

基于APOS理论的空间向量概念教学设计

尹鑫瑶, 关晋瑞

太原师范学院数学与统计学院, 山西 晋中

收稿日期: 2023年3月21日; 录用日期: 2023年4月20日; 发布日期: 2023年4月27日

摘要

在高中数学中, 空间向量的概念较为抽象, 如何合理地引导学生学习空间向量的概念至关重要。由于APOS理论在指导概念教学过程中可执行性最佳, 对于概念教学的效果较为明显, 本文基于APOS理论探讨了空间向量概念的教学设计, 拓展并丰富了空间向量的教学研究。

关键词

APOS理论, 空间向量, 概念教学

Teaching Design of Space Vector Concept Based on APOS Theory

Xinyao Yin, Jinrui Guan

School of Mathematics and Statistics, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi

Received: Mar. 21st, 2023; accepted: Apr. 20th, 2023; published: Apr. 27th, 2023

Abstract

In senior high school mathematics, the concept of space vector is abstract, so how to guide students to learn the concept of space vector reasonably is very important. Because the theory of APOS is the best in guiding concept teaching, and its effect on concept teaching is obvious, this paper discusses the teaching design of space vector concept based on the theory of APOS, which expands and enriches the teaching research of space vector.

Keywords

APOS Theory, Space Vector, Concept Teaching

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在高中数学教学中,部分教师对于数学概念教学认为是可以被弱化的教学环节,概念的学习只是为了之后做题进行“约束”及“参考”,但并不意味着学生能很快从解题中理解概念的涵义。概念的学习对于学生而言相对抽象,学生很难从文字描述中真正理解概念,但是数学概念作为数学学习的“基石”是学生在建立“数学”这座大厦时必须掌握的,那么对于数学概念的教学则不容小觑。如何深刻理解和利用数学课程标准,进行有效的数学概念教学,是当前教育工作者需要思考的问题。

概念是思维的最基本单位,学生对一切数学思维活动的操作和掌握都要基于对数学概念的理解之上,反之学生对于概念的混淆直接导致其他数学活动的实施困难。此外,学生对概念的掌握和运用水平也是衡量教学质量的标准,有效提高学生对概念的理解程度能够为整个高中数学的学习打下坚实的基础[1]。

2. APOS 理论概述

APOS 分别是由英文 action (操作)、process (过程)、object (对象)和 schema (图式)的第一个字母所组合而成。APOS 理论是一种建构主义学习理论[2],集中对数学概念的学习过程进行研究。杜宾斯基认为,学生在数学概念学习过程中,只有经历“操作-过程-对象-图式”四步,才能够认识到所学知识的前因后果,逐渐加深对概念的理解,进而形成知识建构。

2001年,厦门大学乔连生教授把 APOS 理论引入国内,并详细介绍该理论框架及部分国外研究成果。乔连生教授指出 APOS 理论对数学概念教学有一定的启示与帮助,且有助于理解数学的本质[3];张奠宙等学者以函数概念为例,简明扼要介绍了 APOS 理论的四个阶段,为 APOS 理论在国内进一步推广和应用做了铺垫[4]。越来越多学者开始研究 APOS 理论,使得国内对 APOS 理论的关注也在逐渐增加,不仅高校开始应用 APOS 理论,中学数学也开始运用 APOS 理论进行教学研究。下面基于 APOS 理论对高中空间向量概念这一内容进行教学设计,并提出相应教学建议。

3. 基于 APOS 理论的空间向量概念的教学设计

3.1. 内容分析

选自人教 A 版《普通高中教科书(数学)》选择性必修第一册第一章第一节“空间向量及其运算”[5],其内容以概念为主。学生在学习了平面向量内容基础上再学习空间向量及其运算,运用类比的方法理解空间向量的概念、运算等,在类比的过程中体会平面向量与空间向量的共性和差异。空间向量是平面向量的推广,学习平面向量可以解决一些平面几何问题,同样,学习空间向量为的是利用空间向量解决立体几何问题,所以对于空间向量概念的教学会有一定的学习基础。

3.2. 学情分析

学生在人教 A 版《普通高中教科书(数学)》必修第二册第六章已经学习过平面向量及其应用以及第八章立体几何初步中学习过空间中点、线、面的相关内容。基于以上学习内容,将空间向量概念由平面向量概念进行推广对学生学习而言相对容易很多,但要注意其中的差异,避免混淆。

