Advances in Education 教育进展, 2023, 13(12), 9972-9978
Published Online December 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2023.13121541

导数概念导入的情境创设探究

古丽加拜科·加帕尔*，侯传燕#

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2023年11月11日；录用日期：2023年12月8日；发布日期：2023年12月18日

摘 要

导数是微积分最基础的核心概念，教师应引导学生观察感知实际情境和具体实例使学生体会导数与变化率的关系，在对实际背景问题研究的基础上，抽象概括出导数的概念，用数学符号给予表征，这是一个具体－抽象－具体的过程，是形象思维到抽象思维的过渡，渗透了从特殊到一般的数学思想。因此，通过情境创设来帮助学生理解导数的本质和意义显得尤为重要。本文将探讨如何创设有效的教学情境，导入导数概念，帮助学生更好地理解和掌握导数。

关键词

概念教学，变化率，导数概念导入，情境创设

Study on the Situation Creation of Derivative Concept Introduction

Gulijiabaike·Jiapaer*, Chuanyan Hou#

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Nov. 11th, 2023; accepted: Dec. 8th, 2023; published: Dec. 18th, 2023

Abstract

Derivative is the most basic core concept of calculus, teachers should guide students to observe and perceive the actual situation and concrete examples so that students understand the relationship between the derivative and the rate of change, on the basis of the research of actual background problems, abstract summary of the concept of derivative, with mathematical symbols to give representation, this is a concrete-abstract-concrete process, which is the transition from

*第一作者。
#通讯作者。

文章引用: 古丽加拜科·加帕尔, 侯传燕. 导数概念导入的情境创设探究[J]. 教育进展, 2023, 13(12): 9972-9978.
DOI: 10.12677/ae.2023.13121541

image thinking to abstract thinking, penetrates from the special to the general mathematical thought. Therefore, it is particularly important to help students understand the essence and meaning of derivatives through situation creation. This paper will discuss how to create an effective teaching situation and introduce the concept of derivatives to help students better understand and master derivatives.

Keywords

Concept Teaching, Rate of Change, Derivative Concept Introduction, Situation Creation

1. 引言

概念教学是课堂教学的重中之重，数学概念及其学习在数学学习中具有十分重要的地位。《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》(以下简称“新课标”)对导数概念教学的要求是通过实例分析，经历由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程，了解导数概念的实际背景，知道导数是关于瞬时变化率的数学表达，体会导数的内涵与思想，体会极限思想。新课标明确提出，创设合适的教学情境，提出合适的数学问题，引导学生能在情境中抽象出数学概念，积累从具体到抽象的活动经验[1]。

在教学中要引导学生经历从具体实例抽象出数学概念的过程，在初步运用中逐步理解概念的本质[2]。导数概念反映的是一个变量相对另一个变量变化时的即时变化率，这体现在许多实际情境之中[3]。为了使学生更好地理解和掌握导数概念，教师需要创设适当的情境，引导学生逐步导入导数的概念。基于情境创设的导数概念的导入，应该根据导数教学内容的特点，学生已有的知识、经验和数学思维发展的实际水平，把握设置数学情境。

2. 导数概念的重要性

导数是微积分学之基础，作为数学知识之交汇点，它联结起了函数、方程、向量、数列、不等式、几何等内容，是数学之核心概念，为研究函数之性态、极值与最值、单调性等问题带来了极大之方便。也是研究函数各种性态之有效工具，如变化率问题、运动速度问题、利润最大用料最省等实际问题。给我们提供了一个广阔之数学视野，用变化和运动之观点看待数学世界和现实世界[4]。

导数概念蕴含微积分的基本思想——无限逼近思想、极限思想和“以直代曲”思想。导数定量地刻画了函数的局部变化，是研究函数性质的基本工具。导数是为了描述运动质点的速度和曲线的切线斜率等问题而产生的，更一般地说，导数是描述函数在某一点处“变化快慢”的一个量[5]。

3. 情境创设的意义

对于初次接触导数概念的学生来说，导数的概念往往比较抽象，难以理解，如何理解这一抽象概念并把它应用到实际问题中，是一个具有挑战性的任务。抽象数学问题的发现和提出常常依赖于某些直观背景和情境，有了数学情境做支撑，并与学习内容建立自然、实质性的联系，使数学教学成为教师引导下学生进行的主动探索过程。

