

以问题解决知识推理路径为核心的问题再设计 ——以初中数学为例

崔馨怡, 何文涛

浙江师范大学教育学院, 浙江 金华

收稿日期: 2023年11月9日; 录用日期: 2023年12月7日; 发布日期: 2023年12月14日

摘要

高质量教学问题能促使学生在问题解决的过程中不断地思考和分析,综合运用已有的知识进行知识建构,对教师教学和学生思维能力发展皆有所裨益。问题设计是形成高质量问题的基础,但创设新问题具有一定的门槛,对一线教师来说难度大,效率低。为此,本文构建了以问题解决知识推理路径为核心的问题再设计流程,并以初中数学几何部分内容为例进行实操,旨在为教师提供一种能根据实际学情和教学目标知识点对原有问题再设计生成符合教学需要、具有针对性的高质量问题的方法指导。

关键词

问题设计, 知识推理路径图, 知识建模图, 数学问题

Problem Redesign Centered on Reasoning Paths of Problem Solving Knowledge —Taking Junior High School Mathematics as an Example

Xinyi Cui, Wentao He

College of Education, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Nov. 9th, 2023; accepted: Dec. 7th, 2023; published: Dec. 14th, 2023

Abstract

High-quality teaching problems can motivate students to think and analyze continuously in the process of problem solving and construct knowledge by integrating and applying existing knowledge, which is beneficial to both teachers' teaching and the development of students' thinking ability. Problem design is the basis for the formation of high-quality problems, but the creation of

new problems has a certain threshold, which is difficult and inefficient for front-line teachers. For this reason, the paper constructs a problem redesign process centered on the reasoning path of problem solving knowledge, and takes the content of junior high school mathematics geometry as an example for actual practice, aiming to provide teachers with a methodological guide to redesign the original problems according to the actual learning situation and the knowledge of the teaching objectives and generate high-quality problems that meet the needs of teaching and learning and have a targeted approach.

Keywords

Problem Design, Knowledge Reasoning Pathway Maps, Knowledge Modeling Maps, Mathematical Problems

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access



1. 引言

随着课程教育改革的不断推进,问题解决能力已成为新时代人才所必备的核心素养之一。问题具有极大的教育价值,其质量的高低是影响教学效果的重要因素。在教学中必须以高质量的问题为载体来培养学生的问题意识、创造性思维和问题解决能力。因此,教师要注重教学过程中问题的设计与应用。在问题设计领域,部分一线教师和命题专家根据实际教学经验总结出了针对特定学科的问题设计原则[1][2]、策略[3][4][5]。理论指导原则具有高度的抽象性,难以指导实际操作。策略也只能从特定的角度提供问题设计的方法,具有限制性,无法形成一套普适的问题设计流程。由此可见,问题设计具有一定门槛,即便是命题专家也需依赖丰富的教学经验和扎实的学科知识来打磨与设计问题。实际上,教师往往是通过网站或习题册等途径直接选取与教学内容相关的问题,而重新设计新问题存在难度大、效率低的困境。为此,研究通过总结已有的问题设计实例并挖掘命题专家丰富问题设计经验背后的理性因素,尝试构建一个完整的、可操作性强的对已有问题进行再设计生成新问题的设计流程。借此设计流程,教师可掌握根据实际学情和教学目标进行问题再设计的基本方法,设计出符合教学实际需要的高质量问题,以促进学生知识的建构与高阶思维的发展,同时提升自身的素养和教学教研能力。

2. 问题解决的知识推理路径

问题解决的知识推理路径表达的是问题求解过程中的知识运用和推理情况。知识推理路径图则是依据一定的绘制规范,将问题的初始状态、问题解决过程中运用的知识点、问题的解决路径及其终止状态,以拓扑网络图的方式呈现出来,进而实现对问题的客观表征[6]。对问题进行表征即对问题进行理解和分析,相比于文字形式的解题答案,这种可视化表征不仅更有利于清晰地呈现问题的解决过程,还能显示出推理出每个关键步骤所依据的知识点,有助于问题设计者快速理解与分析问题,把握解题的关键点和该题目考察的知识点。