3.3. 教学目标分析

- 1) 了解空间向量的实际背景。从生活实际出发, 创设现实情境, 让学生领会学习空间向量的生活用处所在。
- 2) 了解空间向量的概念。经历由平面向量推广到空间向量的过程, 理解空间向量及相关概念。
- 3) 培养学生直观想象核心素养。增强运用几何直观和空间想象思考问题的意识, 形成数学直观, 在具体的情境中感悟学习空间向量的本质。

3.4. 教学重难点

空间向量及其相关概念。本节内容多以概念为主, 且都以文字描述的形式出现, 概念学习是数学学习的基础, 为之后的向量运算作铺垫。在本节内容的学习中, 要求学生了解空间向量及其概念的同时还要区分平面向量及其概念。概念教学一直是数学教学一大难题, 文字描述相较于图形图画而言凸显的乏味且难理解。从整体上来看, 空间向量概念的学习可以把文字转化成图形, 让学生更直观的感受空间向量的概念。

3.5. 教学设计

3.5.1. 操作(Action)阶段

问题 1: 同学们, 滑翔伞这项极限运动大家有尝试过吗? 没有尝试过的同学, 我们共同来看 PPT 上的这张图片(见图 1)。图片中所展示的一位极限爱好者在进行滑翔伞运动。



Figure 1. Paragliding motion diagram
图 1. 滑翔伞运动图

操作 1: 同学们思考一下, 滑翔伞本身没有任何动力, 那它为什么能够飞行呢?

【设计意图】问题 1 以现实生活为背景, 通过创设情境引发学生思考, 以及运用教材的章前图作为情境导入, 能够引导学生阅读章引言, 明确本章的主要研究问题, 成为整体内容的“先行组织者”。同时使教学不脱离教材设计, 并让学生领会数学源于生活, 用于生活。

问题 2: 飞行员通过控制伞翼来实现飞行工作, 滑翔伞和所有的有翅膀的飞行器一样, 都是依据伯努利原理, 即流体(包括气流和水流)的流速越大, 其压强越小; 流速越小, 其压强越大。而滑翔伞是没有动力的, 所以在无风的飞行过程中, 滑翔伞是往斜下方直线运动, 受力状态平衡。见图 2 我们可以发现, 飞行员在飞行中会受到来自不同方向、大小各异的力, 例如绳索的拉力、升力、阻力等。

操作 2: 飞行员体重 75 kg, 他在飞行前站在地平面上, 对其进行受力分析并判断这些力是否在一个平面内上呢?



Figure 2. Force analysis diagram of paraglider
图 2. 滑翔伞受力分析图

操作 3: 思考当飞行员开始起飞并飞行一段时间, 此时飞行员可能会受到哪些力呢?

操作 4: 不在同一个平面的力, 应该怎么表示它? 所学习的内容不够解决问题了, 就要学习新知识来完善现有知识。

【设计意图】问题 2 在问题 1 的基础上, 向同学们介绍滑翔伞的原理。不在同一平面内的力能够操作滑翔伞, 说明存在空间概念。在空间中, 这些力如何来表示, 将是教师引导学生需要探讨的问题。

3.5.2. 过程(Process)阶段

问题 3: 同学们回忆在学习平面向量相关概念时, 教科书是如何定义平面向量的?

过程 1: 根据上面的情境, 已经确定这些力不在同一个平面内而是在同一个空间中。那么, 就可以尝试类比平面向量的概念给出空间向量的概念。

【设计意图】问题 3 通过类比的方法引导学生根据平面向量概念说出空间向量概念, 在这个过程中让学生明白是平面向量解决不了空间问题于是有了空间向量。

问题 4: 与平面向量一样, 空间向量也用有向线段表示, 有向线段的长度表示空间向量的模。

过程 2: 见图 3, 向量 a 的起点是 A , 终点是 B , 则向量 a 也可以记作 \overrightarrow{AB} , 其模记为 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|a|$ 。见图 4 所示的正方体中, 如何表示过同一个顶点 O 的三条棱上的三条有向线段的三个向量?