导数概念导入的情境创设旨在通过具体、生动的实际情境，将抽象的数学概念转化为易于理解的知

识，帮助学生深刻理解导数的本质和应用，培养学生的数学思维和解决实际问题的能力。

4. 创设情境，引入导数概念

4.1. 借助数学史和数学文化，为引入导数概念作铺垫

数学史和数学文化是数学学科的重要组成部分，对于导数概念导入的情境创设也有很大的帮助。通过介绍导数的发展历程和数学家的故事，可以增加学生对导数的好奇心和兴趣。

案例一：在学习导数概念的前一节课，教师可以布置一项研究性学习作业：微积分的数学史探究。例如，可以介绍法国数学家莱布尼茨在创建微积分学时的思考过程和所遇到的困难，以及英国数学家牛顿在创建微积分学过程中的轶事。

作业要求：搜集、阅读与“微积分创立与发展”相关的资料，主要涉及微积分创立与发展的过程、重要人物、历史上发生的关键事件和它对世界文明的贡献等，然后针对话题，分组讨论，同学之间进行交流，最后教师评价。

设计意图：本案例通过学生自主上网查询搜集相关的微积分史料，激发学生渴求新知、探求未知的欲望，让学生自然而欣悦地跨入导数概念学习的情境中，为后续导数概念的理解和应用奠定基础。通过这种方式，可以帮助学生更加全面地了解导数概念的历史背景和文化内涵，提高学习效果。

4.2. 从实际问题出发引入导数概念

导数概念本身比较抽象，但它的实际应用非常广泛。因此，在导入导数概念时，可以从实际问题出发，借助实际生活中的例子来导入，通过具体案例来帮助学生理解导数的应用。

案例二：高台跳水运动员的速度

在 10 m 高台跳水运动中，某运动员相对于水面的高度 h (单位：m)与她起跳后的时间 t (单位：s)存在如下函数关系：

$$h(t) = -4.9t^2 + 6.5t + 10$$

问题 1：请同学们根据所学过的物理知识，求她在落水前某一时刻，如 $t = 1\,\mathrm{s}$ 时的速度，并思考所得结果的物理意义是什么？

预设活动：1) 学生会根据物理学中的知识，1 秒“附近”的平均速度来近似代替 1 秒时的速度。为方便起见，我们约定，把“从时刻 t_1 到时刻 t_2 这段时间”简称为“时段 $[t_1,t_2]$”。那么，学生利用 $\bar{v} = \dfrac{h(t_2)-h(t_1)}{t_2-t_1}$，分别算出 $[0,1]$，$[1,2]$，$[0.5,1]$，$[1,1.5]$ 这些时段内运动员的平均速度，如下表 1：

Table 1. Average speed of athletes in 4 time periods
表 1. 运动员在 4 个时间段内的平均速度

$[t_1,t_2]$	$[0,1]$	$[1,2]$	$[0.5,1]$	$[1,1.5]$
$\bar{v}_i\,(i=1,2,3,4)$ (m/s)	$\bar{v}_1 = 1.60$	$\bar{v}_2 = -8.2$	$\bar{v}_3 = -0.85$	$\bar{v}_4 = -5.75$

2) 学生结合物理学知识不难解释上述 4 个平均速度的物理意义。如，$\bar{v}_1 = 1.60(\mathrm{m/s})$ 表示运动员在 $[0,1]$ 秒这段时间内上升了 1.60 米；$\bar{v}_2 = -8.2(\mathrm{m/s})$ 表示运动员在 $[1,2]$ 秒这段时间内下降了 8.20 米。

问题 2：能将问题 1 一般化吗？也就是，任意时间段的平均变化率怎么求？

预设活动：教师引导学生给出，一般地，对于函数 $y = f(x)$ 称 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ 为函数 $f(x)$ 从 x_1 到

x_2 的平均变化率，其中，习惯上用 Δx 表示 x_2-x_1，即 $\Delta x=x_2-x_1$ 它表示相对于 x_1 的一个“增量”，也可以写成 $x_1+\Delta x=x_2$；类似地，

$$\Delta y=\Delta f=f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)=f\left(x_1+\Delta x\right)-f\left(x_1\right),$$

