

# 课程思政视域下“旋轮线”的教学设计与实践

杨 慧, 王文静

太原师范学院数学与统计学院, 山西 太原

收稿日期: 2023年12月4日; 录用日期: 2024年1月4日; 发布日期: 2024年1月11日

## 摘 要

从微观角度选取了解析几何核心内容之一“旋轮线”展开丰富生动的教学设计, 从课程思政理念下的教学目标、教学实施过程、教学实施成效等方面予以论述, 积极探索了课程思政有效融入几何教学的方法途径。

## 关键词

课程思政, 旋轮线, 参数方程

# Teaching Design and Practice of the Cycloid from the Perspective of Curriculum Ideology and Politics

Hui Yang, Wenjing Wang

School of Mathematics and Statistics, Taiyuan Normal University, Taiyuan Shanxi

Received: Dec. 4<sup>th</sup>, 2023; accepted: Jan. 4<sup>th</sup>, 2024; published: Jan. 11<sup>th</sup>, 2024

## Abstract

One of the core contents of analytic geometry is selected from the microscopic point of view to develop a rich and vivid teaching design, which is discussed from the aspects of teaching objectives, teaching implementation process and teaching implementation effect under the concept of curriculum ideology and politics, and the ways and means of effectively integrating curriculum ideology and politics into geometry teaching are actively explored.

## Keywords

### Curriculum Ideology, Cycloid, Parameter Equation

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

当今社会, 培养什么人、怎样培养人、为谁培养人称为中国高等教育必须回答的根本问题。高校应将思政教育融入到各类课程中, 强化课程思政功能。这需要通过课程设计和教学实践, 加强学科知识和思想道德教育的有机结合, 使学生能够在学科知识学习的同时, 获得全面的人文素养和价值观念[1]。在素质教育全面发展的今天, 高校的理科专业需要逐渐树立起价值塑造、能力培养、知识传授三位一体的教学目标。专业课程的每个细节, 都可融入对学生的价值引领。“大学课程不仅仅是追问其范围的解释之学, 更是规范人的价值之学”。高校各类课程的知识传授与价值观教育必须同频共振。

解析几何是构架数与形, 代数与几何的桥梁, 是数学专业课的基石。曲线是解析几何研究的主要对象之一, 求曲线的轨迹方程是解析几何的基本问题之一, 也是众多科学领域如轨道交通、天体运行轨道、原子轨道等研究的基础。旋轮线是典型的平面曲线之一, 它具有最速降线性质和等时性, 实用性极其广泛。

## 2. 教材分析

旋轮线是教材第二章第一节平面曲线内容。平面曲线研究是空间曲线研究的基础, 也是研究各类曲面性质的基础。教材核心内容聚焦在两个方面: 一是建立动点运动的轨迹方程, 特别是建立向量式和坐标式参数方程, 借助参数的变化反应动点位置的变化; 二是参数方程与一般方程间的转化, 注意转化前后方程的等价性, 真正体现曲线参数方程是解析几何联系实际的一个重要工具。

## 3. 学情分析

学生已经掌握了平面曲线中较为简单的圆锥曲线的标准方程, 也了解了圆锥曲线的参数方程形式, 为进一步学习较为复杂的旋轮线方程奠定了基础。但面对具体的实际问题, 学生分析问题、研究问题、解决问题的能力不足, 需要在教师的引领下进行系统深入的学习, 数学思维能力需进一步的提升。