2.1. 知识推理路径图的绘制规范

知识推理路径图由三类结点与三类连接线组成。其中,“”表示问题的情景结点,代表问题的已知条件、推理或计算产生的中间条件和求解出最终答案;“”表示操作子结点,代表推理出下一步

依据的知识点或方法策略; “○”表示概念结点, 是包含在情境结点中的概念类知识; “→”表示推理的方向, 用于连接各情境结点; “—▷—”用于连接某推理步骤所依据的操作子结点; “—”用于连接概念结点与情境结点。

2.2. 知识推理路径图的绘制步骤

绘制知识推理路径图时需要明确问题解决过程中每个步骤以及步骤之间所依据的知识点。具体的绘制步骤如下: 1) 分析问题情境, 确定初始条件, 绘制问题初始情境结点。2) 明确推理过程, 分析并绘制推理出中间情境结点以及推理步骤间依据的操作子结点, 补充关键概念结点。3) 检查绘制的知识推理图, 情境结点之间的每一步的推理是否科学合理, 所依据的操作子结点是否准确。

3. 以问题解决知识推理路径为核心的数学问题再设计

不同特征的问题对应的问题设计方法不同, 文章设计的问题具有情境丰富且表述清晰、问题解决路径明晰、问题解决需要一定的知识基础、问题蕴含教学目标知识点的特点。因此, 在对此类问题进行再设计时要关注学科知识与问题的对应关系。杨开城等人提出了一种问题设计技术, 其设计思路为: 通过知识网络图找出与目标知识点相联系的已学知识点, 找到已学知识点的问题原型, 画出问题原型相应的知识关联图或知识推理路径, 通过对其进行相应的变换, 设计出包含目标知识点的问题[7]。根据上述限定的问题特征, 结合此设计思路, 可以提取出问题再设计的主要步骤有: 绘制知识建模图、选定问题原型、绘制知识推理路径图、对知识推理路径图进行 ADM 操作、依据新知识推理路径图生成新问题五个步骤, 每个步骤都为教师进行问题再设计给出了清晰的指引, 具体的问题设计流程如图 1 所示。

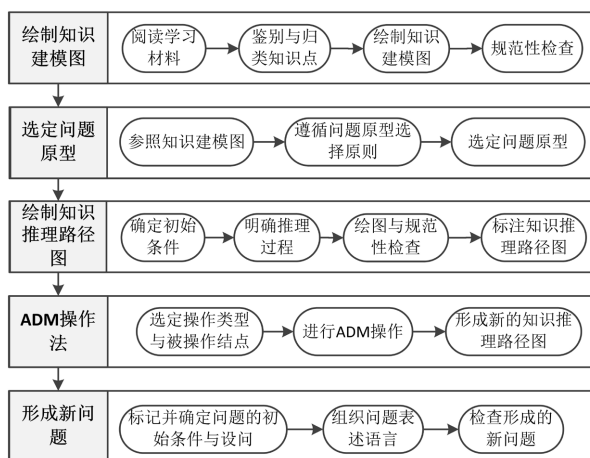


Figure 1. Problem design flowchart

图 1. 问题设计流程图

3.1. 绘制知识建模图

知识建模是一种内容分析方法, 能以网络图的形态清晰地表示知识点的类别, 以及各知识点之间的联系[8]。知识建模图的绘制步骤: 1) 阅读教材或学习材料, 鉴别并正确归类知识点。2) 分析知识点之间的联系, 将各个独立知识点相连完成图形绘制。3) 检查并确保知识网络图的规范性。以知识建模图为依据进行问题设计, 教师可快速厘清知识之间的联系, 围绕着目标知识点以及与它相联系的先决知识点设计问题, 保证问题设计的理性, 形成知识网络以及提升对学科知识的理解水平。文章以初中数学中直角三角形部分知识点为例绘制的知识建模图如图 2 所示。

