Advances in Education 教育进展, 2023, 13(4), 2122-2128
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2023.134333

Hans汉斯

以泰勒公式教学为例探索高等数学的教学改革

熊志平，秦莹莹

五邑大学数学与计算科学学院，广东 江门

收稿日期：2023年3月21日；录用日期：2023年4月20日；发布日期：2023年4月27日

摘　要

高等数学是所有自然学科的基础，学科中的微积分、复变函数以及数理统计是研究自然现象，揭示自然规律，探索规模应用的理论研究工具。随着大规模科学计算与大规模工程应用的发展，越来越多的科学领域都比以往更加迫切地需要高等数学的理论与应用支持。如何上好《高等数学》这门课？如何让《高等数学》这门课适应时代的需要？如何让学生们学以致用？是每个《高等数学》教师必须考虑的问题。本文从泰勒公式课堂教学的实际出发，以泰勒公式教学为例从多方面探索《高等数学》课的教学改革研究与应用。

关键词

高等数学，泰勒公式，教学改革，OBE教学

Taking Taylor’s Formula Teaching as an Example to Explore the Teaching Reform of Higher Mathematics

Zhiping Xiong, Yingying Qin

School of Mathematics and Computational Science, Wuyi University, Jiangmen Guangdong

Received: Mar. 21st, 2023; accepted: Apr. 20th, 2023; published: Apr. 27th, 2023

Abstract

Advanced mathematics is the foundation of all natural disciplines. Calculus, complex variable functions and mathematical statistics in the discipline are theoretical research tools for studying

文章引用: 熊志平, 秦莹莹. 以泰勒公式教学为例探索高等数学的教学改革[J]. 教育进展, 2023, 13(4): 2122-2128.
DOI: 10.12677/ae.2023.134333

natural phenomena, revealing natural laws, and exploring scale applications. With the development of large-scale scientific computing and large-scale engineering applications, more and more scientific fields need the theoretical and application support of advanced mathematics more urgently than ever. How to teach advanced mathematics well? How to adapt advanced mathematics to the needs of the times? How can students apply what they have learned? It is a question that every advanced mathematics teacher must consider. Starting from the Taylor's formula actual situation of classroom teaching, this paper takes Taylor's formula teaching as an example to explore the research and application of teaching reform of advanced mathematics from various aspects.

Keywords

Advanced Mathematics, Taylor's Formula, Teaching Reform, OBE Teaching

1. 引言

高等数学是数学的一个重要基础分支，它和作为整个体系的数学一样具有悠久的历史[1] [2]。二十世纪以来，随着数学的发展和应用的需要，《高等数学》的研究对象以及研究方法发生了巨大的变革。《高等数学》是以研究函数系统的性质与构造为中心的一门学科，是现代科学技术的数学理论基础之一，在计算机科学、信息科学、数字通信(开关电路、编码、密码)、系统工程、近代物理与近代化学等方面有广泛的应用[3] [4] [5] [6]，例如：《高等数学》与信息处理；《高等数学》与《密码学》。

在大学本科的教学体系中《高等数学》分为：数学专业的基础课《数学分析》，240 学时；理工科专业的专业课《高等数学一》和《高等数学二》，分别为 160 学时和 128 学时；其他专业的必修课《微积分》，80 学时。这样的设计体系比较完善，教学内容也较丰富，但是存在一些问题比如：课时量不够；理论与应用模块不能相辅相成。就拿《高等数学二》来说，笔者一直从事该课程的教学，每年都在向教务部门反映，128 学时只够用来讲理论知识，根本没时间进行知识的应用展开，理论知识与实际应用脱节，导致很多学生学得很迷茫，不知道这门学科的重要性，不知道学科知识的应用所在。