则平均变化率

$$\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}$$

可表示为

$$\frac{f\left(x_1+\Delta x\right)-f\left(x_1\right)}{\Delta x} \text{或} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

即

$$\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}=\frac{f\left(x_1+\Delta x\right)-f\left(x_1\right)}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

设计意图：通过问题 1 和问题 2，复习学生已学过的的物理知识平均速度的同时给出数学中函数值关于自变量的平均变化率：假设自变量 x 从 x_1 变到 x_2，而随着自变量的变化，函数值 $f(x)$ 从 $f\left(x_1\right)$ 变到 $f\left(x_2\right)$，这个时候比值 $\dfrac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}$ 就是变化率。这是这节课的起点，也是基础部分。

问题 3：计算 $\left[0,\dfrac{65}{49}\right]$ 这段时间内的平均速度。你发现了什么问题？

预设活动：学生算出

$$\bar{v}=\frac{h\left(t_2\right)-h\left(t_1\right)}{t_2-t_1}=\frac{h\left(\frac{65}{49}\right)-h(0)}{\frac{65}{49}}=0,$$

计算后得运动员在 $\left[0,\dfrac{65}{49}\right]$ 这段时间里的平均速度为 0，其物理意义是位移为零。

问题 4：为什么平均速度为 0，运动员却并不是静止的？你认为用平均速度描述运动员的运动状态合适吗？能用某段时间内的平均速度 $\bar{v}$ 精确地描述其运动状态吗？如果不能，那该怎么办呢？

预设活动：教师引导学生总结出运动员在这段时间里是在运动的，显然不是静止的，上述问题的答案说明用平均速度不能准确地描述运动物体的运动状态。因此我们为了更准确的描述运动员的运动状态，让这个时间间隔再小一点，再小一点，……，不断缩小时间间隔，用平均速度逐渐逼近瞬时速度。

设计意图：通过问题 3，让学生自然产生新的质疑：运动员在 $\left[0,\dfrac{65}{49}\right]$ 这段时间内平均速度为 0，运动员却并不是静止的？引起学生的好奇和认知冲突，求知欲被无形激发，学生就会带着问题走进课堂。在问题 3 的基础上，通过问题 4，使学生意识到平均速度不能充分描述在某段时间内运动员的运动状态，要想更精确地刻画，研究瞬时速度是必然的。

问题 5：那么如何求跳水运动员在 $t=1\,\mathrm{s}$ 时的瞬时速度？它与平均速度有什么关系？组织学生分组讨论。

预设活动：受到问题 4 的启发，在求 $t=1\,\mathrm{s}$ 时的瞬时速度时学生尝试不断缩小时间间隔，有一组同学算出：

Table 2. The average speed of athletes when time t approaches 1 from directions greater than 1 and less than 1 respectively
表 2. 时间 t 分别从大于 1 和小于 1 的方向趋近于 1 时运动员的平均速度

当 $\Delta t>0$ 时		
$[1,1+\Delta t]$	Δt	平均速度 $\overline{v}$
$[1,1.01]$	0.01	−3.349
$[1,1.001]$	0.001	−3.3049
$[1,1.0001]$	0.0001	−3.30049
$[1,1.00001]$	0.00001	−3.300049
$[1,1.000001]$	0.000001	−3.3000049
当 $\Delta t<0$ 时		
$[1+\Delta t,1]$	Δt	平均速度 $\overline{v}$
$[0.99,1]$	−0.01	−3.251
$[0.999,1]$	−0.001	−3.2951
$[0.9999,1]$	−0.0001	−3.29951
$[0.99999,1]$	−0.00001	−3.299951
$[0.999999,1]$	−0.000001	−3.2999951

