Advances in Education 教育进展, 2023, 13(7), 4364-4368
Published Online July 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2023.137686

Hans汉斯

从高等数学中的几个有趣问题看大学课程的问题驱动化教学

王宜举，王春燕

曲阜师范大学管理学院，山东 日照

收稿日期：2023年6月10日；录用日期：2023年7月6日；发布日期：2023年7月17日

摘 要

教学是高等学校发展的生命线，它决定我国高等教育培养学生的质量。在我国高等教育日益规模化和教学内容不断深入的今天，如何提高教学质量是一个值得关注的问题。为此，本文通过高等数学中的几个有趣数学问题探讨大学课程的问题驱动化教学模式，以提高学生对难度大、内容抽象课程的学习兴趣，提高大学课程的教学质量。

关键词

高等数学，教学，问题驱动

A Study of Problem-Driven Teaching in University Courses from Several Interesting Problems in Advanced Mathematics

Yiju Wang, Chunyan Wang

School of Management Science, Qufu Normal University, Rizhao Shandong

Received: Jun. 10th, 2023; accepted: Jul. 6th, 2023; published: Jul. 17th, 2023

Abstract

Teaching is a lifeline of higher education of China. It determines the quality of talent training quality of higher education in China. For the increasing scale of higher education and deeper and dee-

文章引用: 王宜举, 王春燕. 从高等数学中的几个有趣问题看大学课程的问题驱动化教学[J]. 教育进展, 2023, 13(7): 4364-4368. DOI: 10.12677/ae.2023.137686

per of content of courses, how to improve the quality of teaching is a focus problem. Therefore, this paper discusses the problem-driven teaching technology of university courses through several interesting mathematical problems in advanced mathematics, so as to improve students' interest for difficult and abstract courses and improve the teaching quality of university courses.

Keywords

Advanced Mathematics, Teaching, Problem Driven

1. 引言

如果说科学可以改变世界，那么数学可以改变科学，因为数学是一切自然科学的基础。数学王国博大精深，奥妙无穷，每一个对数学有深入研究的人无不为其魅力着迷。然而数学并不好学，特别是高等数学。那么，如何才能提高高等数学[1]的学习兴趣和学习效率呢？

显然，要想学好高等数学，就必须深刻领会和掌握有关的数学概念。众所周知，每一个数学概念的产生几乎都要经历一场波澜壮阔的数学进化史，如极限、积分等。要想深入理解和掌握这些数学概念，就必须对其产生的根源和相关性质进行深刻剖析，通过问题提出概念和想法。只有这样才能把握高等数学的精髓和内涵，从而对其有深刻的理解，并能运用自如。

国内高校的高等数学教科书往往对高深的数学概念直接引入[2] [3]，接着就是相关的性质及应用等。如果完全按照教科书中提供的内容给学生讲解，很多内容就会捉摸不透。比如自然常数 e 是高等数学中一个特别重要的数，甚至超过圆周率。很多人在初次接触时会有很多疑惑：这么重要的一个数是怎么来的？它有什么具体的含义？只有把这个问题搞懂了，探讨这个常数的性质才能引起学生的兴趣。

实际上，自然常数 e 是从十七世纪中叶著名数学家雅各布·伯努利提出的一个经济学问题中引申出来的。考虑如下银行复利问题：一个人在银行存了 1 元钱，年利率是 100%。不考虑其他扣费，一年后的收益为：

$$1\times(1+100\%)=2\text{ 元。}$$

考虑到利息滚动，就将利息结算缩短时间定为半年，半年的利率为一年的一半。不考虑其他扣费，一年后的收益为：

$$1\times(1+50\%)^2=2.25\text{ 元。}$$

在此基础上，再将利息结算时间调整为一个月。月利率为 1/12。不考虑其他扣费，一年后的收益为：

$$1\times(1+1/12)^{12}=2.61\text{ 元。}$$

进一步，将利息结算时间调整为一周。一年 52 周，每周的利率为 1/52。不考虑其他扣费，一年后的收益为：

$$1\times(1+1/52)^{52}=2.69\text{ 元。}$$

由此，将一年分为 n 个等长的时间段，n 为利息复利次数，每一时间段的利息则为 $1/n$。那么一年后的收益为：

$$1\times(1+1/n)^n.$$

我们的问题是：如果复利次数 n 变得无限大，那么收益是否也变得无限大？这就是雅各布・伯努利提出的问题。他试图求解，但没有成功。半个世纪后，著名数学家欧拉成功地解决了这个问题。结论是：当 n 趋近于无穷大的时候，$1\times(1+1/n)^n$ 趋于一个常数，它等于 2.71828…。这是一个无限不循环小数。为方便，他用字母 e 表示。随着研究的深入，这个常数在数学和物理学中得到了广泛的应用，以至于后来成为最常用和最有用的数字之一，所以称作自然常数。