2. 高等数学的教学现状

在学校发展高水平大学的指向下，《高等数学》的课程改革略显滞后，很多书本知识过于陈旧，很多理论证明过于深奥，很多应用举例只是皮毛没有发挥真实的启发作用。笔者在近几年的教学过程中，总结了《高等数学》教学中存在的一些问题，具体表现为：1) 《高等数学》书本中的应用资源有限，无法积极培养学生的实操能力；2) 现有的教学方法落后，不能很好的和学生互动，不能调动学生的学习主动性；3) 教学过程简单机械，无法及时检查教学效果，导致学生讨论不积极，打消学生的自主学习劲头；4) 现有的考核方法单一，无法体现学生学习过程中的努力程度，给少数投机的学生有了投机取巧的机会。鉴于以上问题，笔者在课堂上探索了《高等数学》的教学改革，采用了一些新的教学方法和教学手段：例如将数学建模的思想融入《高等数学》的驱动式教学方法中，又例如结合课程的特点，设计了灵活多样的分段、分级的考核方式。这些改革措施实施以来教学效果良好，教学成绩斐然，学生普遍反映较好。下面我们以《高等数学》中泰勒公式的课堂教学为例来阐述《高等数学》教学改革的实践与应用[6] [7] [8]。

3. 《高等数学》的教学改革案例分析

3.1. 泰勒公式的引入

传统方式引入：“引入泰勒公式的原因，或者说这节课要解决的问题是对于一些较复杂的函数，为了便于研究，往往希望用一些简单的函数来近似表达。由于用多项式表示的函数，只要对自变量进行有限次加、减、乘算数运算，便能求出它的函数值来，因此我们经常用多项式来近似表达函数”。能这样思考的原因是已经得到复杂函数的近似表达式可以表示成多项式的形式。这样思路是没有问题的。但学生在学习和接受该知识点时，经常会出现这样一个问题：“给出的例子是用一次多项式来表示，因为想让精确度更高一些，从一次多项式直接跳到用 n 次多项式来表示”。这个跳跃性太大，不符合一般人的思维习惯。所以说这是学生接受困难的第一个原因，也是最重要的原因。

课本这样的安排是有一定道理的，前面讲了中值定理，而泰勒公式作为中值定理的升级版或总结，这个想法没问题。但是知识点之间的跨度太大，没有铺垫学生从一开始就会对它产生抗拒心理，带着巨大的疑惑来听后面内容的讲解。

改革后的引入：这里首先需要做一个非常大的变动，牵涉到泰勒公式这部分内容在《高等数学》教学中授课顺序及思维方式的改动。首先，将这部分内容放到级数那个章节来讲，这样的安排是最合理的。因为，按照常规的思维方式，泰勒公式产生的顺序应该是先有级数，然后有泰勒级数，泰勒公式只是泰勒级数的副产品。其次，按照知识产生的顺序来讲，泰勒公式有总结中值定理的作用，所以说，将后产生的中值定理放在先产生的泰勒公式前面讲解，是非常不合理的。

在级数这个内容还没有讲的前提下该如何最恰当的处理这个泰勒级数问题呢？课堂上我们的处理方式是：“级数虽然还没有讲，但是拿过来用用还是可以的，直接给出级数收敛到函数 $f(x)$的形式，说明我们后面会给出具体的论证，这里只用一下这个式子，也就是多项式可以用函数表示，那么我们想用函数用多项式表示就自然而然了”。这样的引入只有一个问题，级数内容没有讲过。但是，这个问题我们可以简单说明一下就可以，写出级数的形式，告诉学生像这种形式的多项式就叫级数。简单明了，不会存在理解困难问题。按照级数的理论，在一定条件下级数收敛于一个函数，从形式上来看，也就是多项式可以表示成一个函数。反过来，一个函数能否在一定条件下表示成一个多项式的形式呢？这是自然而然的想法，按照这种思路，我们就引出了泰勒公式(对于一些较复杂的函数，为了便于研究，在一定条件下可以将该函数表示成一个多项式的形式)。

两种方法比较：经过改进后最大的好处是符合思维习惯，公式的猜想不再突兀。并且很多同学对多项式的这种表示方式很生疏，更是无法理解为什么会用这种形式的多项式。用级数理论反推就不会存在这种问题，因为级数就是这种表示形式。