## 4. 课程思政理念下教学与育人目标

**知识传授目标:** 掌握曲线参数方程建立思想和步骤; 理解一般方程、参数方程间的区别与联系, 掌握两类方程间的互化。

**能力培养目标:** 利用参数方程探究轨迹问题, 讨论轨迹的纯粹性和完备性, 培养多向思维的流畅性; 运用数学软件进行实验研究, 培养学生实践创新能力, 提高学生信息技术应用能力。

**思政育人目标:**

1) 通过建立坐标系, 搭建曲线与方程的联系, 追根溯源, 品古鉴今, 培养学生优秀品格, 严谨的科学态度, 刻苦钻研的精神, 学会透过现象看本质。

2) 通过动态几何画板 Geogebra (以下简称 GGB) 绘制旋轮线图象, 激发学生的学习兴趣, 丰富学生

的直观感知, 培养学生运用信息技术的能力。

3) 通过将曲线参数方程转化为一般方程, 虽然方程形式发生了变化, 但其本质不变。引导学生运用敏锐的观察力、辨析力去发现事件中的变与不变。

4) 曲线图象等所呈现出了数学的简洁美、和谐美, 体会数学不但拥有真理, 而且拥有至高的美提升学生感受美、鉴赏美、表现美、创造美的能力。

5) 通过旋轮线在日常生活及物理中的广泛应用, 将理论与实际相结合, 培养学生的创新意识和应用意识。

## 5. 教学重难点

旋轮线教学重点: 建立旋轮线参数方程的步骤; 建立轨迹方程的思想方法; 曲线参数方程与一般方程间的相互转化。

旋轮线教学难点: 如何选取恰当的坐标系和参数才能高效解决轨迹问题。

## 6. 课程思政理念下的教学设计与实践

### 6.1. 教学策略

采用启发式教学原则设置情景导入, 借助信息技术教学以及讨论、演示、实验等多元教学法进行教学, 注重数学思想方法的渗透, 注重数与形的融合, 注重知识传授与价值引领的同频共振。

### 6.2. 课程思政教学实施过程设计

#### (1) 实例导入

##### 1) 钟摆——惠更斯等时摆

意大利科学家伽利略曾用自行制的滴漏来做单摆的试验, 证明了单摆摆动的时间跟摆幅没有关系, 只跟单摆摆线的长度有关。这个现象使伽利略想到或许可以利用单摆来制作精确的时钟。伽利略的发现振奋了科学界, 过了不久, 荷兰科学家惠更斯决定要做出一个精确的时钟来。伽利略的单摆是在一段圆弧上摆动的, 所以我们也叫做圆周摆, 而惠更斯想要找出一条曲线, 使摆沿着这样的曲线摆动时, 摆动周期完全与摆幅无关, 他纯粹往数学曲线上去研究, 经过不少次的失败, 这样的曲线终于找到了, 数学上把这种曲线叫做“摆线”, “等时曲线”或“旋轮线”。

##### 2) 古建筑屋顶

古代宫廷建筑中特殊的屋顶建筑, 屋顶从侧面看呈两条曲线, 加上屋檐上翘, 不仅看起来雄壮威严, 更重要的是这样的设计使得屋顶上的雨水能以最快的速度流走, 提高了建筑物的安全性。

##### 3) 盘旋的“过山车”

大型游乐场, 盘旋而又跌宕起伏的过山车轨道, 设计时利用了特殊的曲线在垂直下降时达到最高时速度的性质, 使得挑战者能享受到最佳的刺激体验。

[设计意图]为追求科学的真谛, 探索真理的道路很艰辛, 经历不断失败与挫折, 不断实践。通过数学文化的渗透, 培养学生的兴趣、善思、坚持与执着。

#### (2) 问题提出

##### [问题 1]

小时候喜欢玩的滚环及自行车、马车、汽车、火车等的车轮上点随车辆前进时的运动轨迹是什么曲线呢? 我们可以从众多具体问题中抽象出数学问题: 一个圆在一直线上无滑动地滚动, 求圆周上一点的轨迹。

[问题 2]有趣现象: 火车悖论。

在任一瞬间, 一辆移动的火车不可能整个都朝机车拖动的方向移动, 火车上总有一部分是朝火车运动的相反方向移动。这是怎么回事呢?