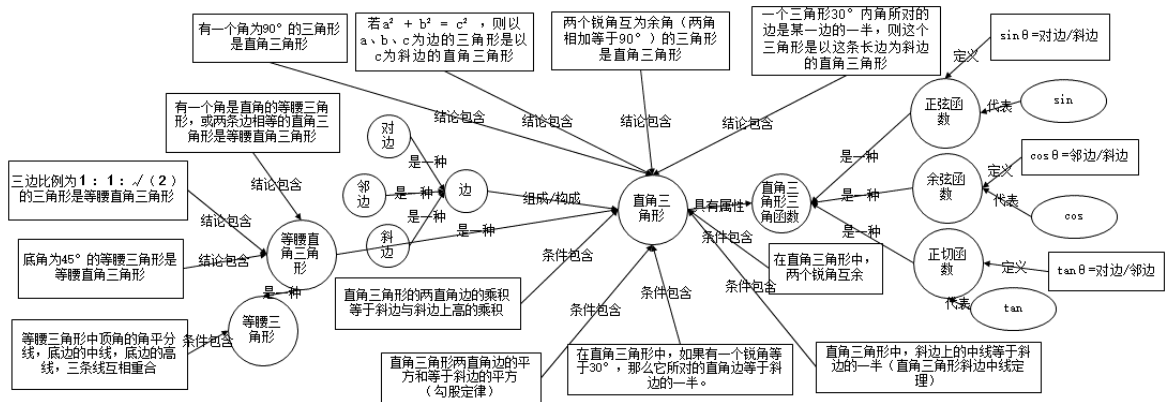


Figure 2. "Right angle triangle" knowledge modeling chart
图 2. "直角三角形" 知识建模图

3.2. 选定问题原型

问题原型是指为问题设计而选定的源于习题册、考卷等资料中的问题，作为问题再设计的初版。选择问题原型时需遵循以下原则：1) 问题蕴含的知识点是知识建模图中含有的目标知识点或者是与之相关联的知识点；2) 问题的表述明确、无歧义，问题所涉及的内容科学、准确；3) 问题具有清晰的问题解决推理路径；4) 问题包含的知识点数量及复杂度适中，具有较大的问题设计空间。文章选择的问题原型如图 3 所示。

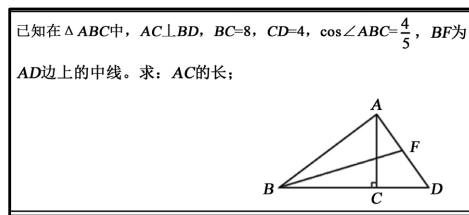


Figure 3. Problem prototype
图 3. 问题原型

3.3. 绘制知识推理路径图

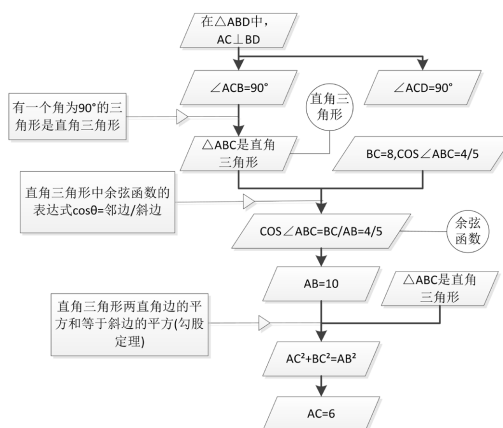


Figure 4. Knowledge reasoning path map for problem prototyping
图 4. 问题原型的知识推理路径图

绘制知识推理路径图时可以参照题目的标准答案或者教师、专家的解题思路, 依据绘图规范与步骤进行绘制, 保证图的完整性与准确性。随后, 教师可根据先前教学的经验, 预设学生常见的错误推理, 在图中标记出的学生的易错点、思维卡点、知识易混淆点。标记之处不仅是教学中的需要学生重点掌握的教学目标, 也是问题设计的重要方向。文章绘制的问题原型的知识推理路径图如图 4 所示。