3.2. 公式的证明

传统证明方式：“用待定系数法带入条件直接证明”。这种证明方法从理论上来讲没有任何问题。但是对于学生来说，本来公式的猜想就是疑点重重，公式的证明更是繁琐。再加上学生的基础不牢，很多同学连这种形式的多项式求导都成问题，x 与 x_0 区分不清，不知道它们的作用，更别说其他。

改革后的证明方式：“不再直接证明泰勒公式，而是先证明($x_0 = 0$)时的麦克劳林公式”。这样的好处是，从形式上看，公式会简单很多，求导数变的简单，学生都能独立完成求导，不存在 x 与 x_0 区分不清的问题，经过简单引导，学生都能够自己完成公式的证明过程。在引导的过程中还要注意，当学生求出 $f(x)$的 n 阶导之后，需要帮助学生学会总结，($f^{(n)} = n!a_n + x *$ 某些项)。有了总结出来的这个公式，代入前提条件得出结论就会变的无比简单。经过麦克劳林公式的证明，并且基本上是学生自己通过运算的

出来的结果，他们对这种证明方式，证明过程都已经很熟悉了。然后再引入麦克劳林公式的推广也就是泰勒公式，类似的证明过程就不必再累数了。

两种方法比较：泰勒公式的证明一直是个难点，经常是老师在上面证明累死累活，学生在下面看的一头雾水。并且公式的证明实在烦琐，连老师在证明过程中都会出错。经过改进之后，不再直接证明泰勒公式，而是先证明更加简单的麦克劳林公式，经过熟悉证明过程之后再推广为泰勒公式。这样做的好处显而易见，从易到难，逐步提升难度，为公式的证明铺平道路。经过这种方式，轻松解决长久以来的老问题。

3.3. 公式的应用案例

采用 OBE 的教学理念，来建设明确而适度的案例，是《高等数学》教学改革成功的关键[9] [10]。先以案例为抓手，让学生根据问题，利用已有的知识，去分析解决问题；然后分析案例求解的优点，缺陷，改进和推广应用；最后融会贯通，达到掌握知识，运用知识，解决问题的目的。下面以泰勒公式的一个现实中的应用案例为例来阐述 OBE 教学理念在《高等数学》课程教学中的实践。

在上一小节课中我们讲了泰勒公式的引入和证明，了解了泰勒公式的定义，来源，求解，今天下面我们重点讲一下泰勒公式在实际生活中的应用，学会如何利用课本知识解决现实生活中的问题。

案例：SARS (Severe Acute Respiratory Syndrome，严重急性呼吸道综合症，俗称：非典型肺炎)是 21 世纪第一个在世界范围内传播的传染病。SARS 的爆发和蔓延给我国的经济发展和人民生活带来了很大影响，我们从中得到了许多重要的经验和教训，认识到定量地研究传染病的传播规律、为预测和控制传染病蔓延创造条件的重要性。

首先，请按照传播过程的一般规律，用机理分析方法建立模型描述传染病的传播过程，其次，分析受感染人数的变化规律并预报传染病高潮到来的时刻，最后，根据建立模型提出预防传染病蔓延的手段[6]。

案例假设：t 时刻已感染人数(病人)为 $i=i(t)$；每个病人每天有效接触(足以使人致病)人数为常数 λ；t 足够大时，$i(t)=0$；所获得的疫情统计数据真实可靠；不考虑研究时间内的人口出生率和自然死亡率。

案例模型建立：因为 $i(t+\Delta t)-i(t)=\lambda i(t)\Delta t$，所以案例的模型为 $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t=li$ 且 $i(0)=i_0$ 且 i_0 为初始时刻的已知病人人数。

案例求解：利用微分方程中的分离变量法可得 $i(t)\cong i_0\mathrm{e}^{\lambda t}$。

案例分析：根据泰勒公式可知 $\mathrm{e}^{\lambda}\cong 1+\lambda$，所以 $i(t)\cong i_0(1+\lambda)^t$。

