Advances in Education 教育进展, 2024, 14(1), 143-148
Published Online January 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ae
https://doi.org/10.12677/ae.2024.141023

Hans汉斯

基于核心素养对解析几何综合题的分析思考

——以2023年全国I卷第22题为例

徐培睿

扬州大学数学科学学院，江苏 扬州

收稿日期：2023年12月3日；录用日期：2024年1月2日；发布日期：2024年1月9日

摘　要

数学核心素养的培养是当下高中数学教育的时代趋势。解析几何综合题具有较高的难度，考验学生综合运用知识的能力，本文结合核心素养对2023年全国I卷第22题的部分解法进行分析，探寻试题中所蕴含的教育价值。

关键词

核心素养，解析几何，高考数学，解题分析

Analysis and Reflection on Analytic Geometry Comprehensive Problems Based on Core Literacy

—Taking 2023 National Volume I Question 22 as an Example

Peirui Xu

College of Mathematical Science, Yangzhou University, Yangzhou Jiangsu

Received: Dec. 3rd, 2023; accepted: Jan. 2nd, 2024; published: Jan. 9th, 2024

Abstract

The cultivation of core mathematical literacy is the current trend of high school mathematics education. Analytic geometry comprehensive questions have high difficulty and test students' ability to comprehensively apply knowledge. This article analyzes the partial solution of 2023 National Volume I Question 22 based on core competencies, and explores the educational value con-

文章引用: 徐培睿. 基于核心素养对解析几何综合题的分析思考[J]. 教育进展, 2024, 14(1): 143-148.
DOI: 10.12677/ae.2024.141023

tained in the questions.

Keywords

Core Literacy, Analytic Geometry, Mathematics for the College Entrance Examination, Problem Solving Analysis

1. 引言

普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)提出：数学学科核心素养是数学课程目标的集中体现，是具有数学基本特征的思维品质、关键能力以及情感、态度与价值观的综合体现。数学学科核心素养包括：数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析(中华人民共和国教育部，2020) [1]。高中数学教育教学需注重挖掘课本、题目中的素养价值，以实现提升学生核心素养的课程目标。

综合性题型往往是高考中的易错点、难点，其不仅仅对学生基础知识的掌握有着一定的要求，也考验着学生将不同板块的知识综合应用的能力。研究高考综合性题型的思路对于高中数学的教育教学具有指导意义，本文以2023年全国I卷第22题的解法为例，分析教学中应当渗透的思想方法、核心素养。

2. 试题与分析

2.1. 试题呈现

(2023年新课标I，22) 在直角坐标系 xOy 中，点P到 x 轴的距离等于点P到点 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 的距离，记动点P的轨迹为W。

(1) 求W的方程；

(2) 已知矩形ABCD有三个顶点在W上，证明：矩形ABCD的周长大于 $3\sqrt{3}$。

2.2. 试题分析

试题命制体现了“一核”“四层”“四翼”高考评价体系的要求，不仅仅考察学生对数学学科主干知识的掌握情况，也坚持了开放创新，考察学生解决问题的关键能力。

第(1)问属于基础题，考察学生对轨迹方程基础知识的掌握情况。

第(2)问基于运动变化这一平面解析几何的基本观点，聚焦圆锥曲线中的四边形特征进行命制(彭海燕，李维，2023) [2]。该问综合性较强、难度偏大，涉及圆锥曲线与直线位置关系、放缩法、函数的单调性与极值等内容，考察学生数形结合、分类讨论、逻辑推理、数学运算等多方面的能力，即考察学生综合运用知识的能力，其综合性所蕴含的数学教育价值耐人寻味。

3. 试题解法

3.1. 第(1)问解法

设 $P(x,y)$，由“点P到 x 轴的距离等于点P到点 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 的距离”可得 $\sqrt{(x-0)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2}=|y|$，整