3.4. 对知识推理路径图进行 ADM 操作

基于知识建模图中知识点间的联系, 对知识推理路径图进行改造并形成新的知识推理路径图的方法称为知识推理路径图变形法。使用该方法进行问题设计时对知识推理路径图中的结点进行的基本操作包含增加(Add)、删除>Delete)、修改(Modify), 简称 ADM 操作。可选择操作的结点为操作子结点或情境结点, 但由于问题情境与其蕴含的知识结构具有紧密联系, 在对情境节点进行操作时, 对应的操作子结点一般也会随之改变, 反之亦然。

3.4.1. 对结点进行“增加”操作

对初始结点进行“增加”操作可增加问题初始条件, 丰富问题情境; 对中间结点进行“增加”操作可增加问题的限制条件, 使得推理出下一步所需的情境结点个数变多; 对目标情境结进行“增加”操作可使推理路径变长。通常情况下, 使用“增加”操作可使问题包含的知识点数量变多, 增加问题复杂度。在目标情境结点处增加操作子结点“直角三角形的两直角边的乘积等于斜边与斜边上高的乘积”, 见图 5 中的①标记处所示。增加的知识点为直角三角形的性质定理, 在知识建模图中与概念知识“直角三角形”相连。经过“增加”操作后, 可对问题再设计形成新设问: 求 CG 的长度。

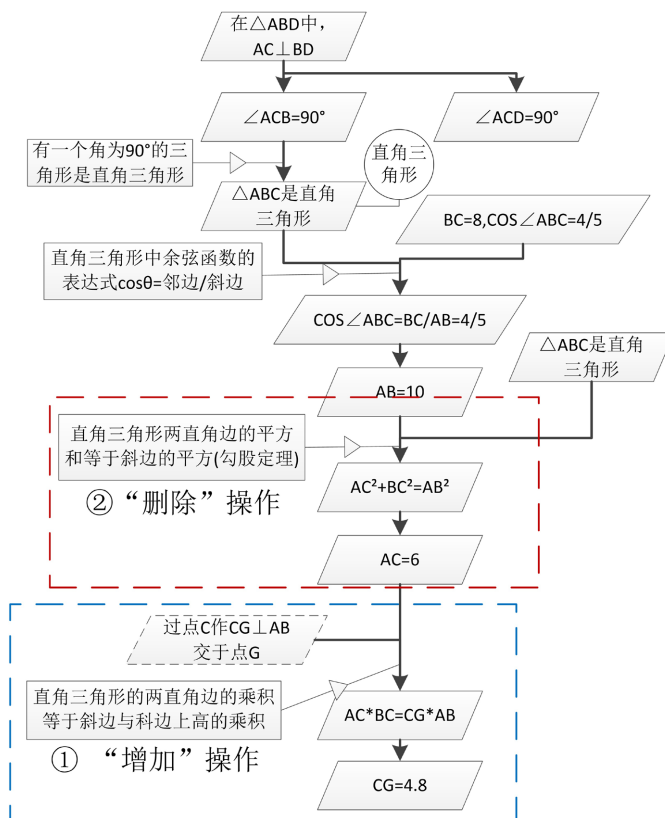


Figure 5. Knowledge reasoning pathway diagram after “Add” and “Delete” operations
图 5. “增加” “删除” 操作后的知识推理路径图

3.4.2. 对结点进行“删除”操作

对初始结点进行“删除”操作可减少问题初始条件, 简化问题情境; 对中间结点进行“删除”操作可减少问题的限制条件, 使得推理出下一步所需的情境结点个数变少; 对目标情境结进行“删除”操作可使推理路径变短。通常情况下, 使用“删除”操作可使问题包含的知识点数量变少, 减少问题复杂度。在目标知识结点处删除操作子结点“勾股定理”, 删除该知识点后, 依据此知识点推理出的情境结点“ $AC = 6$ ”也被删除, 删除部分见图 5 中的②标记处所示。知识推理路径图最尾端的情境结点变为“ $AB = 10$ ”, 可对问题再设计形成新的设问: 求 AB 的长度。