案例模型应用：可用于早期 SARS 传播的预测，提供了一种控制 SARS 传播的方法：隔离病人。在经济学中该案例也有用武之地，如经济学中单复利模型。在人口学中该案例也有用武之地，如人口指数增长模型。

通过类似案例问题的学习与解决，学生们学会了如何应用书本知识解决实际问题，了解了所学知识的实用性，完美打通了理论知识与实际能力培养之间的障碍。为学生以后的工作和学习奠定了一定的实操基础也树立了他们的自信心。笔者以该方法为手段实际培养了 2 届学生，总体来说效果突出，一方面学生学到了理论知识和实操能力，另一方面老师很好的掌握了学生的学习状况，可以及时调整教学方法，积累教学经验，培养适应社会需要的人才，增加教师的工作成就感。

3.4. 教学效果的检验

我们先分析一下以往的《高等数学》课程的考核评价体系，笔者认为以往的考核评价体系存在较大问题。主要体现为：考核方式没有根本变化过于单一，一考定胜负，平时学习状况、实践能力在最终考

核中所占比例太少，无法引起学生的重视，无法激发其兴趣。很多教师和学生都没有真正树立与《高等数学》教育目标相适应的考试观。对教师而言，考试只是为了检验学生《高等数学》课程的学习情况；对学生而言，考试具有很强的功利性，是和奖学金、毕业证、学位证紧密挂钩。由于认识上的片面性，使得现行的考试制度制约、阻碍了大学生能力的培养。为了最大限度的实现公平性，调动学生的积极性，激发学生的学习信心，调动教师的积极性和责任心，使学生最大程度的受益，需要改革以前的过考核评价方式，建立一套完整、合理的考核评价体系。

4. 《高等数学》的教学改革与实践

《高等数学》这本书是数学专业的专家编辑的，从数学理论数学证明上来说，各个方面都无可指摘。但是我门不能不考虑到，我们这门课的服务对象，都是一些理工科的学生，而不是数学专业的学生。他们需要的是学习数学知识为他们以后专业需求服务，而不是花费极大的精力，通过痛苦严谨的证明得到数学理论的过程。那么对我们这些《高等数学》教师来说，如何让他们能够更轻松的理解并掌握数学理论，更重要的是掌握数学理论的应用才是我们最终任务。而现实是数学老师都是数学专业毕业的，我们对自己的专业了如指掌，证明严谨，逻辑严密，好一点的老师能加入数学史，数学故事，调节一下课堂气氛，多数老师的高数课堂就是直接给出定理、证明定理。整个课堂死气沉沉，老师自我陶醉，学生昏昏欲睡。证完之后就是让学生死背公式，练习做题套路。但是这样的上课模式真的是学生需要的吗？

这个问题无解。但是我认为，满足学生专业需求的课堂才是好课堂，如何能让学生花费尽量少的精力来学到自己需要的东西才是最重要的，而不是把课堂作为自己的展台，展示自己的强项，最拿手的东西。要做到这一点需要从一下几方面进行改进：

4.1. 知识的引入要符合学生的思维习惯

新的内容的引入非常重要。任何成果的取得都是从无到有，一点点逐渐积累出来的。在这个过程中会有很多障碍，也会走很多弯路。但是我们的教材，我们的老师展示这些几百年甚至上千年才得出的成果的时候，往往让学生觉得这些东西像是从天上掉下来的一样，简直是不可思议，要想接受更加困难。既然成果的得到是个循序渐进的过程，这个过程才是符合思维习惯的，而不是直接就得到一个完美的结论。既然这样，我们就可以按照这种符合思维习惯的方式来教学生：首先思考问题的产生；其次考虑解决问题的过程中碰到的难点；最后考虑难点的解决方案与问题的解决方法。