[设计意图]理论与实际相结合, 透过现象看本质, 联系科学发展史, 激发起学生的学习兴趣, 而且寓教于乐, 有思想教育意义。

### (3) 实验探究

#### 1) 平面曲线方程

定义 1 [2] 当平面上取定了坐标系之后, 如果一个方程与一条曲线之间有着关系:

① 满足方程的  $(x, y)$  必是曲线上某一点的坐标(完备性);

② 曲线上任何一点的坐标  $(x, y)$  满足这个方程(纯粹性),

那么这个方程就叫做这条曲线的方程, 这条曲线叫做这个方程的图形。

$$F(x, y) = 0, \text{ 或 } y = f(x)$$

定义 2 [2] 在坐标系  $\{O; e_1, e_2\}$  下, 向量函数  $r = r(t) = x(t)e_1 + y(t)e_2$  ( $t \in (a, b)$ ) 叫做曲线的向量式参数方程。

曲线的坐标式参数方程:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} (t \in [a, b])$$

消去参数, 可将参数方程转化为一般方程。

#### 2) 旋轮线方程建立

向量函数曲线属于“形”的范畴, 方程则属于“数”的范畴, 借助直角坐标系将二者联系在一起。曲线方程的学习是从学生已学知识为切入点, 引起学生关注, 引发数学思考, 鼓励学生发现数学的规律和问题解决的途径。

[问题 3]一个圆无滑动地沿一条直线滚动时, 其圆周上一点运动的轨迹为旋轮线(见图 1)。

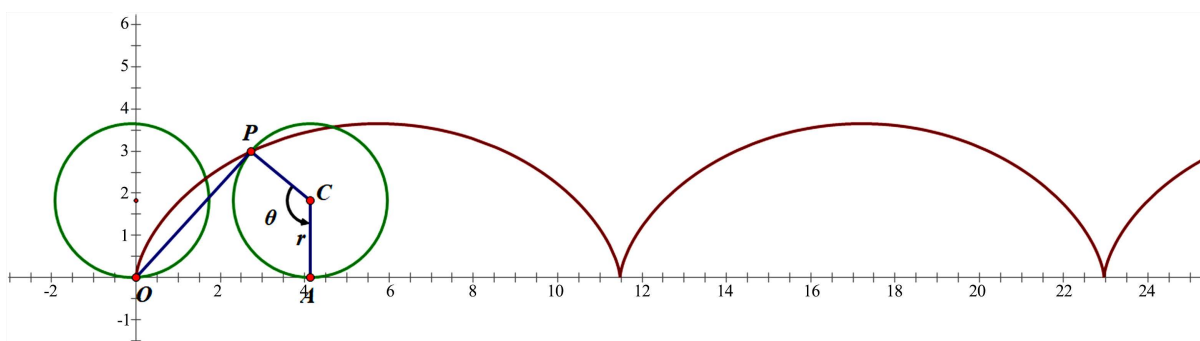


Figure 1. Cycloid

图 1. 旋轮线

建立如图 1 的直角坐标系, 直线为  $x$  轴, 以圆与  $x$  轴相切的点为坐标原点  $O$ , 过  $O$  设作  $x$  轴的垂线为  $y$  轴。

设圆的半径为  $a$ , 开始时动点在原点。经过一段时间以后, 动点到达图中  $P$  点位置, 此时切点为  $A$ , 圆心移到了  $C$  点。动点  $P$  的向径为:

$$\mathbf{r} = \mathbf{OP} = \mathbf{OA} + \mathbf{AC} + \mathbf{CP}$$

设  $\theta = \angle(\mathbf{CP}, \mathbf{CA})$ , 于是  $\angle(\mathbf{i}, \mathbf{CP}) = -\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ , 有  $\mathbf{CP} = (-a \sin \theta)\mathbf{i} + (-a \cos \theta)\mathbf{j}$ , 故曲线向量式参数方程为:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= a\theta\mathbf{i} + a\mathbf{j} + (-a \sin \theta)\mathbf{i} + (-a \cos \theta)\mathbf{j} \\ &= a(\theta - \sin \theta)\mathbf{i} + a(1 - \cos \theta)\mathbf{j} \end{aligned}$$

坐标式参数方程为:

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta) \\ y = a(1 - \cos \theta) \end{cases} \quad (-\infty < \theta < +\infty)$$

消去参数得一般方程:

$$x = a \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}$$

借助 GGB 绘制动点的运动轨迹, 并观察随着圆的半径增大或减少时轨迹发生了怎样的变化, 小结旋轮线的主要性质。

[设计意图]使学生不断地经历直观感知、观察发现、归纳类比、空间想象、抽象概括、反思与建构等思维过程。

方程的曲线和曲线的方程, 数形结合达到高度、巧妙、和谐的统一。通过观察图形, 分析变与不变, 提高自身分辨能力, 分析问题, 探究问题的能力。“动”与“静”的辩证思维正是分析和解决轨迹问题的重要思路, 这可以帮助学生对曲线与方程的深刻理解[3]。

