Advances in Education 教育进展, 2023, 13(5), 2335-2341
Published Online May 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2023.135367

Hans汉斯

融入课程思政的线性代数教学设计

——以逆矩阵为例

李智群，李甲聪

北部湾大学理学院，广西 钦州

收稿日期：2023年4月5日；录用日期：2023年5月3日；发布日期：2023年5月10日

摘 要

在专业课程中融入课程思政是当前高校教学改革的重点和趋势。理工科的《线性代数》课程由于课程的高度抽象与课时的限制，如何有机的融入课程思政是当前众多教师面临的难题。逆矩阵是线性代数教学的一个重点和难点。本文以逆矩阵为例，基于逆矩阵的概念、判定、在求解矩阵方程和加密保密通信中的实际应用，探讨逆矩阵的课程思政实施教学设计，将课程思政贯穿教学的全过程。旨在培养学生树立正确的人生观、价值观，实现“知识传授”和“价值引领”的有机统一。

关键词

线性代数，逆矩阵，课程思政，应用，教学设计

Teaching Design of Linear Algebra Integrated with Ideological and Political Theory

—Taking Inverse Matrix as an Example

Zhiqun Li, Jiacong Li

College of Science, Beibu Gulf University, Qinzhou Guangxi

Received: Apr. 5th, 2023; accepted: May 3rd, 2023; published: May 10th, 2023

Abstract

It is the focus and trend of current college teaching reform to integrate ideological and political ideas into professional courses. Due to the high degree of abstraction and the limit of class hours,

文章引用: 李智群, 李甲聪. 融入课程思政的线性代数教学设计[J]. 教育进展, 2023, 13(5): 2335-2341.
DOI: 10.12677/ae.2023.135367

it is a difficult problem for many teachers to integrate the ideology and politics into the course of Linear Algebra. Inverse matrix is a key and difficult point in linear algebra teaching. This paper takes the inverse matrix as an example, based on the concept, judgment and practical application of inverse matrix in solving matrix equation and encrypting secret communication, discusses the implementation of ideological and political teaching design of inverse matrix, and runs through the whole process of teaching. It aims to cultivate students to establish correct outlook on life and values, and realize the organic unity of "knowledge imparting" and "value leading".

Keywords

Linear Algebra, Inverse Matrix, Curriculum Ideological and Political, Application, Teaching Design

1. 引言

课程思政是目前高校积极落实习近平总书记指示精神的实践探索，课程思政已成为全国高校课程改革的主流方向之一。高校课程思政要融入课堂教学建设，知识是载体，价值是目的，教师要把价值观渗透于知识传授之中[1]。

线性代数是理工类非数学类专业本科生学习的一门公共基础课程，具有内容丰富、概念抽象、公式繁杂、知识点之间联系紧密的特点，在授课内容上具有与“课程思政”有机融合的优势，其经典的思想和方法深刻体现了马克思主义辩证唯物主义世界观和方法论[2]。线性代数的发展史也充分展示了数学家们，开拓创新、追求真理的科学精神，展现了古今中外数学家们忠诚爱国、献身事业的高尚情怀[3]。线性代数的广泛应用又充分展示了数学之美，数学之强大，体现科教兴国的魅力。

矩阵的逆运算是矩阵的一种基本运算，逆矩阵是求解矩阵方程即线性方程组的重要工具。但是大部分学生对于逆矩阵的这个应用往往觉得抽象，难掌握，容易出错，究其原因是学生对利用逆矩阵解矩阵方程的思想理解不透彻。因此有比较多的关于探讨逆矩阵的教学设计的文献。融合课程思政的文献[1]以逆矩阵的应用——密信为例，探索“线性代数”教学中的课程思政建设；文献[2]探讨课程思政元素与逆矩阵定义、可逆充要条件、在求解矩阵方程和在保密通信中的应用知识结合，实现在教学中立德树人的任务；文献[3] [4] [5]主要从逆矩阵的概念、判定、解矩阵方程等方面探讨逆矩阵教学设计，侧重于教学方法、教学模式的教学设计；文献[6]为提高学生应用能力，从理论与实践两个角度探讨逆矩阵的教学设计，理论上是数学的思想方法设计，实践上是实际应用设计；文献[7]以逆矩阵为课例进行思政元素的初步挖掘，将教学案例、数学原理和军事故事融入逆矩阵课堂中，将课程内容、思想、结构有机结合在一起。