4.2. 理论的证明能让学生理解接受

不是说定理的证明没有意义，在数学学习中严谨的数学证明，严密的逻辑体系自然有他不可忽视的作用。但是这不是理工科学生需要的。如果说培养他们的逻辑思维能力，这样做付出的代价也太大了。如果问他们需要什么，他们需要的是好好理解有这么一个数学定理，应用工具，具体用到的时候能够快速拿出来用。有很多人认为，理工科《高等数学》的改革应该往应用方面转型。这个观点，我赞同也不赞同。有两个主要原因。第一、我们的《高等数学》老师都是数学专业毕业的，他们擅长的就是数学理论的证明，如果说应用，他们并不了解。勉强让他们做自己不擅长的事情也无法做好。第二、《高等数学》的应用太广泛了，几十上百个专业的教授，难道让老师把所有教授专业的其他专业内容再学一遍？这没有意义，也不现实。所以我认为，淡化证明，加强对基本理论的教授，使学生能更深刻的理解基本理论，让这个理论在他心里扎下根，然后才能举一反三，需要的时候熟练运用，而不是让《高等数学》老师去学习《高等数学》在其他专业的所有应用，或勉强让学生学习离自己很遥远的应用。比如说，大家知道《高等数学》在经济中的应用，认为在经济中的应用的很重要，那难道让物理专业的学生也要好好学习在经济中的应用吗？我看还是了解就可以了吧。只是举个例子而已，但例子是什么并不重要。只

要真正理解了数学这个定理，接受了这个工具，相信需要的时候他自然会拿出来用。所以最后重申一下，让数学定理、公式的产生不再生硬，让他们知道是在什么样的情况下，有什么样的需求，经过了什么样的波折才有了这个定理的产生，证明过程更能让学生理解接受，不再过于专业化，才是我们这些《高等数学》老师需要做的，虽然任重道远，路途坎坷。

4.3. 理论知识与实际应用的要相互相成

建设明确而适度的案例是《高等数学》OBE 教学的前提。案例可以由师生共同讨论甚至是学生根据自身需求自主提出建设，这样，就更符合各个学生的个性特点和兴趣爱好。这一教学过程要求学生从需求分析问题、数据搜集、数据整理、方案设计到问题求解全过程的参与。如此，把要学的知识点巧妙地设计在问题中，使学生在完成任务的同时达到理解学科知识、掌握技能的目的。充分调动他们的积极性、主动性和创造性，从而培养他们独立探索、勇于开拓进取的自学能力。

合理分解案例是《高等数学》OBE 教学的关键。分解案例是将一个大的问题分成若干个子问题，再将子问题往下分，直到每个子问题可操作或可执行为止。在这些子问题中，隐含了很多新的知识点，会有一定难度，这就需要教师创设与学生日常生活相关的问题情景，并用讲解、示范等教学方法，来激发学生的积极性和探究问题的欲望。教师可以引导学生联系实际，来分解案例和设计求解模块：从什么方面分析→如何分析→分析的准确与否→有没有不同的分析体系→不同方法的比较，随着问题分析的深入细致，整个评估系统功能不断完善，结构不断清晰，教学的内容逐步拆解为具体的“子问题”布置给学生。在此过程中，教师可以把典型的案例分析提供给学生参考，让学生相信这些问题是可以通过学习完成的，以消除学生对解决问题的畏惧。

自主与协作学习是《高等数学》OBE 教学的重点。学生明确了各自的子问题后，需要借助各种方法来解决问题。建构主义学习观认为知识是个体主动建构的，无法通过教师的讲解直接传输给学生，因此，学生必须参与学习，通过自主与协作学习来完成各自的任务，从而建构新知识的意义。例如，有时案例评估模型的建立涉及层次分析法和统计回归模型等知识，模型的求解涉及大规模数据的导入与导出，Excel、Matlab 的应用和乘法效应模型、柯布-道格拉斯模型的数值解等知识，模型的分析与检验和模型的重建涉及到最小二乘估计、概率中的点估计与区间估计、假设检验及残差分析等知识。对于这些问题的分析与解决，学生可以先查阅相关教材、资料，在上机实践中，逐步模仿、改造，进行自主学习；老师尽量鼓励大家共享资料，相互讨论、交流，进行协作学习，当学生遇到困难时，可给予适当的指导与帮助。