总结曲线轨迹方程建立的步骤(四步法): 建立直角坐标系, 选设适当的参数, 表出动点的径矢, 写出向量式参数方程和坐标式参数方程。四步法适用于所有轨迹问题的求解, 包含平面上或空间上点的轨迹问题, 也包含空间曲线轨迹问题等, 核心思想就是选取一个参数将动点的向径表示出来。

[设计意图]参数选取对于建立参数方程非常重要。参数选取不同, 对应曲线的参数方程就会不同。轨迹方程建立中参数的选取要恰当。曲线参数个数通常是一个, 若选择了两个, 一定要找到彼此的联系。对于同一条轨迹, 方程形式不同, 但本质相同。透过现象看本质。生活中要学会用敏锐的眼光去发现事物的本质。

借助 GGB 动态软件进行数学实验演示, 展示该曲面方程对应的图象, 并演示动点在不同时刻的位置, 即曲面图象变化的动态过程(GIF 格式展示)。数学实验法在解析空间几何教学中的具体应用, 以实现数学教学的路径创新[4]。

### 3) 内(外)旋轮线方程建立

[问题 4]一个小圆在一个大圆内无滑动地滚动, 求小圆上一点的轨迹(见图 2)。

开始时动点  $P$  与  $A$  重合, 建立如图的直角坐标系, 请同学们尝试将动点  $P$  的径矢写成几个易表示出的向量之和。

如图向量  $\mathbf{r} = \mathbf{OP} = \mathbf{OA} + \mathbf{AP}$ , 或  $\mathbf{r} = \mathbf{OP} = \mathbf{OB} + \mathbf{BP}$ , 或  $\mathbf{r} = \mathbf{OP} = \mathbf{OC} + \mathbf{CP}$ , 思考哪种分解表示形式更恰当。

适当选取参数  $\alpha, \beta$ , 将所需表示的向量表示出来, 并找寻  $\alpha, \beta$  的关系, 使得建立该轨迹曲线方程独立参数为一个。

[设计意图]提高学生的辨析力, 寻求适于解决问题的方式方法。引导学生在自己人生路上的岔路口时, 需要明确目标, 分析思考选择适合于自己强行的路。

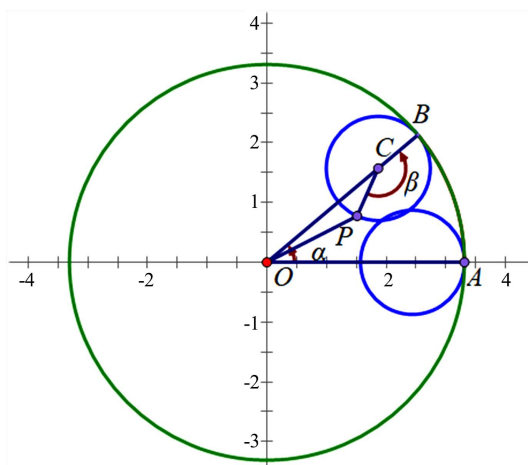


Figure 2. Hypotrochoid  
图 2. 内旋轮线

合理建立坐标系并选取参数易求得内旋轮线坐标式参数方程为:

$$\begin{cases} x = (a-b)\cos\alpha + b\cos\frac{a-b}{b}\alpha \\ y = (a-b)\sin\alpha - b\sin\frac{a-b}{b}\alpha \end{cases} \quad (-\infty < \theta < +\infty)$$

实验 1: 请用数学软件绘制  $a = mb$  ( $m$  为正数时,  $m > n$ ) 对应的内旋轮线图象(见图 3)。

实验 2: 请用数学软件绘制  $a = \frac{m}{n}b$  ( $m, n$  为互质的正数,  $m > n$ ) 对应的内旋轮线图象(见图 4)。