理可得 $y=x^2+\frac{1}{4}$，即为所求轨迹 W 的方程。

3.2. 第(2)问解法

3.2.1. 解法 1：斜率代换 + 构造函数

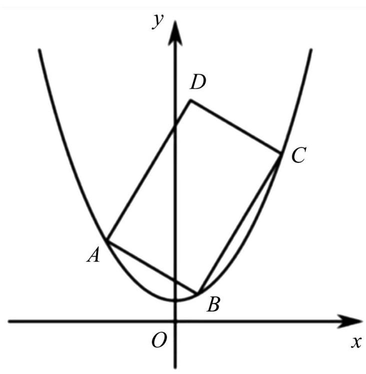
设矩形 ABCD 周长为 C，其在 W 上的三个顶点分别为 $A\left(a,a^2+\frac{1}{4}\right)$、$B\left(b,b^2+\frac{1}{4}\right)$、$C\left(c,c^2+\frac{1}{4}\right)$，且 $a<b<c$。

易得矩阵四条边所在直线的斜率均存在且不为 0，$AB\perp BC$

设直线 AB、直线 BC 斜率为 k_1，k_2，则 $k_1\cdot k_2=-1$，$k_1=\frac{b^2+\frac{1}{4}-\left(a^2+\frac{1}{4}\right)}{b-a}=b+a$，$k_2=\frac{c^2+\frac{1}{4}-\left(b^2+\frac{1}{4}\right)}{c-b}=c+b$，根据对称性不妨设 $|k_1|\geq|k_2|$。

则有 $k_1=-\frac{1}{k_2}$，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}C&=|AB|+|BC|=(b-a)\sqrt{1+k_1^2}+(c-b)\sqrt{1+k_2^2}\\&\geq(b-a)\sqrt{1+k_2^2}+(c-b)\sqrt{1+k_2^2}\\&=(c-a)\sqrt{1+k_2^2}+(k_2-k_1)\sqrt{1+k_2^2}\\&=\left(k_2+\frac{1}{k_2}\right)\sqrt{1+k_2^2}\end{aligned}$$



评析：此处采用了斜率代换的方式，根据已知条件“矩形 ABCD 有三个顶点在 W 上”可以设出三点坐标，并根据矩形、抛物线的性质结合图像可得到 k_1，k_2 之间的关系，根据对称性设出 $|k_1|\geq|k_2|$ 属于关键点之一，需要在日常教学中引导学生提高对对称性、周期性等性质的认识，不仅能够从具体的函数得出性质，还能够从图像变化的角度进行分析思考。解析完题设条件之后，从所需证明的结论出发，列出证明对象的代数式，此处发现代数式含有多个未知量，则需要思考如何简化，化多变量为单变量，根据 k_1、k_2 与 a、b、c 的关系可以发现对根式进行放缩则可以化为单变量，这也是本题解题的关键点之一，在教学中要注重培养学生的符号意识，注意引导学生掌握将多变量转化为单变量的基本能力，学会统筹变量之间的关系。

易得 $0<k_2\le 1$，设 $f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2(1+x^2)$，$x\in(0,1]$

则 $f'(x)=2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\left(2x-\frac{1}{x}\right)$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

故当 $x\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在该区间单调递减，当 $x\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在该区间单调递增。

则当 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$f(x)$ 取得最小值，$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{27}{4}$。

评析：在得出不等关系后，根据试题所需证明的“周长大于 $3\sqrt{3}$”可以猜想下一步则是求解 $\left(k_2+\frac{1}{k_2}\right)\sqrt{1+k_2^2}$ 的取值范围，此处无法直接判断，故需要通过构造函数来求解，此处的构造是基于函数的定义域、值域的取值范围，对代数式进行整体平方以方便计算且不影响单调性。在教学中应注意引导学生掌握多种构造函数的方法并注意变形以降低运算难度。

则 $\frac{1}{2}C\ge\sqrt{\frac{27}{4}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，即 $C\ge 3\sqrt{3}$。当 $C=3\sqrt{3}$ 时，$k_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$k_1=-\frac{1}{k_2}=-\sqrt{2}$，而 $\frac{1}{2}C\ge\left(k_2+\frac{1}{k_2}\right)\sqrt{1+k_2^2}$ 取“=”时，要求 $|k_1|=|k_2|$，矛盾，故 $C>3\sqrt{3}$，得证。