展示上述学生算出的表 2，让其他学生类似的算出其他时刻，比如 $t=1.5\,\text{s}$，$t=2\,\text{s}$ 时的平均速度。

问题 6：观察数据，思考当 Δt 趋近于 0 时，平均速度 $\overline{v}$ 有什么样的变化趋势？

预设活动：学生结合数据结果，在教师的引导下说出“不断缩小时间间隔，即当 Δt 趋近于 0 时，也就是时间 t 无论是从小于 1 的方向，还是从大于 1 的方向趋近于 1 时，该运动员的平均速度 $\overline{v}$ 都趋近于一个确定的值−3.3”，结合物理知识，当 Δt 趋近于 0 时，平均速度趋近于瞬时速度，也就是说，当 $t=1\,\text{s}$，Δt 趋近于 0 时，平均速度趋近于的定值−3.3 就是 $t=1\,\text{s}$ 时的瞬时速度，即在第 1 s 时，该运动员的瞬时变化率为−3.3，说明在第 1 s 附近，该运动员大约以 3.3 m/s 的速度下降。瞬时速度可以认为是在时间 $t=1$ 时刻附近区间，当 Δt 趋近于 0 时，平均速度 $\overline{v}$ 无限趋近于的那个确定的值。

为了表述方便，我们用 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{h(1+\Delta t)-h(1)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(-4.9\Delta t-3.3)=-3.3$ 表述“当 $t=1,\Delta t\to 0$ 时，平均速度 $\overline{v}$ 趋近于确定值−3.3”。这个定值也称为 $\dfrac{h(1+\Delta t)-h(1)}{\Delta t}$ 当 $\Delta t\to 0$ 时的极限。

设计意图：将问题具体化，从计算 $t=1\,\text{s}$ 附近的平均速度入手，让学生经历发现规律的过程，寻求解决瞬时速度的思路，从而从平均变化率过渡到瞬时变化率，体会瞬时变化率的含义。

问题 7：在任意时刻 $x=x_0$ 的瞬时速度怎样表示？

预设活动：带领学生逐步过渡数学符号语言，同时引导学生从特殊到一般，获得：

函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

我们称它为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数，记作 $f'(x_0)$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

设计意图：由语句过渡到数学符号语言，由特殊点上升到任意点 $t=t_0$ 时瞬时速度的表示，获得更一般的数学符号表示。

平均变化率和瞬时变化率是为导数的引入作铺垫的过渡性概念，平均变化率是刻画函数在某一区间内的平均变化状态；瞬时变化率是刻画函数在某处的变化状态，它是平均变化率的极限值，也就是“函数的导数”。

通过这些实际问题的解决，可以引导学生从实际问题中抽象出导数的概念，逐步引导学生进入导数的概念，更好地理解导数的实际应用。

4.3. 借助物理问题导入导数的概念

导数的概念还可以从物理学科的角度进行导入。在物理学中，许多概念与导数密切相关，教师可以引导学生思考如何描述物体的运动状态和变化趋势等问题，从而逐步导入导数的概念。

案例三：一汽车从 A 地出发到达 B 地，由于车辆多，交通拥堵，路况复杂等原因，汽车走一会停一会，好不容易到 B 地，请你用数学方法描述一下汽车从 A 地到达 B 地状况。

问题 1：因为道路不畅通，所以你在不同时段行驶的速度是不同的。假设你在时刻 t_1 到了 s_1 的位置，在时刻 t_2 到了 s_2 的位置，那么你在时刻 t_1 到时刻 t_2 的这个时间段里，行驶的速度是多少？

问题 2：汽车在任意时刻的速度有没有发生变化？假如时间间隔很短，速度的变化会不会很大？如何描述在某个很短的时间间隔内汽车的平均速度？

预设活动：一开始汽车是静止的，然后开始发动汽车，汽车行走，从静止状态到开始行走，这中间是有加速度的，速度是在变化的，我们可以用 $\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$ 得到时刻 t_1 到时刻 t_2 的平均速度，但这变化不是突然的，是渐渐变化的，也就是说当时间间隔很短时，速度变化不会很大，比如 1 秒到 1.1 秒这个时间段之间，速度变化不会很大，那么就意味着当 t_1 和 t_2 的时间很接近时，在这个小区间上速度的变化就很小，近似为 t_1 时刻的速度，这时就是瞬时速度，或者说是瞬时变化率。