3.4.3. 对结点进行“修改”操作

“修改”操作即对知识推理路径图中的情境结点进行修改或对操作子结点进行替换。在修改情境结点时, 可以将问题条件从一般改为特殊或化特殊为一般; 替换操作子结点时, 替换的结点可以是知识建模图中的同位结点或上下位结点。替换的结点若为先决知识点或在知识建模图中与目标知识结点距离较近, 则问题的复杂度减少; 替换的结点若为目标知识结点或在知识建模图中与目标知识结点距离较远, 则问题的复杂度增加。在进行“修改”操作时要参照知识建模图, 寻找与问题所蕴含知识点相连的知识点进行替换, 随后对知识推理路径图进行修改和调整。在对情境结点进行修改前, 先以知识建模图为依据, 寻找需要替换的操作子结点。例如想要修改初始情境结点“在 $\triangle ABD$ 中, $AC \perp BD$ ”, 则找到与其相邻的操作子结点“有一个角为 90° 的三角形是直角三角形”, 再从知识建模图(见图 2)中找到与该定理相联系的同位知识点“一个三角形 30° 内角所对的边是某一边的一半, 则这个三角形是以这条长边为斜边的直角三角形”进行替换, 根据该定理的条件修改问题初始的情境结点, 将“在 $\triangle ABD$ 中, $AC \perp BD$ ”修改为“在 $\triangle ACD$ 中, $\angle CAD = 30^\circ$, $CD = 2\sqrt{3}$, $AD = 4\sqrt{3}$ ”。同时为了考察学生对于三角函数的熟悉度, 可以将“直角三角形中余弦函数的表达式 $\cos\theta = \text{邻边}/\text{斜边}$ ”替换为同位结点“直角三角形中正弦函数的表达式 $\sin\theta = \text{对边}/\text{斜边}$ ”, 替换后已知的情境结点变为“ $\sin\angle ABC = 3/5$ ”, 可推理出 AB 的值, 已知 AB 、 AC 的值后, 则可将设问修改为: 求 BC 的长度。修改后的知识推理路径图见图 6 所示。

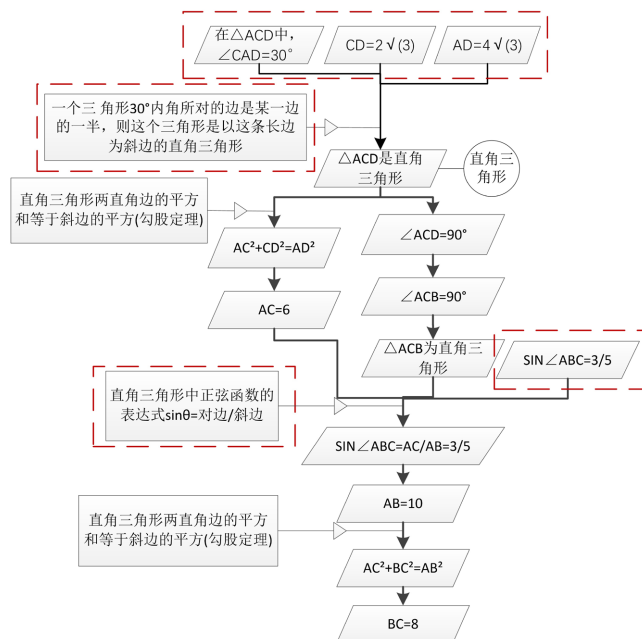


Figure 6. Knowledge reasoning pathway diagram after “Modify” operation
图 6. “修改”操作后的知识推理路径图