评析：求解得到 $C\ge 3\sqrt{3}$ 与所要证明的结论差异，则需要考虑不等式的取等问题，这里函数的取等与放缩取等的条件矛盾，故取等不成立。教学中需要反复强调取等问题，培养学生的问题意识，对不等式取等条件多问几个为什么，以帮助学生提高思维严密性。

3.2.2. 解法 2：曲直联立 + 构造函数

设矩形 ABCD 周长为 C，其在 W 上的三个顶点分别为 $A\left(a,a^2+\frac{1}{4}\right)$、B、D，易得 AB⊥AD，AB、AD 所在直线斜率存在且不为 0，不妨设 AB、AD 的斜率分别为 k 和 $-\frac{1}{k}$，由对称性，不妨设 $|k|\le 1$。

则直线 AB 的方程为 $y=k(x-a)+a^2+\frac{1}{4}$

联立 $\begin{cases} y=x^2+\frac{1}{4} \\ y=k(x-a)+a^2+\frac{1}{4} \end{cases}$ 可得 $x^2-kx+ka-a^2=0$

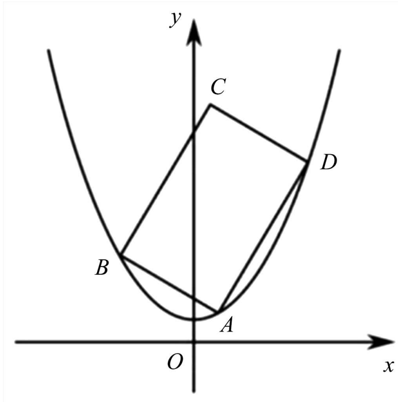
$$\Delta=k^2-4\left(ka-a^2\right)=(k-2a)^2>0\text{，故 } k\ne 2a$$

$$|\mathrm{AB}|=\sqrt{1+k^2}\,|k-2a|\text{，}\quad |\mathrm{AD}|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\left|\frac{1}{k}+2a\right|$$

$$|\mathrm{AB}|+|\mathrm{AD}|=\sqrt{1+k^2}\,|k-2a|+\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\left|\frac{1}{k}+2a\right|$$

$$\ge\sqrt{1+k^2}\,|k-2a|+\left|\frac{1}{k}+2a\right|$$

$$\ge\sqrt{1+k^2}\left|\frac{1}{k}+k\right|=\sqrt{\frac{\left(1+k^2\right)^3}{k^2}}$$



评析：此处采用的是曲直联立的方式，设一点坐标以及一直线的斜率，可由两个未知量表示出矩形周长的代数式，同理于解法1，需要将多变量转化为单变量，异曲同工。

令 $k^2=x$，则 $x\in(0,1]$，设 $f(x)=\frac{(1+x)^3}{x}=x^2+3x+\frac{1}{x}+3$，

则 $f'(x)=2x+3-\frac{1}{x^2}=\frac{(2x-1)(x+1)^2}{x^2}$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\frac{1}{2}$。

故当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在该区间单调递减，当 $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在该区间单调递增。则当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 取得最小值，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{27}{4}$，故 $|\mathrm{AB}|+|\mathrm{AD}|\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}$，而 $\sqrt{1+k^2}|k-2a|+\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\left|\frac{1}{k}+2a\right|\geq\sqrt{1+k^2}|k-2a|+\left|\frac{1}{k}+2a\right|$ 取等号的条件为 $k=1$ 与 $x=\frac{1}{2}$ (即 $k=\frac{1}{2}$)时取等矛盾，故 $|\mathrm{AB}|+|\mathrm{AD}|>\frac{3\sqrt{3}}{2}$，即有 $C>3\sqrt{3}$，得证。

