

数形结合思想应用在数学课堂的应用现状

陈思源¹, 汤建钢^{1,2*}, 徐苏苏¹

¹伊犁师范大学数学与统计学院, 新疆 伊宁

²伊犁师范大学应用数学研究所, 新疆 伊宁

收稿日期: 2023年3月19日; 录用日期: 2023年4月16日; 发布日期: 2023年4月23日

摘要

本文在教育部颁发的《义务教育数学课程标准(2022年版)》(以下简称《义务教育课标》)和《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》(以下简称《普通高中课标》)的基础之上, 进行综合研究。主要研究在中学数学课堂上, 数形结合思想在数学课堂上的地位与作用; 应用策略以及实际应用。最终达到教师应用数形结合思想引导学生深入理解数学知识概念、优化解题过程、改进教学场景、激发学生的学习动机和调动学生的学习积极性, 提高教师教学能力的同时提升学生的综合实力。

关键词

数形结合, 课堂, 中学数学, 应用

The Application Status of the Combination of Number and Form Thought in Mathematics Classroom

Siyuan Chen¹, Jiangang Tang^{1,2*}, Susu Xu¹

¹School of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yining Xinjiang

²Institute of Applied Mathematics, Yili Normal University, Yining Xinjiang

Received: Mar. 19th, 2023; accepted: Apr. 16th, 2023; published: Apr. 23rd, 2023

Abstract

This paper conducts a comprehensive study on the basis of Compulsory Education Mathematics Curriculum Standards (2022 edition) (hereinafter referred to as Compulsory Education Curricu-

*通讯作者。

lum Standards) and ordinary high School Mathematics Curriculum Standards (2017 edition, 2020 revision) issued by the Ministry of Education (hereinafter referred to as Ordinary High School Curriculum Standards). This paper mainly studies the position and function of combining the thought of number and form in middle school mathematics class, application strategy and practical application. In the end, teachers can guide students to deeply understand the concept of mathematical knowledge, optimize the problem-solving process, improve the teaching scene, stimulate students' learning motivation and mobilize students' learning interest, improve teachers' teaching ability and enhance students' comprehensive strength.

Keywords

Numeric-Shape Association, Class, Middle School Mathematics, Application

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

教育部在 2022 年颁发的《义务教育课标》中提出了初中阶段的核心素养包含抽象能力、几何直观、空间观念等[1]; 在 2020 年颁发的《普通高中课标》中也提到了核心素养, 包含数学抽象、直观想象、数学建模等[2]。表明中学阶段的数学课程具有抽象性高、逻辑性强的特点, 倘若能将原本复杂、抽象的知识借助数形结合思想化抽象为直观, 就能够极大地降低学生掌握数学的难度。所以, 教师如何教好、学生如何学好数形结合思想具有极大的研究价值。

数形结合思想是一种把数学符号与几何直观图形进行结合的思想, 其原理是将其复杂、抽象、不易掌握的数学符号语言转换成为简单的几何图形, 或把原本抽象的几何图形转化为易懂的数学符号语言, 从而引导学生能够从多个视角来分析和解决数学问题。教师在课堂上循序渐进地把数形结合思想渗透到教学内容中, 有利于引导学生把数学符号和几何图形进行有机融合, 不仅能有效地降低学生学习数学的难度, 还有助于培养学生分析与处理数学问题的综合能力, 从而使学生对数学知识有更深入的认识。

数与形是数学中两个最古老也是最基本的研究对象。数与形在一定条件下可以互相转变, 化繁为简, 它们之间存在某种联系, 而这种联系被我们称为数形结合。数形结合思想的研究在数学家笛卡尔创建了笛卡尔坐标系之后得到了快速发展, 原理是将代数与几何通过坐标系联系在了一起, 在现在的中学数学里被称为解析几何。中学阶段的教学可以划分为初中阶段和高中阶段, 在初中教学阶段, 数形结合思想在学生完全平方公式这个知识点时尤为突显, 通过图像来理解公式, 是强化数形结合思想的一个转折点; 在高中教学阶段, 数形结合思想在三角函数章节再一次被提出, 通过对三角函数图像、方程和性质的学习, 进一步揭示形与数之间的关系, 也为未来学习直线、圆锥曲线、空间向量与立体几何等相关知识埋下伏笔。