4.4. 考核方式要有层次且多元

针对考核评价体系中存在的问题，我们结合课程的特点，设计了较为灵活多样的方式来考核。主要包括以下几方面：① 实践成绩，将平时的上机实验成绩或主持参与的实践类项目综合成绩做最终考核的 20%，鼓励学生不拘泥于期末考试，努力尝试新事物，开拓新思想，提高自己是实际动手能力。② 数学竞赛成绩，将数学竞赛的成绩纳入最终考核体系，这一部分占最终考核的 20%。通过鼓励研究生参加各种数学竞赛，提高学生学习的积极性，也让学生初步拥有运用所学的相关理论和方法解决实际应用问题的能力。③ 综合性评定成绩。这个考核模块包括两个方面的内容。一，期末考核成绩，这一部分占最终考核的 60%。二、综合性作业成绩，包括平时考勤，小组讨论，社会实践等，这一部分占最终考核的 10%。

5. 小结

本文从泰勒公式课堂教学的实际出发，以泰勒公式教学为例从多方面探索了《高等数学》课的教学

改革研究与应用，得到了一些教学心得和体会，然而法无常法，任何教学方法都要不断地改进与创新，才能与时俱进地适应时代的需要。教学决不仅仅是教师好好教这么简单的事情。教学，教学，教师的教很重要，关键还是需要能转化成学生的学。如果没有实现学生把老师课堂上讲的内容转化为自身的理解，那教学就没有起到它应有的作用。既然教学是事关两个角色的活动，沟通和交流就非常重要。教学中，学生不仅仅是受众，他们都是有感情，有思想的个体。如果想要学生接受你说的内容，首先要让他先接受你这个人，最低要求也是不能反感。如果学生对老师有了抵触情绪，那老师讲得再怎么天花乱坠也起不到任何作用，甚至还会有反作用。要想搭建一个好的与学生心与心交流的平台，就应该放下老师的架子，形成一种师生平等，相互尊重，交流学习，相互促进的心态，对学生不再高高在上，而是尽量走近学生，对学生的问题耐心解答，鼓励学生独立思考，敢于质疑，敢于挑战，只有这样才能培养学生的学习能力，独立思考能力。

基金项目

2021 年度广东省教育厅省级课程思政示范项目(粤教高函[2021] 21 号) (DSZ2021009)，2022 年广东省大学生创新训练项目校级项目(项目名称：基于信息度量的决策树分类方法与应用)，2020 年五邑大学课程思政建设改革示范项目(邑大教[2021] 53 号)。

参考文献

[1] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2015.

[2] 华东师范大学数学科学学院. 数学分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[3] 张凯院, 徐仲. 数值代数[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2000.

[4] 杨曙光. “问题解决”教学法的探索与实践[J]. 大学数学, 2008(6): 38-42.

[5] Hmelo, C.E. and Ferrari, M. (1997) The Problem-Based Learning Tutorial: Cultivation Higher Order Thinking Skills. *Journal for the Education of the Gifted*, **20**, 401-422. https://doi.org/10.1177/016235329702000405

[6] 姜启源, 谢金星, 叶俊. 数学模型[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.

[7] 谭雪梅. 基于“金课”理念下高等数学的教学改革探索——以泰勒公式的教学为例[J]. 科技风, 2021(19): 27-28.

[8] 屈娜, 李应岐, 刘华. 探究型教学法在高等数学课堂教学中的实践——以“泰勒公式”为例[J]. 教育教学论坛, 2018(42): 197-199.

[9] 王路, 张华, 程翠林. 我国高等工程教育改革中成果导向教育的问题与对策[J]. 黑龙江教育学院学报, 2017, 36(7): 1-3.

[10] 李大潜. 将数学建模思想融入数学类主干课程[J]. 中国大学数学, 2006(1): 9-11.