本文以逆矩阵为例，基于逆矩阵的概念、判定、在求解矩阵方程和加密保密通信中的实际应用，从数学思维、文化自信、应用三方面，详细探讨逆矩阵的课程思政实施教学设计。

2. 融合课程思政的教学设计

2.1. 创设问题情境引入

问题 1：数有加法、减法、乘法、除法这四种运算，对于矩阵已经定义了加法、减法和乘法运算，

那么矩阵是否有类似数的除法运算？

教师答：矩阵是没有除法的运算的。

问题 2：因为数有了除法运算，所以不为零的数 a 存在倒数 a^{-1}，a 与 a^{-1} 的具有性质：$a \cdot a^{-1} = 1$。矩阵虽然没有数的除法运算，但是有类似数的倒数，称为矩阵的逆矩阵，矩阵的逆矩阵是如何定义的？

思政融入点：矩阵的加法、减法和乘法运算与数的四则运算类比，强调了矩阵没有除法的运算，矩阵与数是有区别的，加强学生对矩阵运算的理解。再通过熟悉的不为零的数的倒数知识类比思想，导入矩阵的逆矩阵，使得抽象的逆矩阵问题具体化，激发学生用旧知探索逆矩阵定义新知的欲望，降低学生的学习难度。由旧知引出新知，渗透事物联系和转化的辩证思维。

2.2. 新课教学

2.2.1. 逆矩阵的概念、性质

定义 1 对于 n 阶方阵 A，若有一个 n 阶方阵 B，使得 $AB = BA = E$，则称矩阵 A 是可逆的，矩阵 B 为 A 的逆矩阵，简称逆阵。如果矩阵 A 可逆，那么 A 的逆矩阵是唯一的。记 A 的逆阵为 $A^{-1} = B$。

根据定义，让学生观察矩阵可逆有什么特点？强调方阵才可能有逆矩阵，零矩阵肯定不可逆。接下来让学生求特殊矩阵如单位矩阵和对角矩阵的逆矩阵。

思政融入点：通过逆矩阵的概念得到特殊矩阵的逆矩阵，揭示了一般到特殊的辩证思维；方阵要么可逆，要么不可逆，又揭示了否定与肯定的对立统一辩证思维的数学思想，加深学生对逆矩阵的概念理解。并由定义启发探究矩阵的逆运算作为一种新的运算，其具有的运算规律(性质)。

例 1：矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 是否可逆？如果可逆，请求出它的逆 A^{-1}。

解：设 $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$，则有

$$AB = \begin{pmatrix} b_{11} + 2b_{21} & b_{12} + 2b_{22} \\ 3b_{11} + 4b_{21} & 3b_{12} + 4b_{22} \end{pmatrix} = E$$

故有 $\begin{cases} b_{11} + 2b_{21} = 1 \\ b_{12} + 2b_{22} = 0 \\ 3b_{11} + 4b_{21} = 0 \\ 3b_{12} + 4b_{22} = 1 \end{cases}$

得 $b_{11} = -2, b_{12} = 1, b_{21} = \frac{3}{2}, b_{22} = -\frac{1}{2}$

所以 $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$，$A$ 可逆，$A^{-1} = B$

思政融入点：求逆矩阵的具体例子，体现由一般到具体的辩证思维，巩固学生对逆矩阵概念的理解。并且从例 1 探索出求 A^{-1} 的一种方法：待定系数法，此方法的优点是把逆矩阵求解转化为熟悉简单的线性方程组求解，把新知转化为旧知，学生对逆矩阵的求解更容易理解，缺点是如果矩阵的阶数比较大，就会导致线性方程组的计算量较大。由此凡事都有两面性，世界是一个矛盾的世界，我们要理性的对待，对待不好的事情不要太悲观，从而让学生树立正确的人生观和价值观。