2. 数形结合思想在中学课堂的地位与作用

数形结合思想在中学阶段是非常重要的思想之一, 从历史的角度来看, 最开始是以数为概念的形成和发展, 再到微积分的出现以及现代数学的各类分支学科的产生, 最为突出的就是解析几何, 是数形结合的典范[3]。其中, 形与数两者是贯穿整个中学数学教育的两条主干内容, 在中学数学领域里有着不可撼动的地位, 几乎每一位数学教师在讲解函数、几何等相关内容时都会提出数形结合的观点。不仅如此,

该思想所发挥的作用除了能有效地降低解决数学题的难度，还能帮助学生提高解决各类问题时从多维度进行思考的能力。可想而知，数形结合思想在中学数学课堂上的地位之高，作用之大。

2.1. 数形结合思想在中学课堂的地位

在中学数学的课堂教学上，任何一位数学教师都不可低估数形结合思想的地位。无论是初中阶段还是高中阶段，数学符号与几何图形随处可见，将它们进行有机融合转化，以此来对数学知识规律特点做出细致透彻的分析[4]，将其涉及到的数学知识点能够更加具体、直观地表示出来。作为数学常用思想之一，其完美地契合了中学生的感知特点，在课堂上巧妙应用数形结合思想，除了能培养学生的数学思维，同时还能锻炼学生分析问题和解决问题的能力，提高自我效能感。数学教师在课堂实际授课时，若能够将数形结合思想有效地渗透进去，不仅有助于学生精准、高质量地解答三角函数、空间立体等问题，还能有效降低学生掌握困难的数学知识，进一步提升学生的数学核心素养。

2.2. 数形结合思想在中学课堂的作用

学习和理解数学教材中的定义，是学生打好基础的关键，只有在基础稳固的情况下，才能对数学知识有更深层次的探究，掌握其规律和内涵[5]。但在实际的数学教学过程中却有部分以文字叙述的概念，过于抽象的概念会使学生难以理解知识点，导致学生难以在课堂上集中精力，而应用数形结合思想却能够有效降低学生对数学知识的理解，使原本复杂的问题能变得通俗易懂，也能更好的集中学生的注意力。教师在备课时，不仅要充分了解学生，也需要对教材进行深入的分析。针对部分高度抽象化的内容，教师应巧妙的运用数形结合思想，对数学知识点进行梳理，使学生扎实掌握上述内容。以椭圆的定义为例，椭圆是平面内到两个定点 F_1 、 F_2 的距离之和等于一个常数(大于 $|F_1F_2|$) 的动点 P 的轨迹， F_1 、 F_2 称为椭圆的两个焦点[6]。对于这个定义，大部分学生会感觉到抽象且空洞，这时，教师可以根据椭圆的定义，找一块木板，在木板上找两个点 F_1 、 F_2 钉入钉子，将一根长度超过这两个点直线距离的线的两端点固定在 F_1 、 F_2 处，随后用一支笔绷住线，以笔尖、 F_1 、 F_2 为各个顶点构成三角形，笔尖走完一圈后，画出椭圆。利用数形结合思想，可以促进学生深入地了解并掌握数学知识点，培养学生分析、探索、解决数学问题的能力。

不仅如此，在数学高考题中常常会出现一些有关方程零点的问题，若巧妙且灵活地应用数形结合思想，不但能提供不一样的解题思路，还能在一定程度上有效地降低解题难度。以 $\ln x + x - 1 = 0$ 为例，它是一个超越方程，用一般的解题思路发现无法解答，现在需要我们转变一下解题思路，即可轻松解决这类问题。将原方程移项，得到方程 $\ln x = 1 - x$ ，分别令 $f(x) = \ln x$ 、 $g(x) = 1 - x$ ，然后利用数形结合思想，可将方程解的问题转变为函数图形的交点问题，能更加直观、简洁的解决问题，除此之外，利用二分法也能解决这类问题，但相较于前面那种方法，它不够直观且花费的时间较长。最终显而易见的是， $\ln x + x - 1 = 0$ 是一个比较简单的超越方程，通过数学直觉可以发现 $x = 1$ 是方程 $\ln x + x - 1 = 0$ 的实数解，但并不是每一道题都能通过数学直觉进行解答，利用数形结合的思想将方程问题转化为函数问题才是绝大多数考生的容易掌握的技巧。

