Advances in Education 教育进展, 2023, 13(10), 7583-7586
Published Online October 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2023.13101178

Hans汉斯

高等代数概念教学的探索与实践

张　玲，郭上江，魏周超

中国地质大学(武汉)，数学与物理学院，湖北　武汉

收稿日期：2023年9月10日；录用日期：2023年10月10日；发布日期：2023年10月17日

摘　要

高等代数是数学专业的一门重要的基础核心课程，它具有概念多，抽象度高，难度大等特点。理解数学概念是学好高等代数的前提，因此，笔者结合近几年的教学经验，探索和总结了概念教学的一些具体方法和策略，充分利用已有的知识，引导学生建立和理解抽象的概念，发挥学生的主观能动性，提高课堂教学效果。

关键词

高等代数，概念教学，数域，逆矩阵，行列式

Exploration and Practice of Concept Teaching in Advanced Algebra

Ling Zhang, Shangjiang Guo, Zhouchao Wei

School of Mathematics and Physics, China University of Geosciences, Wuhan Hubei

Received: Sep. 10th, 2023; accepted: Oct. 10th, 2023; published: Oct. 17th, 2023

Abstract

Advanced algebra is an important basic core course of mathematics major. It has many concepts, high degree of abstraction and difficulty. Understanding mathematical concepts is the premise of learning advanced algebra well. Therefore, combining the teaching experience in recent years, the authors explore and summarize some specific methods and strategies of concept teaching, make full use of existing knowledge, guide students to establish and understand abstract concepts, give play to students' subjective initiative, and improve the classroom teaching effect.

Keywords

Advanced Algebra, Concept Teaching, Number Field, Inverse Matrix, Determinant

文章引用: 张玲, 郭上江, 魏周超. 高等代数概念教学的探索与实践[J]. 教育进展, 2023, 13(10): 7583-7586.
DOI: 10.12677/ae.2023.13101178

1. 引言

高等代数是高校数学专业的一门专业必修课程，是学习数学类后续课程和其它现代科学的必备基础，同时也是数学专业研究生入学考试的必修科目。该门课程具有概念多，抽象度高，论证量大，计算技巧性强等特点。对于大一学生而言，很难适应大学教材的体系和教学内容，主要原因在于中学阶段的学习模式是题海战术，过分依赖老师的指导和反复的做题，而对书上的概念并不清楚。在大学课堂上，常常出现新的概念还没完全理解，就需要作为依据推导出各种性质和理论，旧知识还没来得及消化，新知识就接踵而来。许多学生都反映学习压力大，题目不会做，进而排斥学习。因此，在笔者的教学与实践基础上，本文将着眼于概念教学的重要性和具体的实践方法，激发和引导学生的主动性，提高整体的教学效果。

2. 目前的教学现状和概念教学的重要性

在大学教学中，大学教师往往考虑学时有限的因素，通常只对概念做简单的介绍和必要的说明，反而花较多的时间对概念引出的性质和理论进行较详细地推导和证明。这种传统的教学模式使得学生对数学概念的理解不够深刻，且学生的抽象概括能力的培养收效甚微。长此以往会让学生认为定理和性质比概念更重要。事实上，正确理解数学概念，是掌握数学知识的基础。学生如果不能很好地理解数学概念，就无法真正地掌握相关的定理和性质，更谈不上利用所学知识去解决实际问题。然而，数学概念的形成是一个积累渐进的过程。因此，在概念教学中要遵循从具体到抽象，从感性认识到理性认识的原则。对于新的概念的理解，需要经过定义的表述，性质的推导，习题的运算或证明等一系列的学习过程才能达到领悟其本质属性的目标。

近年来，基于高等代数教学过程中普遍存在的问题，许多教师都意识到概念教学的重要性，并提出了一些有效的方法和策略。例如问题驱动式的概念教学[1]，根据教学目的设置一系列梯度问题，通过对这些问题进行分析和解决的过程中让学生体会相关的概念、定理、解决问题的思想，从而达到教学目的；类比法[2]是一种常见的教学方法，在已有的知识基础上设计一个类似的情景，启发学生通过类比学习新的概念，从而形成新的知识结构；利用概念之间的种属关系，进行分类性教学[3]；通过反思性教学[4]，让学生对所学概念有更深刻的理解。这些方法对于笔者的教学有很大的启发作用，下面将充分利用上述的教学方法，并结合笔者所在学校的专业培养目标，通过举例的方式提出了概念教学的一些具体实践方法。