3.5. 依据新知识推理路径图生成新问题

对知识推理路径图进行变形操作后会形成新的知识推理路径图, 依据新的知识推理路径图可以生成新问题。在此过程中需要按照以下几个步骤进行转化: 1) 确定问题的初始条件与设问。在新知识推理路径图中标注出无上级结点或无后继结点的情境结点。前者一般作为问题的初始条件, 后者一般作为问题的设问; 2) 组织问题表述语言。将新知识推理路径图转换为问题题述时, 需要重新组织问题的表述语言; 3) 检查新问题。在将新问题运用于教学前需要检查问题的表述是否前后矛盾、问题是否缺少解题条件、根据已有条件是否能正常推理出问题答案等。上述对问题原型进行改造与设计生成的 3 个新问题如表 1 所示。

Table 1. New problems designed based on problem prototypes

表 1. 基于问题原型设计的新问题

序号	问题
1	“增加”操作: 已知在 $\triangle ABD$ 中, $AC \perp BD$, $BC = 8$, $CD = 4$, $\cos \angle ABC = 4/5$, BF 为 AD 边上的中线, CG 为 $\triangle ABC$ 斜边上的高, 求: CG 的长度。
2	“删除”操作: 已知在 $\triangle ABD$ 中, $AC \perp BD$, $BC = 8$, $CD = 4$, $\cos \angle ABC = 4/5$, BF 为 AD 边上的中线, 求: AB 的长度。
3	“修改”操作: 已知在 $\triangle ACD$ 中, $\angle CAD = 30^\circ$, $CD = 2\sqrt{3}$, $AD = 4\sqrt{3}$, $\sin \angle ABC = 3/5$, 求: BC 的长度。

4. 结语

以问题解决知识推理路径为核心的问题再设计流程为问题设计提供了详细且具体的指导。该设计流程关注的是问题表面形式下蕴含的知识结构, 依据知识建模图和知识推理路径图对问题解决的推理路径进行系统、理性地增删改操作, 在此过程中需要教师发挥主观创造性去选择具体需要操作的类型和结点并重新梳理题述, 以设计出真正适用于现实教学需要的问题。通过一系列的操作与设计可生成具有知识点内在联系的、有难度层次的若干问题, 从而形成问题系统。问题系统可以针对学生个体差异的不同进行分层训练, 向具有个体差异的学生提供不同的问题进行练习或有针对性地向学生提供其掌握薄弱的知识点的相关问题进行巩固提升, 以达到个性化教学、因材施教的目的。但文章仍然存在一定的不足, 文章提出的问题再设计流程主要适用于数学、物理等理科学科中结构良好、定义明且推理路径清晰的题目的设计, 而其他类型的问题的设计方法还需要在后续研究中进一步探索。

基金项目

2023 年浙江省自然科学基金资助项目“个性化学习数据的关键挖掘技术研究”(项目批准号: LZ23F020003)。

参考文献

- [1] 何静, 严皓. 初中数学单元作业设计的问题、原则与策略[J]. 教育理论与实践, 2022, 42(32): 53-55.
- [2] 何鹏. 项目式学习中驱动性问题的设计与实施策略——以“电离与离子反应”为例[J]. 化学教育(中英文), 2022, 43(5): 68-73.
- [3] 李兵. 基于综合思维的课堂问题设计——以“水循环”为例[J]. 中学地理教学参考, 2023(18): 44-45, 48.
- [4] 王占娟, 何江. 深度学习视域下的初中数学问题设计策略研究[J]. 教育科学论坛, 2022(28): 55-58.
- [5] 邹旭涛. 面向创新人才培养的高中数学项目式教学中问题设计的改进策略[J]. 现代教育, 2022(3): 32-35.
- [6] 何文涛, 李梦晴, 王亚萍, 等. 知识空间维度下问题解决类协作学习的探究路径分析[J]. 电化教育研究, 2022, 43(3): 69-76, 84.

- [7] 张晓英, 张润芝, 杨开城. 论教学设计理论发展的新领域——问题设计[J]. 中国电化教育, 2008(11): 11-15.
- [8] 何文涛, 李梦晴, 路璐, 等. 基于知识建模图的教材知识内容分析理路与应用价值[J]. 远程教育杂志, 2021, 39(1): 104-112.