2.2.2. 逆矩阵的判定及求解

问题 3：什么条件下的方阵是可逆的？

问题 4：如果矩阵 A 可逆，那 A 的逆矩阵 A^{-1} 怎么求？

通过例 1 和上问题，引出伴随矩阵，启发学生探究逆矩阵的判定及求解，在探究的过程中强调知识前后的联系，逆矩阵的求解与行列式的知识存在着密切的联系，抽象得出逆矩阵的判定及求解一般公式。

逆矩阵的判定：当 $|A| \neq 0$，则 A 可逆；$|A| = 0$，则 A 不可逆。引导学生 $|A|$ 的量变，就会导致矩阵 A 是否可逆的质变，量变和质变是辨证统一的数学思想。

为了更好地掌握逆矩阵 A^{-1} 的一般求解公式：$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^{*}$，下面以一个具体的例子展示，再一次揭示抽象与具体相互转化的思想。

例 2：求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵[8]。

解：由于 $|A| = 5 \neq 0$，故 A 可逆。

又 $A_{11} = 10$，$A_{12} = -5$，$A_{13} = -5$，$A_{21} = -5$，$A_{22} = 4$，$A_{23} = 3$

$A_{31} = 5$，$A_{32} = -3$，$A_{33} = -1$.

所以 $A^{*} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 5 \\ -5 & 4 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^{*} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10 & -5 & 5 \\ -5 & 4 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

课程思政融入点：伴随矩阵的元素是由矩阵元素的代数余子式构成，矩阵与其伴随矩阵的乘积运算应用行列式按行(列)展开定理，元素的代数余子式、行列式按行(列)展开定理都与行列式有关，说明前后知识是普遍联系的；矩阵行列式的值是否为 0，是判定矩阵可逆的重要手段，矩阵行列式的值是否为 0 这个量变导致出现矩阵是否可逆的质变；为了加深学生对抽象的逆矩阵求解公式的理解和应用，通过具体的例子分析。普遍联系、量变质变、抽象与具体的转化思想，可以培养学生的数学思维，提高学生的逻辑推理能力，加深学生对知识点理解。

2.2.3. 逆矩阵应用

1) 解矩阵方程

问题 5：同学们在中学如何求解一元一次方程？

让学生总结求解一元一次方程的方法。

问题 6：求第一类矩阵方程：$kX = B(k \neq 0)$。

问题 7：求第二类矩阵方程：$AX = B$。

思政融入点：再次通过熟悉的一元一次方程求解方法的类比思想，让学生思考逆矩阵是否在求解矩阵方程中有应用？激发学生用旧知探索新知的欲望，揭示由特殊到一般再由一般到特殊的认识规律，及提高学生的应用意识。

设矩阵方程 $AX = B$，A 可逆，求矩阵 X。

教师利用类比的教学方法，分析第二类矩阵方程的求解思想。先让学生观察该矩阵方程的特点：1) 与未知矩阵相乘的是矩阵；2) 含未知的式子在等号的一边，已知的在等号的另一边。接着通过提问讨论分析。

提问 1：这个方程是否与一元一次方程求解类似？形如 $ax = b$。

提问 2： $ax=b(a\neq 0)$ 的方程如何求解？

学生回答：系数 a 化为 1，方程两边乘以 a 的倒数。

提问 3：如何将矩阵方程 $AX=B$ 中的 A 化为 E？(强调不是数 1)

学生回答：方程两边乘 A^{-1} 。

提问 4：如何乘 A^{-1} ？A 的左边乘 A^{-1}，或是 A 的右边乘 A^{-1}，还是都可以？

课程思政融入点：问答设置充分展示矩阵方程与一元一次方程的类比思想，得到求解矩阵方程 $AX=B$ 的一般方法是方程两边乘 A^{-1} 把系数矩阵 A 化为 E。再详细分析方程两边左边乘 A^{-1} 和右边乘 A^{-1} 的现象，说明方程两边乘 A^{-1} 的本质：矩阵的乘法不满足交换律，矩阵的乘法必须按照一定的规则进行，教师可顺势引导学生行事做人要遵纪守法[2]。教学中强调透过现象看本质的数学思维。