3. 概念教学的实践方法

1) 充分利用学生已掌握的知识，经过比较、抽象、概括、举例、验证、巩固等一系列过程形成概念，加深对概念的理解。教师应当引导学生去发现问题，启发学生去解决问题。在此过程中，不仅让学生感受到高等代数这门课的实际意义，同时也培养了学生的探索能力和创新能力。

实例 1. 数域是高等代数中接触到的第一个抽象概念，该概念贯穿整个高等代数的内容中。因此如何让学生从高中接触到的一些数集转换到此概念并理解此概念引入的重要性，都十分重要。首先可以列举中学阶段常用的一些数集如有理数集$\mathbb{Q}$、实数集$\mathbb{R}$、复数集$\mathbb{C}$，让学生观察这些数集的共同特征。容易发现这些数集对于加、减、乘、除四则运算是封闭的，且这三个数集中都含有 0 和 1 等共同元素，由此

给出数域的概念，并把具有这些特点的数集称之为“数域”。然后让学生判断整数集是否是数域，并说出原因，这样就很容易让学生从中学熟悉的知识过渡到大学知识。接着构造如下的一些非常见的数集：

① $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)=\left\{a+b\sqrt{2}\,|\,a,b\in\mathbb{Q}\right\}$；

② $\mathbb{Z}\left(\sqrt{2}\right)=\left\{a+b\sqrt{2}\,|\,a,b\in\mathbb{Z}\right\}$；

③ $\mathrm{E}=\left\{\dfrac{a_0+a_1\pi+\cdots+a_n\pi^n}{b_0+b_1\pi+\cdots+b_m\pi^m}\,|\,a_i,b_j\in\mathbb{Z},n,m\in\mathbb{N}\right\}$。

让学生根据定义逐一地判别是否为数域。由这些例子，不难总结出数域的种类有无穷多个，从而引出如下的问题：在所有数域中，是否存在最大或者最小的数域？通过学生们的思考和讨论，总结出数域的基本性质：复数域是最大的数域，且有理数域是最小的数域，并让学生根据数域的定义，给出严格的数学证明。最后，强调高等代数的研究问题普遍都与数域有关，虽然有些对象如矩阵、向量都可以通过代数表示并进行普通数学上的四则运算进行计算，但是，与中学的数学计算已有一定的差别。要想对该门课程有更深的理解，就需要了解高等代数中哪些问题与数域有关，哪些问题与数域无关。这不仅加深对所学概念的理解和把握，而且利用无关性可以将一般数域上的问题扩张为复数域上的问题来考虑，从而使得问题变得更加简单，或者可以利用复数域上的一些重要结论和性质来解决问题[5]。

在此教学过程中，我们从学生已有的知识出发，通过直观性强的实际例子让学生直观感知概念，形成感性认识。然后遵循循序渐进的原则，运用从简单到复杂的例子探索概念的本质，从而提高学生的认知能力和判断能力。

2) 通过类比法来建立新的概念，强调新概念的本质特征，并探讨其外延。

实例 2. 逆矩阵是矩阵中一个重要的概念，在学习该概念之前，学生已经学习了矩阵的三种运算：加法、数乘、乘法。由中学阶段所学的四则运算，我们知道加法与减法，乘法与除法都是互逆的运算，如减法可以通过加法和负元来定义，除法可以通过乘法和倒数来定义。既然矩阵已经定义了加法、减法、乘法，很自然地提出是否有除法。逆矩阵的概念相当于数中的倒数，由实数的倒数定义：$\forall a\neq 0$，$\exists b\in\mathbb{R}$，使得 $ab=ba=1$，则称 b 为 a 的倒数，记为 a^{-1}。由此可类比建立逆矩阵的概念：对任一 n 阶方阵 A，若存在 n 阶方阵 B，使得 $AB=BA=E$，则称 B 为 A 的逆矩阵。此时实数中的“1”与矩阵中的单位矩阵“E”相对应。接着根据倒数的性质可向学生提出以下问题：定义中为何需要矩阵是方阵？逆矩阵是否唯一？逆矩阵存在的条件；如果逆矩阵存在，如何求逆矩阵。这些内容也构成了逆矩阵的一系列性质和结论。

在此过程中，让学生感受到逆矩阵并不是凭空产生的一个概念，而是一个顺理成章的自然产物，充分符合人类的认识规律，促进学生从一个高度发展到另一个新的高度，有利于掌握数学思想的脉络，提高数学逻辑思维能力。