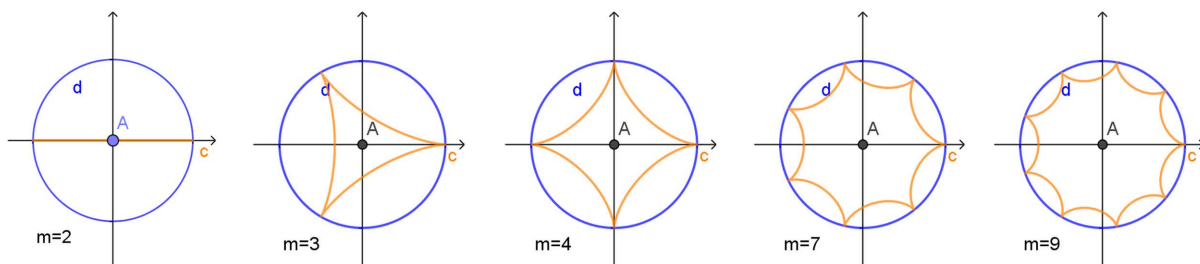


Figure 3. Hypotrochoid when  $a$  equals  $mb$   
图 3. 内旋轮线 ( $a = mb$ )

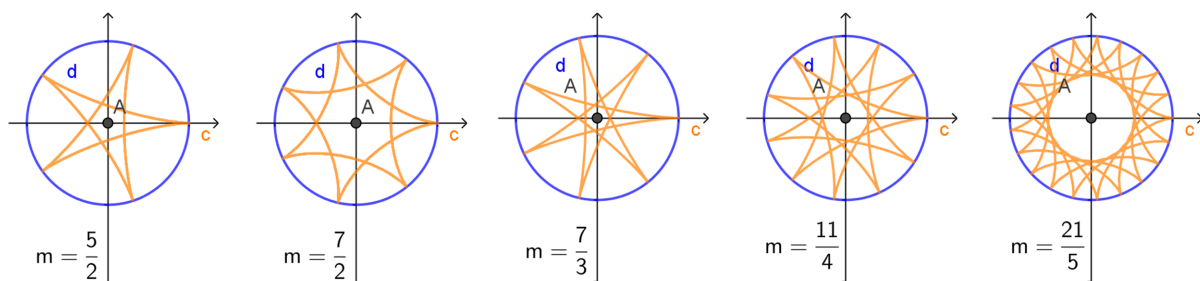


Figure 4. Hypotrochoid when  $a$  equals  $\frac{m}{n}b$

图 4. 内旋轮线 ( $a = \frac{m}{n}b$ )

分组设计图象并分享, 并归纳整理  $m, n$  变化时, 图象的变与不变因素。

[设计意图]由特殊到一般, 从简单到复杂, 使新知识的建构顺畅和自然, 既体现在教师引导下学生自我建构, 又使学生感到知识之间并不是孤立的, 而是一个相互联系密切相关的整体。该实验探究能够提升学生的创新能力和应用意识。

类比进行外旋轮线方程建立及图象绘制, 观察图象之特点(由学生自己完成), 特别当  $R=r$  时, 该旋轮线称为心脏线。

注 1: 注重了教师引导、渗透了类比思想, 提升了学生数学素养。

注 2: 通过教学过程中的方程、图形、变换等让学生感受了数学的思想之美, 方法之美, 形式之美。教学各环节中不断渗透美育, 提升学生审美能力, 同时激发了学生探索轨迹问题的积极性。

#### (4) 拓展迁移

##### 1) 变幅旋轮线

回到火车悖论问题, 从实际问题抽象出相应的数学问题是: 平面上半径为  $r$  的动圆  $K$  在直线上滑动地滚动时, 动点  $M$  的运动轨迹问题。设点  $M$  到动圆心的距离为  $l$ , 当  $l > r$  时为长幅旋轮线(见图 5); 当  $l < r$  时为短幅圆内旋轮线。