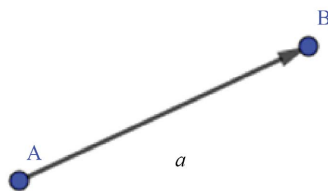


Figure 3. Two-dimensional vector diagram
图 3. 二维向量图

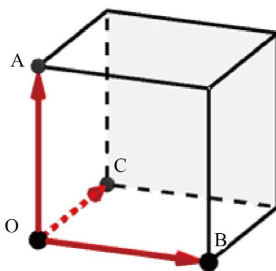


Figure 4. Three-dimensional vector diagram
图 4. 三维向量图

过程 3: 观察这三个向量是否共面

结论: 即它们是在不同在任何一个平面内的三个向量。其实就是说平面向量是二维的, 而空间向量是三维的。

【设计意图】问题 4 通过类比的方法向学生介绍向量的大小如何表示。借助直观图形更好地让学生建立空间向量的概念, 同时与平面向量作对比, 让学生理解平面向量与空间向量的区别与联系。并且让学生认识到平面向量呈现的是二维的平面, 而空间向量是在三维立体空间中。学习空间向量就是由二维到三维的过渡。

3.5.3. 对象(Object)阶段

问题 5: 空间向量概念中有两大要素, 其中之一是向量的大小。首先从向量的大小研究空间向量有什么特殊向量。

对象 1: 学生思考在学习平面向量相关概念时, 接触哪些有关向量长度的特殊向量?

结论: 与平面向量一样, 长度为 0 的向量叫做零向量, 记为 0 。当有向线段的起点 A 与终点 B 重合时 $\overrightarrow{AB} = 0$, 模为 1 的向量叫做单位向量。

【设计意图】问题 5 从空间向量两大要素出发, 引导学生从向量大小角度学习空间向量相关概念, 通过类比由平面向量中的零向量和单位向量认识空间向量中的零向量和单位向量。

问题 6: 其次从向量的大小和方向同时研究, 空间向量有什么特殊向量。

对象 2: 思考在学习平面向量的相关概念时, 学习过哪些既涉及向量长度又涉及向量方向的特殊向量?

结论: 平行向量, 顾名思义, 如果表示若干空间向量的有向线段所在的直线互相平行, 这些向量叫做平行向量。而如果表示若干空间向量的有向线段所在的直线互相重合, 这些向量叫做共线向量。特别注意: 零向量与任意向量平行, 即对于任意向量 a , 都有 $0 // a$ 。

对象 3: 学生类比平面向量中的相等向量说出在空间向量中相等向量的概念。

结论: 向量的大小也被称作向量的模, 所以相等向量的概念就是方向相同且模相等的向量叫做相等向量。

对象 4: 思考模相等但是方向不同的向量又是什么向量。

结论: 方向相反且模相等的向量叫做相反向量。虽然在文字表述上, 平面向量与空间向量的相关概念完全相同, 但平面向量仅限于研究同一平面内的平移, 而空间向量研究的是空间的平移。

【设计意图】问题 6: 研究完空间向量的大小, 还有空间向量的方向这一要素, 同样从平面向量相关概念作为导向学习空间向量相关概念。与此同时, 发现空间向量与平面向量的不同之处。通过类比, 学习空间向量的相关概念, 可以更好地理解空间向量并且能够回忆旧知, 以及指出平面向量与空间向量的本质。