如在高等数学教学中，将自然常数 e 的上述产生过程对学生加以引荐，无疑在讨论自然常数性质和应用的时候，会极大提高学生的学习兴趣并加深对自然常数的理解。

基于此，我们借助高等数学中几个有趣的数学问题引入问题驱动化教学模式，以提高大学有关课程的教学水平。

2. 主要结论

问题驱动化教学是一种基于学生需求和问题的教学方法，其核心是以问题为引导，激发学生的自主学习和创新能力。该教学法强调教师提出现实生活中的问题，并引导学生自主寻找问题答案，培养学习者探究、发现和解决问题的能力。在这种教学法中，学生将会面临真实和具体的问题场景，并尝试去质询、研究、分析和解决这些问题。教师可以根据学生的兴趣点来选定问题，鼓励学生自主提出问题并进行讨论和解决。通过这种讨论和解决问题的过程，学生不仅掌握相关的知识，同时也增强了解决问题的能力和自信心。问题驱动化教学的实施可以激发学生的学习兴趣，促进批判性思维和创新力的开发。下面借助高等数学中几个有趣的数学问题引入问题驱动化教学模式，以提高大学有关课程的教学水平。

众所周知，实数分为有理数和无理数。有理数是指可以表示成分数或无穷循环小数的实数。自然，凡是不能表示成这种形式的实数称为无理数。但有理数这一名称不免叫人费解：有理数比别的数更有道理？事实上，这是翻译上的一个失误。有理数一词来自西方，在英语中是 rational number，rational 通常的含义是“理性的”。因此，中国数学家在翻译西方科学著作时，就把它译成了“有理数”。但这个词来源于古希腊，其英文词根为 ratio，就是比率的意思。所以这个词就是整数“比”的意思。与之相对，无理数就是不能精确表示为两个整数比的数，而并非没有道理。

有理数集是整数集的扩张，它包含整数和分数。显然，任何一个分数都可以化成循环小数。那么，一个无穷循环小数是否也能化成分数？答案是肯定的，因为中小学的数学教科书中就将有理数定义为无穷循环小数。那么，如何将一个无穷循环小数转化为分数？下面通过具体例子进行说明。

考虑无穷循环小数

$$0.\dot{6}1\dot{8}=0.618618618\cdots.$$

显然，它可以表示成等比级数的形式

$$0.\dot{6}1\dot{8}=0.618+0.618\times10^{-3}+0.618\times10^{-6}+\cdots.$$

根据等比级数的性质，

$$0.\dot{6}1\dot{8}=\frac{0.618}{1-10^{-3}}=\frac{618}{999}.$$

这就是无穷循环小数的分数表示。利用该证明过程，可得到一个很有趣的结论：$1=0.\dot{9}$ 。

由此，通过对有理数两种等价形式的相互转化问题的探讨，可以加深对有理数的理解，并得到一些有趣的结论。这无疑会提高学生的学习兴趣。

再考虑另一个问题。根据高等数学中极限的定义和性质，若数列$\{x_k\}$收敛，则该数列有界，且$\lim\limits_{k\to\infty}(x_{k+1}-x_k)=0$。如果课堂上对收敛数列的探讨仅限于此，那么学生对收敛数列的特征提取就不彻底，学生对收敛数列的概念就不是很清晰。为此，我们提出如下问题：如果数列$\{x_k\}$有界，且$\lim\limits_{k\to\infty}(x_{k+1}-x_k)=0$，它收敛吗？若不收敛，这样的数列有什么性质？

答案是：满足上述条件的数列$\{x_k\}$未必收敛，其聚点充满区间$\left[\liminf\limits_{k\to\infty} x_k,\limsup\limits_{k\to\infty} x_k\right]$。

反例一：基于级数$S_n^1=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\to\infty$构造如下数列：

$$a_1=1,\ a_2=1-\frac{1}{2},\ a_3=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\ a_4=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4},\ a_5=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5},\ \cdots$$