为了表述方便，函数 $s=s(t)$ 从时刻 t_1 到时刻 t_2 的平均变化率当 $t_2\to t_1$ 时的“值” $\lim_{t_2\to t_1}\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$ 称为函数 $s=s(t)$ 在 $t=t_1$ 处的瞬时变化率，此瞬时变化率我们称为函数 $s=s(t)$ 在 $t=t_1$ 处的导数，记为 $s'(t_1)$。

一般地，函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

设计意图：通过问题 1，揭示什么是“变化率”，即在某个时间段的速度叫变化率。借助问题 2 引出平均变化率和瞬时变化率的含义。这两个数学概念是这节课的重点，需要学生的理解和掌握。

4.4. 借助经济情境，熟悉导数概念的内涵

在经济学中，导数也具有实际意义，经济学家在研究经济问题时发现了经济领域也存在大量的变化率问题，为了充分利用数学工具，解决经济领域的变化率问题，提出了“边际”的概念，并定义“边际”是经济函数的一阶导数。通过引入经济学中的例子，可以帮助学生理解导数的经济含义。

案例四：设某工厂生产 x 件产品的成本为

$$C(x) = 2000 + 100x - 0.1x^2 \left(\text{元}\right)$$

函数 $C(x)$ 称为成本函数，成本函数的导数 $C'(x)$ 在经济学中称为边际成本，试求：

1) 当生产 100 件产品时的边际成本；

2) 生产第 101 件产品的成本，并与 1)中求得的边际成本作比较，说明边际成本的实际意义。

预设活动：成本 C 对于产量 x 的变化率叫边际成本，那么

$$C'(x) = 100 - 0.2x$$
$$C'(100) = 80\left(\text{元/件}\right)$$

是边际成本在 100 这个点处的导数值。那么生产第 101 件产品的成本为

$$C(101) = 11079.9\left(\text{元/件}\right)$$
$$C(100) = 11000\left(\text{元/件}\right)$$
$$\Delta C = C(101) - C(100) = 79.9\left(\text{元/件}\right)$$

从所得结果可知，生产边际成本在 100 处的值与生产第 101 件产品的成本近似相等，也就是说明边际成本 $C'(x)$ 近似等于生产下一件产品所花费的成本即当产量达到 x 单位时，再生产一个单位产品所花费的成本。

设计意图：了解边际成本的一般经济含义为当产量为 x 个单位处于某一水平有微小变化时成本的瞬时变化率，可以表述为：产量为 x 个单位时，再增加(减少)生产一个单位时成本的增加(减少)量。

5. 总结

总之，导数的概念可以从实际问题、物理问题和经济问题等多个角度进行导入。导数概念导入的情境创设是帮助学生深刻理解导数本质和意义的有效方法之一。从不同的角度，创设不同的情境，由浅入深、由易到难，引导学生逐步深入了解导数的概念，这个过程中培养学生的数学思维和解决实际问题的能力。教师在教学过程中应该注重情境创设的实际效果和应用价值，不断探索创新的方法和手段，更好地发挥导数概念导入在数学教学中的作用。教师需要结合学生的实际情况和教学内容，选择适当的情境和教学方法，帮助学生更好地理解和掌握导数的概念和应用。

基金项目

新疆维吾尔自治区一流本科课程(空间解析几何)建设；新疆师范大学本科教学质量工程建设教学研究与改革项目(SDJG2022-17)；新疆师范大学数学与应用数学专业基础课程群教学团队。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022 年版) [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022.

[2] 王利庆. 数学概念形成的问题情境创设策略[J]. 数学通报, 2007(6): 39-42.

[3] 毕秀国, 宋福贵, 董晓梅, 等. 基于情境的数学启发式教学在经济类高等数学教学中的实践与探索[J]. 数学教育学报, 2010, 19(3): 93-96.

[4] 曹二磊. 高校预科生的数学核心概念理解水平及其教学策略研究[D]: [博士学位论文]. 西安: 陕西师范大学, 2016.

[5] 王芝平. “变化率与导数”教学设计[J]. 数学通报, 2013, 52(7): 33-36+39.