因为矩阵的乘法不满足交换律，故第二类矩阵方程有下面三种类型：设矩阵 A、B 可逆，

① $AX=C$

② $XA=C$

③ $AXB=C$

思政融入点：总结上面每一种矩阵方程的求解，比较区别不同类型矩阵方程，得到不同类型矩阵方程乘以系数矩阵的逆矩阵的位置不同，更加深入理解提前学习的微课：矩阵方程—空位法，空位法就是系数矩阵的左边有空位，就方程两边左乘系数矩阵的逆；系数矩阵的右边有空位，就方程两边右乘系数矩阵的逆。空位法揭示了透过现象看本质的数学思维。由形象的“空位法”可引导告诉学生我们中华民族是礼仪之邦，谦恭礼让是中华民族的优良传统，我们要懂得谦让，懂礼貌，传承中国的优良传统，加深学生对中国礼仪的认识，提高个人的修养，增强文化自信。

实践是检验真理的唯一标准，列举分析两个具体矩阵方程的例子，

例 1：解矩阵方程 $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\\1&0\end{pmatrix}$。

解：令 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\\1&0\end{pmatrix}$

因为 $|A|=-1\neq 0$，故 A 可逆。

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&-2&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

所以 $X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}1&-1\\-3&2\\2&-1\end{pmatrix}$

例 2：设矩阵 $A=\begin{pmatrix}4&2&-1\\2&6&1\\1&-1&6\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&3&4\\-2&3&1\\-1&4&-2\end{pmatrix}$，满足 $AX=B+3X$ ，求 X[8]。

解：由 $AX=B+3X$ 可得，$(A-3E)X=B$ 。

又因为 $|A-3E|=\begin{vmatrix}1&2&-1\\2&3&1\\1&-1&3\end{vmatrix}=5\neq 0$，故 $A-3E$ 可逆。

$$\left(A-3E\right)^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}10 & -5 & 5\\ -5 & 4 & -3\\ -5 & 3 & -1\end{pmatrix}.$$

所以

$$X=\left(A-3E\right)^{-1}B=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}10 & -5 & 5\\ -5 & 4 & -3\\ -5 & 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ -2 & 3 & 1\\ -1 & 4 & -2\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}15 & 35 & 25\\ -10 & -15 & -10\\ -10 & -10 & -15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 7 & 5\\ -2 & -3 & -2\\ -2 & -2 & -3\end{pmatrix}.$$

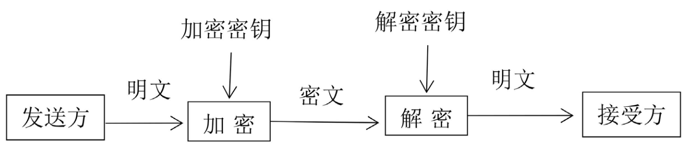
思政融入点：具体的解矩阵方程的例子，让学生更加形象地理解解矩阵方程的抽象方法，揭示抽象到具体的对立辩证思维。特别是例 2 反映了不管方程是一元一次方程的形式还是矩阵方程的形式，解方程的思想方法不变，即未知的在等式的一边，已知的在等式的另边，充分展现了形变质不变的对立统一的辩证数学思维。

2) 在加密保密通信中的应用

首先通过课件简要展示简要概述密码学的发展：古典密码、近代密码、现代密码。接着，列举具体案例。

例 3 在密码学中，经常使用的一种加密方式就是将明文(传递的信息)里面的每个字母与一个整数对应，使信息转化为密文(一系列的数字代码)。最后我们传输的是得到的密文。例如将 26 个英文字母分别对应 1 到 26 的数字，如明文“linear”，加密得到的密文为{12, 9, 14, 5. 1. 18}。为了让密文更难于破解，可以使用密钥对密文进一步加密[8]。