3. 数形结合思想的实际应用策略

3.1. 数与形之间的相互转化

中国数学家华罗庚教授曾今说过一句话：“数缺形时少直观，形少数时难入微。”所以“数”和“形”两者经常能在一定的条件相互转化与联系，抽象的数量关系常常伴有形象且直观的几何意义，而直观的图像性质也常常能用数量关系加以精确地描述，由此可见，“数”和“形”二者经常被数学家们联系起

来，密不可分。在中学阶段，形与数之间的结合随处可见，两者能按照一定条件进行相互转化、互相沟通，其主要表现在以数化形或以形化数。

以数化形通常是将复杂的数学符号转化成比较通俗易懂的几何直观图形，目的在于帮助学生降低学习难度。例如，教师在课堂上讲解二次函数图像与性质的时候，分别观察函数解析式与图像可以帮助学生加快相关知识点的理解和掌握。二次函数的解析式为 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)，教师在分别讨论 $a > 0$ 或 $a < 0$ 时，可以引导学生画出具体的函数图像，利用以数化形的思想帮助学生掌握 a 的取值与抛物线开口大小、方向之间的关系，以便后面开展更加深入的研究。将抽象的函数问题用直观图形表示出来，引导学生对函数图像的观察，总结出函数图像的性质，不仅有助于提高教学质量，还能激发出学生的辩证思维。

以形化数通常是将复杂的图形转化为简单易懂的数学符号，以代数的方法和思想来解决几何的问题，解析几何就用到了以形化数思想，在中学阶段最常见的就是把几何图形放在所建立的平面、空间或极坐标系上，将抽象的几何问题转化成代数的问题进行解答，提高解题效率同时还能降低解题难度，有助于提升学生的数学能力。教师在课堂上若能巧妙地应用以形化数，不仅可以激发学生的求知欲，还能帮助学生灵活地解决数学难题，对学生未来的思维发展也带来了一定的积极影响。以 2021 年新疆高考理科数学题为例，图 1 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是矩形，线段 PD 垂直于底面 $ABCD$ ， PD 等于 DC 等于 1， M 为线段 BC 的中点，且线段 PB 垂直于线段 AM 。试着求线段 BC 的长与二面角 $A-PM-B$ 的正弦值。

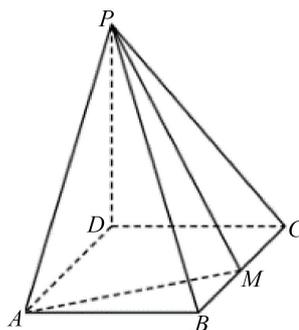


Figure 1. Xinjiang Uygur Autonomous Region 2021 college entrance examination science and mathematics paper no. 18

图 1. 新疆维吾尔自治区 2021 年高考理科数学试卷第 18 题

这道高考题完美的彰显了以形化数。面对这种经典的立体几何题，教师在讲解时，可以引导学生将此题的解题方法用基本图形位置关系、定理与基本事实对比建立空间直角坐标系的方式各做一遍，进行参照比较，会发现若一个图形过于抽象，利用建立空间直角坐标系的方法解题，不仅可以简化解题过程，节省部分时间，还有利于激发学生在考场上的自信心。

无论是以数化形还是以形化数，均是数形结合的一部分，充分地把数与形进行转化，能多方面激发学生的数学思维与数学核心素养。教师在课上讲授数形结合思想时，应当注意例题的选择，利用好部分经典例题，能给学生留下一个深刻印象。这样不仅可以优化学生的解题步骤，还能提升对知识的进一步理解，体会数学之美。

3.2. 数形结合在多媒体技术当中的运用

在中学教学阶段，将多媒体技术与数形结合思想进行有机结合，可以把部分数学知识具体化，不仅

能呈现出活跃、生动的中学数学教育课堂，还能够提升课堂教学的质量和学生的学习效果[7]。在讲解几何与代数的相关内容时，教师合理的运用了网络与多媒体技术，能够表现出直观几何图形，将抽象化的形式系统化，从而侧面突出数形结合思想的重要性。例如教师讲到平面解析几何章节时，会涉及到直线与圆锥曲线位置关系，是高中数学的重、难点内容，大多数学习者不易掌握，但在实际教学场景中可通过多媒体技术的使用，给学生们展示出精准的图像，以减少手绘所产生的误差，从而牢牢掌握知识点，提高数学能力。