3) 将几何方法和代数概念有机结合，赋予代数概念的几何意义，从而更好地理解和掌握概念。

实例 3. 在许多教材上，关于行列式的定义的引入，都是基于二阶和三阶行列式的表达式推广得到的，具体可参见教材[6]。在笔者的教学过程中，发现很多学生对于这种引入方式不是很理解，感觉很突兀。因此，接下来我们将利用几何方法来引入行列式的定义。首先从二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 入手，该行列式可以表示成 $\boldsymbol{OA}\cdot\boldsymbol{OB}$，其中，$\boldsymbol{OA}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{OB}=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$，即二阶行列式可理解为以 $\boldsymbol{OA}$、$\boldsymbol{OB}$ 为邻边的平行四边形的有向面积，记为 $\det\left(\boldsymbol{OA},\boldsymbol{OB}\right)$。特别地，当 $\boldsymbol{OA}$、$\boldsymbol{OB}$ 平行(共线)时，该行列式为 0，即平行四边形退化为线段，面积为 0。因此，二阶行列式对于平面上任意两个向量都有意义，函数值可以取遍全体实数，且行列式不为 0 的充要条件是 $\boldsymbol{OA}$、$\boldsymbol{OB}$ 不共线。

与二阶行列式类似，对于 $\mathbb{R}^3$ 中的任意三个向量 $\boldsymbol{OA}=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{OB}=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{OC}=\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{pmatrix}$，我们以 $\boldsymbol{OA}$、$\boldsymbol{OB}$、$\boldsymbol{OC}$ 为三条棱的平行六面体的有向体积 $\boldsymbol{OA}\cdot(\boldsymbol{OB}\times\boldsymbol{OC})$，记为 $\det(\boldsymbol{OA},\boldsymbol{OB},\boldsymbol{OC})$，来定义三阶行列式，即 $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\boldsymbol{OA}\cdot(\boldsymbol{OB}\times\boldsymbol{OC})=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{31}a_{22}a_{13}$。

基于二阶和三阶行列式的几何意义，我们很自然地可以推广到 n 阶行列式上。对于数域 P 上 n 个 n 维向量 $\alpha_i=(a_{1i},a_{2i},\cdots a_{ni})^{\mathrm{T}}$，定义 n 阶行列式为 $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\det(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，即 n 阶行列式可看作以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为棱的“n 维”有向体积。然后借助于基向量以及二阶、三阶行列式的性质可推导出 n 阶行列式相关性质，从而推导出具体表达式，其详细内容可参考文献[7]。

通过此方法，我们发现学生更容易接受行列式的概念，并对行列式的性质也更容易理解和掌握。事实上，在高等代数的学习过程中，数形结合的教学方法是一种普遍使用的教学方法，它不仅可以提高教学效果，而且开拓了学生的数学思维。

4. 结语

数学概念是高等代数的基石，且定理、公式、方法等都建立在概念的基础之上。教师在课堂教学中应针对概念本身的特性和抽象性，遵循数学发展规律和人类认知规律，采取适当的教学方法和手段，引导学生感受概念引入的必要性和合理性，挖掘概念的本质和来源，让学生能快速地理解和掌握相关的概念和理论，培养学生正确表述概念的习惯，提高学生的数学逻辑思维能力。

基金项目

本文受中国地质大学(武汉)本科生教学改革研究项目一般项目资助(编号：2022131)。

参考文献

[1] 赵立博. 《高等代数》教学中的问题驱动式概念教学[J]. 教育现代化, 2018, 5(13): 246-247.
[2] 高兴慧, 马乐荣. 类比法在高等代数教学中的应用[J]. 延安职业技术学院学报, 2009, 23(4): 77-78.
[3] 包健. 高等代数中的概念教学探讨[J]. 高等数学研究, 2007, 10(4): 17-20.
[4] 赖戈新, 杨慧娟. 高等代数概念教学策略初探[J]. 菏泽学院学报, 2013, 35(2): 92-94+97.
[5] 谢启鸿. 高等代数中若干概念在基域扩张下的不变性[J]. 大学数学, 2015, 31(6): 50-55.
[6] 王萼芳, 石生明. 高等代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2019.
[7] 李尚志. 从问题出发引入线性代数概念[J]. 高等数学研究, 2006, 9(6): 12-14.