加密保密通信模型：



思政融入点：通过密码学的简单发展史及形象的加密保密通信模型，拓宽学生的视野，提高学生的学习兴趣；例子结合实际，又给学生展示了数学之美，数学之强大，提高学生的应用意识。

对例 3 进一步向学生提出问题思考：如果要想我们的密码更安全，不易破解，我们可以如何改进加密密钥矩阵？培养学生的创新精神和应用能力。

接下来播放军事密码的影片片段，比如《永不消失电波》，融入国家命运与科技发展的紧密联系，强调学习强国，科技强军[2]。布置以“秘密”为主题的课外作业，要求学生利用逆矩阵，根据专业的优势，把想对同学、朋友、父母的心里话进行加密，增强学生的应用能力。

2.2.4. 归纳总结，融入中国数学家华罗庚的事迹

归纳矩阵的逆矩阵计算方法，总结逆矩阵的应用。最后给学生介绍我国伟大的数学家华罗庚的一个重要结论——华罗庚恒等式，华罗庚恒等式在代数的发展过程中取到了相当重要的作用，作为嘉当－布劳尔－华定理证明的一个工具，大大简化了证明的过程[9]。有关逆矩阵的华罗庚恒等式为

$$A-\left(A^{-1}+\left(B^{-1}-A\right)^{-1}\right)^{-1}=ABA$$

其中 $AB=E, AB\neq BA$。

思政融入点：向学生介绍华罗庚的生平事迹，有助于实现激发学生的民族自豪感和责任感，追求真

理、勇攀科学高峰的责任感和使命感的教育，增强学生的文化自信，增强爱国主义意识。

3. 结语

本文以“逆矩阵”为例，研究逆矩阵的课程思政教学设计，从引入、问题、案例等设计过程都紧紧围绕课程思政，注重逆矩阵求解和解矩阵方程的数学思想，注重逆矩阵的实际应用。问题设计循序渐进，案例设计生动有趣，课程思政自然渗透到教学的每一个环节，提高了学生学习兴趣和主动性。通过本内容的学习学生不仅能够很好的理解、掌握知识，在求解矩阵方程方面的作业中，一个班中只有5%左右的学生方程两边乘逆矩阵的位置出错，而且获得对立统一等唯物主义观哲学思想，提高应用意识，能实现“知识传授”和“价值引领”的有机统一。

基金项目

2021年广西高等教育本科教学改革工程项目(2021JGA250)；2020年广西高等教育本科教学改革工程项目(2020JGB279)。

参考文献

[1] 崔冉冉. 《线性代数》课程思政教学设计的两个案例[J]. 数学学习与研究, 2021(20): 96-97.

[2] 张林丽, 张晶晶, 刘德兵, 原乃冬. 课程思政元素融入线性代数的教学研究——以逆矩阵为例[J]. 数学学习与研究, 2022(4): 21-23.

[3] 田贵月, 李晓玲. 关于矩阵求逆的教学设计[J]. 数学学习与研究, 2021(17): 12-13.

[4] 李菊雁, 边雪芬. 基于BOPPPS教学模式下的线性代数学微课教学设计——以逆矩阵为例[J]. 数学学习与研究, 2020(7): 14-15.

[5] 詹环, 陈平, 夏静. 基于建构主义的逆矩阵教学设计与实践[J]. 高教学刊, 2020(27): 119-121.

[6] 闫伟文, 白庆月. 逆矩阵的教学设计[J]. 大学, 2021(19): 68-71.

[7] 庄丽, 郝树艳, 顾丽娟. 大思政格局下线性代数思政课例教学设计——以逆矩阵为例[J]. 创新教育研究, 2021, 9(5): 1416-1420.

[8] 任北上, 等. 线性代数[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2020.

[9] 李国发. 华罗庚恒等式的新证明[J]. 曲靖师范学院学报, 2015, 34(3): 20-22.