课堂教学场景中提升学生的学习动机，激发求知欲是一个难点，但教师若能熟练地使用几何画板作图，可以博取眼球，勾引起学生的好奇心。以平方差公式 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 为例，教师可以运用数形结合思想，将图 2 利用几何画板做出动态图形，用几何的方式来证明平方差公式的成立，无论是从提升课堂的活跃度还是学生学习效率的角度来看，都能达到事半功倍的效果。正确借助多媒体技术进行演示，帮助学生掌握数形结合的应用，积极开展课堂交流互动，形成以学生为主体，教师为主导的课堂，为学生之后的学习、实际应用均奠定了雄厚的基础。

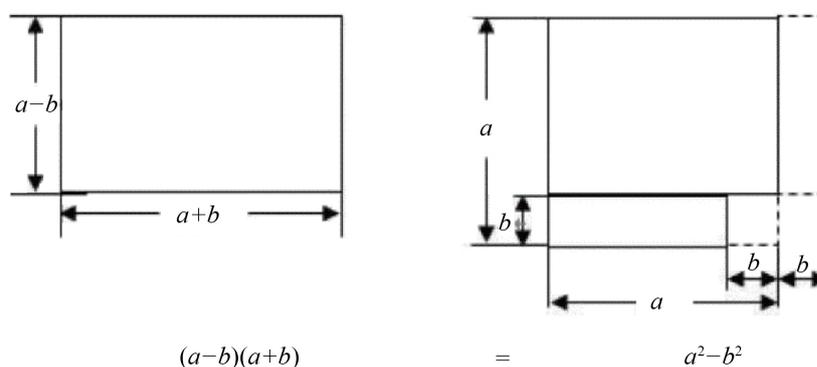


Figure 2. Geometric derivation of formula for the difference of square
图 2. 平方差公式的几何推导

当前，利用多媒体技术教学体现“数”与“形”的数学教学思想是现代数学教育的一种发展趋势，熟练的运用现代化多媒体技术进行数形结合的课堂教学，能够更有效地防止学生在学习中，发生图像丢失或图形点面遗漏的情形。当然，运用多媒体技术也需要根据学生的实际情况，合理地从教学内容特点需求出发，并根据多媒体的特性来实施。

3.3. 数形结合与生活实际的联系

数学与生活是息息相关的，为了进一步的引导学生揭示数学知识与生活实际间的密切联系，能更好地将数形结合思想融入其中，优化与完善教学各个环节，教师可以把课堂上讲授的数学内容与生活实际蕴含的数形结合思想进行有机融合，从而引领学生注意生活中的数学问题。让学生们了解数学并不是一门简单而乏味的课程，而是日常生活中处处存在且生动有趣的一门课程。

例如，在生活中患上感冒时，我们会测量体温和冲泡感冒药，测量体温用的温度计或温度枪，上面会有数字显示；冲泡感冒药会用刻度杯，测量倒入了多少水，以及在日常生活中使用的导航系统，也是将图像和距离结合在了一起，这些都是日常生活中简单的数形结合。对此，教师在课堂上可以引出这些生活实际例子，让学生发现数形结合思想与实际生活紧密联系，进行启发式的深度教学，激发出学生的学习兴趣，同时也能使学生更加热爱生活，仔细的观察生活中一点一滴[8]。

4. 中学数学课堂上应用数形结合的注意事项

首先, 数学教师要对中学数学的教学内容特点做出思考。中学阶段的数学知识具有抽象性, 再加上逻辑推理的复杂性与曲折性, 从而导致学生的认知水平无法得到足够的提升, 并起到了一定的阻碍作用, 也极易引发学生对中学数学知识的学习产生抵触情绪。在以往的数学课堂教学过程中, 部分教师会强调数学的思维能力, 但很少会对如何灵活应用直观图像进行思考, 从而导致学生难以高效、轻松地掌握所学的知识内容, 也极易陷入到一种比较机械化的学习状态, 不懂得灵活变通, 出现解题思路单一的情况。

对此, 为了能全面激发出学生的数学综合能力, 提升教师的授课效率, 数学教师应加强对数形结合思想的灵活引用, 为学生将来深入专研数学学科奠定下良好基础。经研究发现, 中学生在小学教育阶段所学的几何与代数知识大多相比较容易, 有迹可循, 但中学教育阶段的代数、几何知识却相对抽象化, 需要一定程度的想象力, 并着重强调学生做到对知识的理解和掌握。所以, 为了达到教学目标, 教师在课堂教学上可以进一步引导学生更加灵活地应用数形结合思想, 把代数问题与几何图形问题进行相互转化, 将实质性的问题更直接地表现出来, 以便于更有效地解决各类数理问题。这样既能够激发出学生对学习数学的兴趣, 也可以更进一步促使学生意识到中学的数学知识相比于小学的数学知识更加富有挑战性, 以便于全身心投入其中。