评析：解法二中构造函数、确定函数的单调性与极值、不等式取等条件判断与解法一相类似。两解法都要注意不同变量的取值范围以及变量之间的关系，充分解析已知条件中隐含的关系会使得解题推进如鱼得水。

4. 解法的评价与启示

4.1. 解法评价

第(1)问可以通过将文字语言转化为符号语言的方式得出轨迹方程，也可以根据抛物线的定义“把平面内与一个定点和一条定直线的距离相等的轨迹叫做抛物线”来解决。本题需要学生具备基本的将文字语言数学化的能力，所求为第(2)问解题铺垫。

第(2)问从代数结构看，解法1和解法2没有本质区别，关键是把握几何结构的一致性(吴中林，黎方平，江泓，2023) [3]。两种解法都涉及圆锥曲线与直线的位置关系、放缩法、函数的构造、不等式的取等条件等内容，环环相扣，步步深入。在解题过程中需要灵活运用几何的基本知识、基本思想方法对问题进行分析转化，对逻辑推理、直观想象等素养具有较高的要求。重点一在于如何将多变量转化为单变量，涉及到放缩的方法，二在于如何合理地构造函数，三在于如何求解函数的最小值，四在于判断不等式的取等条件。对于数学学科核心素养的考查，本质上可看作对某一项或某几项数学专项能力的特征的考查(余晓瑜，2023) [4]。

4.2. 解法启示

4.2.1. 铸牢基础，注重数学抽象素养的培养

《中国高考评价体系》明确提出“一核”“四层”“四翼”的高考评价体系，高考命题具有注重对基础知识进行考察的特点。综合性几何题的解答需要对几何、函数、不等式等知识融会贯通，故要注重基础知识的掌握，引导学生学会从数量、图形关系中抽象出数学概念间的关系。

4.2.2. 关注函数性质，注重直观想象素养的培养

解决本题需要充分挖掘函数的性质、分析图形动态变化规律，确定未知量的取值范围。教学中需要注重引导学生形成对图形的基本结构、运动变换状态的认识，逐步培养学生从复杂的结构中抽象出基本结构、基本关系的能力。

4.2.3. 充分挖掘题设与结论涵义，注重逻辑推理素养的培养

对于此类证明题的分析，不仅仅需要对题设进行正向推理，也需要对所求结论进行逆向分析，比如此处函数的合理构造、取等条件，需要在日常教学中反复强调、总结归纳，以培养学生的思维能力、逻辑推理素养。

4.2.4. 统筹兼顾，注重思维能力、数据分析能力的培养

科学审题才能够保证问题解决的效果，学生需要在有限的时间对题目的题设与结论进行浏览，思考其中涉及的知识方法，从而形成解决问题的框架思路，教学中应该多引导学生对题目进行分析，找出所有关联的关联信息，培养学生的发散思维以及数据分析能力。

4.2.5. 训练思想方法，注重创造性解决问题能力的培养

高中生的身心在慢慢成熟，对待问题、处理问题的方式也在成熟。数学学科的特点是需要不断进行推翻、创新，而这同样也是核心素养培养的重要要求(韦明钊，2023) [5]。一道综合题的解决需要以解决每一分块问题的能力为基础，学生需要掌握每一分块解决问题的思想方法，也需要融通解决整个问题的思路。新的题目必然有新的解法，教学中对学生创新意识的培养应当贯穿始终。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.

[2] 彭海燕, 李维. 突出问题本质 落实核心素养——2023 年高考“平面解析几何”专题命题分析[J]. 中国数学教育(高中版), 2023(18): 53-58.

[3] 吴中林, 黎方平, 江泓. 深入几何本质 活用解析方法——2023 年高考“平面解析几何”专题解题分析[J]. 中国数学教育(高中版), 2023(Z4): 79-87.

[4] 余晓瑜. 从高考数学压轴题的一题多解探究高考考查学生数学核心素养的侧重点[J]. 理科爱好者, 2023(2): 55-57.

[5] 韦明钊. 新高考背景下高中数学核心素养培养的教学策略[J]. 数理天地(高中版), 2023(21): 88-90.