问题 7: 见图 5 练一练, 说出 $\overrightarrow{AB} = 0$ 的相等向量以及相反向量。

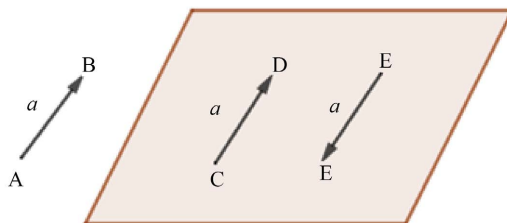


Figure 5. Example diagram
图 5. 例题图

老师提醒：这里我们要注意相反向量的起始方向，不要写成 $|EF|$ 。

【设计意图】问题 7 通过练习让学生及时巩固所学知识，在练习的同时也能直观的感受空间向量相关概念。

3.5.4. 图式(Schema)阶段

问题 8：同学们，我们学习完空间向量相关概念之后，把它们串联起来，形成思维导图，见图 6。

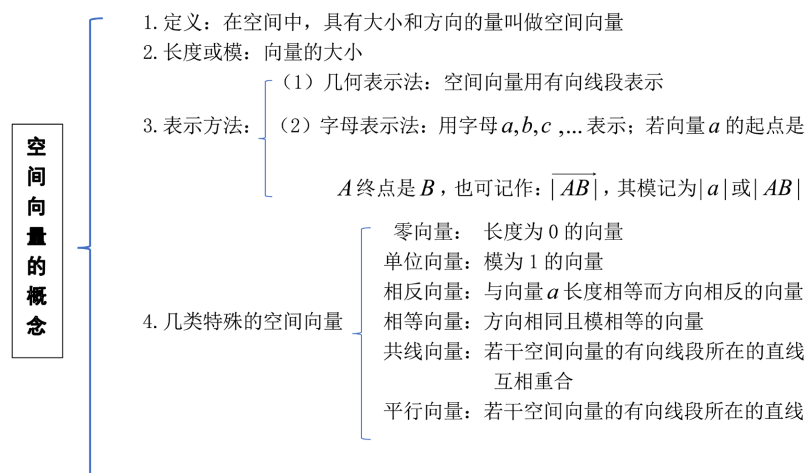


Figure 6. Space vector mind map

图 6. 空间向量思维导图

老师：这里需要提示的是，所有向量都是在三维空间中才得以实现的，比如平行向量，一定是平面外一条向量与平面内一条向量平行，才能被称作平行向量。

【设计意图】问题 8 通过思维导图的形式将所学知识串联起来，更直观清晰地给学生展现空间向量概念地知识点。

教师小结：空间的概念是在平面的基础上建立起来的，同理空间向量的概念也是在平面向量的概念基础上衍生来的，这是二维到三维的跨越。虽然同学们在平面向量的基础上学习空间向量较为轻松，但空间向量顾名思义要解决的是空间的问题也就是立体几何的问题，学好空间向量为解决立体几何提供保障。

3.6. 教学建议

3.6.1. 操作阶段：创设疑难情境

在空间向量概念教学中，通过创设疑难情境并结合教学软件进行展示，使得学生从现实情境中感受学习空间向量的必要性。所得到的课堂反馈很好，学生对这种从情境出发而不是单纯的类比平面向量引出空间向量的方法表示肯定。

3.6.2. 过程阶段：加强学生参与

在空间向量概念的教学中，教师引导学生积极参与课堂活动并采用小组合作学习的方式，加强学生课堂的参与度，把课堂主动权交给学生。使得学生在自主学习与合作学习中感受空间向量的特别之处。

3.6.3. 对象阶段：深化概念认识

在空间向量概念的教学中，教师要带领学生深刻理解空间向量的概念。理解文字并不难，难的是将

它与立体几何及数学问题相联系, 如何让学生认识空间向量是解决立体几何问题最有力的工具是教师教学需要把握的地方。

3.6.4. 图式阶段: 构建知识框架

在空间向量概念的教学中, 教师需要督促学生进行课堂小结。指导学生针对本堂课所学内容构建知识框架图, 不仅方便整理更是对后面学习的一个风向标。若学生在整理过程中遇到瓶颈, 教师需及时点拨, 要让学生当堂问题当堂解决。

4. 结语

普通高中数学课程标准(2017年版 2020年修订) [6]指出用空间向量解决立体几何问题要进一步发展学生的数学抽象和直观想象的数学核心素养。以现实生活为背景, 以数学想象为依托, 教师需要引导学生自己去发现和掌握空间向量的概念及其应用。强调理解概念进行有意义的学习, 基于 APOS 理论进行空间向量概念的教学设计能更好地引导学生把握概念的本质, 在理解的基础上, 更好地对知识加以运用。

基金项目

山西省科技创新人才团队专项资助(202204051002018), 山西省应用基础研究计划项目(201901D211423)。

参考文献

- [1] 贾兵, 陆学政. “APOS 理论”指导下的高中数学概念教学[J]. 中学数学教学, 2012(6): 1-7.
- [2] Tall, D. (2004) Thinking through Three Words of Mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, **4**, 281-288.
- [3] 乔连全. APOS: 一种建构主义的数学学习理论[J]. 全球教育展望, 2001(3): 16-18.
- [4] 张奠宙, 李士琦, 李俊. 数学教育导论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003: 180-186.
- [5] 人民教育出版社课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心. 普通高中教科书数学选择性必修第一册(A版) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [6] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版, 2020年修订) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.