以最近几年的数学高考为例, 高中数学的教育教学在体制改革日益深化的特殊背景下, 每年的高考题都有着显而易见的灵活性、思辨性与多样性, 常常联系生活实际。特别是目前所新出现的生活情景题、实际应用题等等一系列, 都是对学生基础知识能力的一种全新化综合能力考察。但不管怎么变革、创新, 回归本质而言, 其绝大部分考查的重点内容都是紧密围绕着数形结合的知识点展开的。所以, 在平日的课堂教育教学活动中, 数学教师要注重与不同的知识点进行合理连接, 除指导学生要正确地掌握符号语言以外, 还要训练他们对图形语言的基本理解, 并培养出具有对数与形的转换能力, 以此达到能熟练掌握对数形结合思想的正确运用目的, 以便在高考考场上应对数学题时做到游刃有余, 从而获得更理想的成绩。

但目前中学数学课堂上关于对数形结合思想进行教与学的实际情况不容乐观, 因为在实际授课中如果无法进行有针对、有计划的讲授, 便难以将数形结合的思想充分体现出来。以实际的课堂教学为例, 教师在进行从数到形或从形到数的变化时, 若过程比较浅显, 不能很好地把重点内容彰显出来, 结果将增加学生非必要的学习负担和心理负担, 与教师的教学初衷背道而驰。与此同时, 若部分数学教师的基本能力不达标, 出现不能正确、熟练的运用多媒体技术, 无法为问题的解决、说明提供有力支撑, 最终也极易造成课堂教学过程中出现绘制图形产生较大误差的情况。

并且当前针对社会大环境下的一个教学情况, 注重中学阶段的升学率, 导致部分在一线的数学教师轻视对数形结合思想的教学, 在讲解的过程中潦草带过, 并将其单纯地视为一种解题方法, 随后便开始引导学生展开练习, 结果便是造成大多数学生无法真正地掌握数形结合思想的内涵, 提高不了数学思维的境界, 并对未来进入大学学习数学起到了反噬作用。因此, 无论老师还是学生都理应充分关注数形结合思想, 老师们应当不断地累积教学经验、开拓创新教学方法, 对数形结合思想进行灵活教学, 提高基本功底; 而学生们可以通过持续地开展头脑风暴活动, 提高对数形结合思维的运用, 增强自身创新能力, 不要产生学生只知其形, 不明其意的状况。另外, 教师在教育教学的过程中, 可以根据不同层次的内容入手, 把握契机, 循序渐进地强化学生的空间想象力, 逐步深化对数形结合思想的理解, 为提升数学能力奠定良好基础。

5. 结束语

总而言之, 在数形结合的理论指导下, 教师应能够引导学生有效地优化和完善解题过程, 提升对知

识的综合理解能力，与此同时，培养学生完善且灵活的数学思维，既减轻学生掌握数学的难度，又促进学习效果和解题效率。随着新课程改革与素质教育的推行，教师在实际授课中，为保证学生在掌握基本数学知识的同时又能愉快学习，教师在备课时可以以数形结合思想为教学理论基础，并由此来构建更生动的数学教学课堂。

基金项目

新疆维吾尔自治区高校科研计划自然科学重点项目(XJEDU2019I024)。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022年版)[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022: 4.
- [2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版 2020年修订)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 5.
- [3] [德]Felix Christian Klein, 著. 高观点下的初等数学(第一卷)[M]. 舒湘芹, 等, 译. 上海: 华东师范大学出版社, 2020.
- [4] 朱家宏. 初中数学教学中数形结合思想的应用[J]. 科技视界, 2015(9): 175+206.
- [5] 张保萍. 关于数形结合在初中数学教学中有效融合的研究[J]. 学周刊, 2021(29): 47-48.
- [6] 章建跃, 李增沪. 普通高中教科书数学选择性必修第一册[M]. 北京: 人民教育出版社, 2019.
- [7] 黄继蓉, 陈光喜, 黄文韬. 多媒体技术与数学“数形结合”教学[J]. 数学教育学报, 2009, 18(2): 76-78.
- [8] 卢燕春. 数形结合思想方法在高中数学教学中的应用研究[J]. 考试周刊, 2021(66): 82-84.