即从1开始，依次减去自然倒数列中的项直至其≤ 0，然后在此基础上依次加剩余的自然倒数列直至其≥ 1。由于S_n^1发散到∞，故该过程是可行的。

对数列$\{a_k\}$，由于$1/n\to 0$，故该数列有界且满足

$$\lim_{k\to\infty}(a_{k+1}-a_k)=0.$$

显然，数列$\{a_k\}$的聚点充满$[0,1]$区间。

下面的例子也是一个反例。考虑数列

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots$$

容易验证，其该数列满足

$$x_k\in(0,1],\quad |x_{k+1}-x_k|=\frac{1}{n}\to 0$$

其聚点充满$[0,1]$区间。

显然，在课堂教学中，通过上述反例，可以进一步加深学生对收敛数列的理解。

最后考虑连续函数的性质。根据定义，对连续函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$和任意的$x\in\mathbb{R}$和$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得

$$|f(y)-f(x)|\le\varepsilon,\quad \forall y\in N(x,\delta).$$

问题来了：设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$为连续函数，序列$\{x_k\}$，$\{y_k\}$满足

$$\lim_{k\to\infty}|x_k-y_k|=0.$$

是否有

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k)-f(y_k)=0\ ?$$

答案是否定的。反例如下：令$f(x)=x^2$，并取数列$x_k=k+\frac{1}{k}$，$y_k=k+\frac{2}{k}$。则函数f和点列$\{x_k\}$，$\{y_k\}$满足题设条件。但在$k\to\infty$时，

$$|f(x_k)-f(y_k)|=\left|\left(k+\frac{1}{k}\right)^2-\left(k+\frac{2}{k}\right)^2\right|=2+\frac{3}{k^2}\to 2.$$

若取 $f(x)=x^4$，则对于上述数列

$$\left|f(x_k)-f(y_k)\right|=\left|\left(k+\frac{1}{k}\right)^4-\left(k+\frac{2}{k}\right)^4\right|=4k^2+18+\frac{28}{k^2}+\frac{15}{k^4}\to\infty.$$

下面的例子说明，即便数列 $\{f(x_k)\},\{f(y_k)\}$ 都有界，仍不能保证

$$\|x_k-y_k\|\to 0\Rightarrow\left|f(x_k)-f(y_k)\right|\to 0.$$

反例如下：考虑二元函数 $f(x,y)=x^2-y^2$。令

$$S=\left\{(x,y)\mid x^2-y^2=1,x>0,y>0\right\},\quad L=\left\{(x,y)\mid y=x,x>0\right\}.$$

显然，集合 S 中的点构成双曲线的一部分，而 L 中的点构成一条射线。容易验证，L 是双曲线 S 的一条渐近线，即有

$$\lim_{x\to+\infty}\left\|(x,y)\big|_{(x,y)\in S}-(x,y)\big|_{(x,y)\in L}\right\|=\lim_{x\to+\infty}\left|\sqrt{x^2-1}-x\right|=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left|\sqrt{x^2-1}+x\right|}=0.$$

基于此，构造如下反例：取点列 $\{z_k\}$，其中 $z_k=(x_k,y_k)$ 满足

$$x_k^2-y_k^2=1,\quad x_k>0,y_k>0,x_k\to\infty$$

和点列 $\{z'_k\}$，其中 $z'_k=(x_k,y'_k)$ 满足 $y'_k=x_k$。根据前面的分析，

$$\lim_{k\to\infty}\|z_k-z'_k\|=\lim_{k\to\infty}\|(x_k,y_k)-(x_k,y'_k)\|=0.$$

但

$$f(x_k,y_k)-f(x_k,y_{k'})=1,\quad\forall k>0.$$

对该问题，如果点列 $\{x_k\}$ 有界，则结论成立，即

$$\|x_k-y_k\|\to 0\Rightarrow\left|f(x_k)-f(y_k)\right|\to 0.$$

事实上，如果点列 $\{x_k\}$ 有界，则由 $\|x_k-y_k\|\to 0$ 推知 $\{y_k\}$ 有界。从而点列 $\{x_k\}$ 和 $\{y_k\}$ 有相同的聚点。由函数的连续性知结论成立。

如果在高等数学的连续函数教学中，在介绍完连续函数的概念和有关性质后，如果适时跟进上述讨论，无疑会加深学生对连续函数性质的理解，提高其学习兴趣，进而提高高等数学的教学质量。

基金项目

202111~202311，依托“运筹 + 冷链”学科优势，构建物流管理专业“一核双翼”型课程体系，山东省本科生教革项目。

201912~202212，运筹学专业研究生问题驱动型教学模式探究——以《最优化方法》课程为例，山东省研究生教改项目(SDYJG19184)，重点培育，5 万。

参考文献

[1] 同济大学. 高等数学[M]. 第 7 版. 北京: 高等教育出版社, 2010.

[2] 王文静, 王福胜. 高师院校《最优化理论与方法》课程教学改革[J]. 教育现代化, 2013, 33(13): 54-56.

[3] 王刚, 王宜举. 《最优化理论与方法》课程教学改革与实践[J]. 教育进展, 2020, 10(6): 1001-1001.