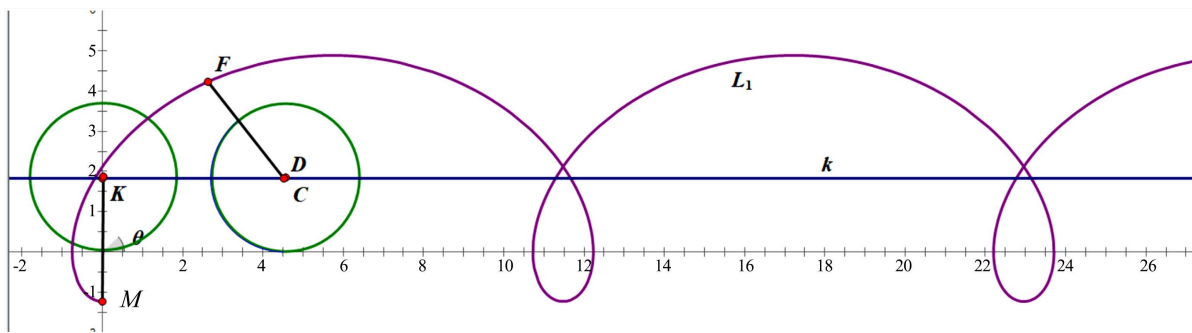


Figure 5. Prolate cycloid  
图 5. 长幅旋轮线

长幅旋轮线、长幅内外旋轮线及短幅内外旋轮线都有实际的应用。如内外旋轮线在机械设计、理论力学等方面应用广泛, 如行星搅拌机, 内啮合、外啮合型定轴轮系等。

##### 2) 广义旋轮线

一条光滑曲线在另一条光滑曲线上无滑动滚动, 滚动曲线上一点的轨迹就是广义旋轮线。我们建立参数方程时, 需选用自然参数(弧长), 写出广义旋轮线的轨迹方程; 利用数学软件, 可以把椭圆旋轮线画出, 并进行做动画演示。

[设计意图]引导学生合理地应用知识, 进而发展学生的应用意识, 培养学生热爱数学, 科技兴国, 铸就强国梦的理想信念。让学生感悟数学与生活息息相关, 用数学的眼光观察世界, 用数学的思维分析世界, 用数学的语言表达世界。

### 7. 课程思政教学实施成效

通过三个实例导入研究对象, 激发兴趣, 让学生经历将实际问题抽象成数学模型并进行解释和应用的过程。提出问题, 使思维目标集中, 培养学生良好的思维习惯, 学生能够在教师引导下主动思考问题解决方法。通过交流讨论、实验探究等方式, 提升了学生观察能力、抽象概括能力及创新能力。强化类比、联想的方法, 领会到了解决轨迹问题的核心思想。迁移拓展环节使学生对知识进行了再认识与提高,

培养了学生知识迁移与应用的能力。

总之, 整个教学设计充分体现了知识传授与课程思政的有效融合。学生在教师引领下不仅能够掌握旋轮线的性质及方程建立方法, 而且学生可通过“建、设、表、写”四步法解决所有的轨迹问题, 学生发现问题、分析问题、解决问题的能力得到了提升。凝练思政元素, 以实践为契机创新教学方法, 可以很好地提高课堂教学质量, 提高育人效果。

## 基金项目

太原师范学院 2022 年度教学改革项目“师范院校《高等数学》三位一体的教学改革研究(课题编号: JGLX2233)”。

## 参考文献

- [1] 教育部关于印发《高等学校课程思政建设指导纲要》的通知[EB/OL]. [http://www.moe.gov.cn/srcsite/A08/s7056/202006/t20200603\\_462437.html?eqid=cd33669e000498b80000000464264c2b](http://www.moe.gov.cn/srcsite/A08/s7056/202006/t20200603_462437.html?eqid=cd33669e000498b80000000464264c2b), 2023-06-18.
- [2] 吕林根, 许子道. 解析几何[M]. 北京: 高等教育出版, 2006.
- [3] 侯传燕. 挖掘数学专业课程的思政元素——以空间解析几何为例[J]. 新疆师范大学学报(自然科学版), 2021, 40(1): 78-81.
- [4] 严海霞. 空间解析几何实践教学轨迹方程的计算[J]. 内蒙古师范大学学报(教育科学版), 2015, 28(12): 152-158.