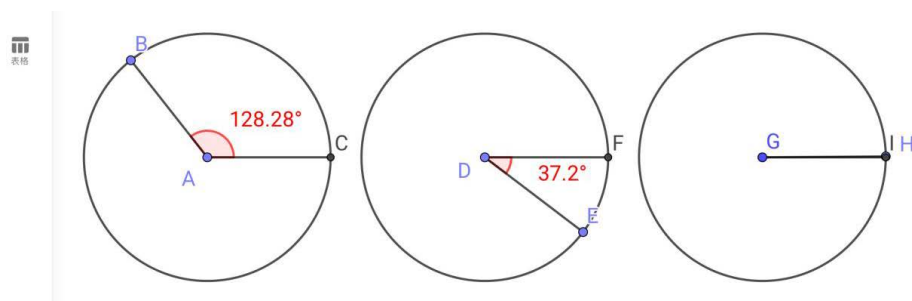


Figure 2. Determining any angle through the GeoGebra operation
图 2. 通过 GeoGebra 操作判断任意角

师：接下来，我们在直角坐标系中讨论角，令角的顶点与原点重合，角的始边与 x 轴的非负半轴重合。先为同学们介绍一下象限角的定义：终边在第几象限就说这个角是第几象限角。如果角的终边在坐标轴上，则这个角不属于任何一个象限[4]。

教师打开 ggb 文件，鼠标拖动 B 点，随机挑选同学回答 $\angle CAB$ 是第几象限角(见图 3)。

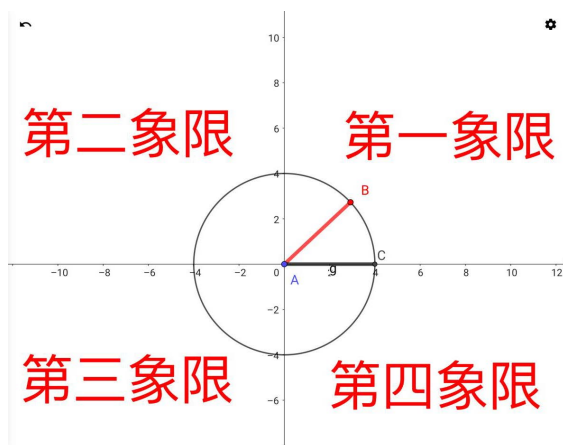


Figure 3. GeoGebra showing quadrant angles
图 3. GeoGebra 展示象限角

问题 4：初中所学习角的范围在 $0^\circ \sim 360^\circ$ ，那么超出这个范围的角该如何表示呢？

组织学生小组讨论，师生共同总结：大于 360° 的角可以看作 $\beta = n \times 360^\circ + \alpha$ ，在坐标轴中标出角 α 的位置即是角 β 的位置；小于 0° 的同理。

师：同学们是否发现，很多角度在坐标系中，对应的角是相同的？

由此，教师给出终边相同角的概念：所有与角 α 终边相同的角，连同角 α 在内，可构成一个集合 $S = \{\beta | \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in Z\}$ 。

师：所以，同学们能发现初高中所学的角有哪些区别和联系吗？

引导学生思考并分享想法，师生共同总结：初中学习角的范围只在 $0^\circ \sim 360^\circ$ ，而高中学习的角的范围实现了突破和扩大，并且角是有周期性的，终边相同角的概念使得多个角度的角能够相互转化。

设计意图：通过使用 GeoGebra 向学生直观展示任意角以及象限角的定义，将抽象概念具体化，同时可通过操作该软件向学生提问，加深学生对新知识的理解和掌握。并且，将初高中知识的关联进行了强调和讲解，加强学生对初高中知识的衔接和理解。

练习角

在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内，找出与下列各角终边相同的角，并指出它们是第几象限角：

(1) 390° (2) 880° (3) 1040° (4) -120°

答案：(1) 30° ，第一象限

160° ，第二象限

320° ，第四象限

240° ，第三象限

集合 $A = \{\text{第一象限角}\}$ ， $B = \{\text{锐角}\}$ ， $C = \{\text{小于 } 90^\circ \text{ 的角}\}$ ，以下四个命题：

① $A = B = C$ ；② $A \subset C$ ；③ $C \subset A$ ；④ $A \cap B$ ，其中正确的命题个数为()

A. 0 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

答案：集合 $A = \{\beta | \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, 0^\circ < \alpha < 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ ；锐角集合 $B = \{0^\circ < \beta < 90^\circ\}$ ；而小于 90° 的角也有无数个，是集合 $C = \{\beta | \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, \alpha < 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ ；很明显，三个集合不相等，且相交也无法得到上述命题结论，故此题选 A。

与 1991° 终边相同的最小正角是_____，绝对值最小的角是_____。

答案： $1991^\circ = 191^\circ + 5 \times 360^\circ = -169^\circ + 6 \times 360^\circ$ ，最小正角为 191° ，绝对值最小的角为 169° 。

设计意图：选取基础习题，巩固学生对新学知识的理解，并且增加易错易混淆习题的练习，加强学生对角的概念性质的辨析，提高课堂学习的精准度。

【作业布置】略

【教学反思】

本次任意角的教学设计融入数学史与 Geogebra，培育并提升学生的价值观和数学学科素养的同时，也努力实现教学优化，促进学生学习的积极性和主动性，任意角概念的抽象性通过多次结合运用 Geogebra 使其具象化、直观化，并加深学生对于知识的理解和掌握。

教学设计中也存在不足之处，教学过程中环节内容很多，需要合理准确把控每部分内容的教学时间，Geogebra 所制作的课件也可以再加完善和美化，笔者也会继续反思，努力完善并优化本次教学设计。

3. 结语

本文基于深入挖掘角的历史发展以及学生的学情发展历程，在教学设计中紧紧围绕教学理念进行数学史引入和 GeoGebra 的操作配合，将象限角等数学概念直观化、具象化地呈现并能灵活操作、及时检验学生对知识点的掌握程度，同时也选取了几道典型习题进行课堂讲解实现对本节知识的巩固练习，对于一线高中教师是能够提供相关角的教学素材和教学想法的，笔者也将继续努力学习并深入研究角的概念的教学教法，实现更大程度和更高效的教学提高和优化。

参考文献

- [1] 林西成. 角的发展小史[J]. 中学生数理化(七年级数学)(配合人教社教材), 2012(12): 43.
- [2] 李海东. 义务教育教科书 数学 七年级 上册[M]. 北京: 人民教育出版社, 2012: 132-133.
- [3] 王昕昕. “角”教学设计[J]. 中国数学教育, 2022(11): 38-45.
- [4] 李海东, 郭玉峰. 普通高中教科书 数学 必修 第一册[M]. 北京: 人民教育出版社, 2019: 168-171.
- [5] 张志勇. 于寻常之中发现不寻常——“任意角”的教学设计与反思[J]. 中学数学月刊, 2020(8): 1-5.