

Analytical Solution for Effects of Sediment on Fate and Transport Model of Pathogens

Guanghai Gao

College of Environmental Science and Engineering, Nankai University, Tianjin
Email: gaogh@nankai.edu.cn

Received: Apr. 2nd, 2017; accepted: Apr. 18th, 2017; published: Apr. 24th, 2017

Abstract

Fate and transport of pathogens are affected by sediment transport processes. Mathematical model is getting more attention to understand the fate and transport of both sediment and contaminants. In this study, analytical solutions of pathogens transport model are studied. Based on equilibrium assumptions, an analytical solution for vertical distribution of pathogens under sediment effects is obtained under equilibrium conditions. The analytical solution was then applied to verify a numerical model. The calculated and analytical solution agreed reasonably well. Not only can the analytical solution be used to verify pathogens fate and transport model, but also advance understanding on fate and transport of pathogens.

Keywords

Pathogens, Sediment Transport, Analytical Solution, Mathematical Model

泥沙影响下致病菌迁移转化模型解析解

高广海

南开大学环境科学与工程学院, 环境污染过程与基准教育部重点实验室, 天津
Email: gaogh@nankai.edu.cn

收稿日期: 2017年4月2日; 录用日期: 2017年4月18日; 发布日期: 2017年4月24日

摘要

致病微生物在地表水当中会吸附到泥沙上, 进而受泥沙运动的影响。水质模型作为研究污染物迁移转化的重要工具, 在研究泥沙对微生物的影响方面受到越来越多的关注。本文针对地表水中致病微生物在泥沙和颗粒物影响下分布的解析解进行研究。得出平衡状态下致病菌泥沙影响沿水深分布的解析解。验证

结果表明模型和解析解结果较为一致结果,说明该解析解可以作为模型验证的依据。对水质模型解析解的研究不但可以为模型的验证提供依据,而且对深入理解致病菌在泥沙影响下迁移转化规律有积极的意义。

关键词

致病菌, 泥沙运动, 解析解, 水质模型

Copyright © 2017 by author and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

地表水中致病微生物以不同形态存在,其中包括吸附在泥沙表面的吸附态,和自由存在的自由态。自由态微生物在水中随水体对流和扩散,而吸附态致病微生物随泥沙在水体中运动和扩散、沉降。当水文、水动力条件满足一些特定条件时,水中致病菌会随底泥的冲刷进入水体。泥沙表面吸附特征也是泥沙影响致病微生物的主要以素之一[1]。水质模型[2] [3] [4] [5]是研究环境问题的有效手段,近些年针对泥沙对污染物影响的研究受到越来越多的关注[2] [6] [7] [8] [9] [10]。

水质模型方程的解析解虽然只能在简化条件下求得,但其对检验模型的合理性、揭示问题的规律,有着极其重要的意义。袁德奎等[11]重金属在受泥沙影响时的解析解。大多水质模需要通过数值方法近似求的,因此在应用水质模型之前对数值解进行严格验证是十分必要的,通常验证资料包括实测数据、实验结果和解析解。由于当前针对致病菌在泥沙影响条件下的实测数据和实验结果还非常有限,因此展开致病菌在泥沙影响下的解析解研究是十分重要和有意义的[12]。

2. 泥沙运动方程

用来描述泥沙运动过程的对流 - 扩散方程通常可写为:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial us}{\partial x} + \frac{\partial vs}{\partial y} + \frac{\partial (w - w_s s)}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{tx} \frac{\partial s}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(D_{ty} \frac{\partial s}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(D_{tz} \frac{\partial s}{\partial z} \right) = 0 \quad (1)$$

其中 s = 泥沙浓度, w_s = 泥沙沉降速率

为了求解泥沙的对流扩散方程,算子分离法被用做对三维泥沙对流 - 扩散方程求解,将泥沙对流 - 扩散方程分解为一个垂向一维和水平向二维方程[13] [14]。其中水平向二维的对流 - 扩散方程形式如下:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial us}{\partial x} + \frac{\partial vs}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{tx} \frac{\partial s}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(D_{ty} \frac{\partial s}{\partial y} \right) = 0 \quad (2)$$

垂向一维泥沙对流 - 扩散方程为:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial (w - w_s s)}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(D_{tz} \frac{\partial s}{\partial z} \right) = 0 \quad (3)$$

其中垂向边界条件采用如下形式:

在水 - 大气界面,泥沙运动通量为零

$$-w_s s - D_{tz} \frac{\partial s}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

在底泥水体界面

$$-w_s s - D_{tz} \frac{\partial s}{\partial z} = E - D \quad (5)$$

其中 E 为冲刷率, D 为沉降率, $E - D =$ 净泥沙通量, 可以描述水沙界面泥沙的通量, 可用如下公式计算 [13] [15]

$$E - D = w_s (s_{a,e} - s_a) \quad (6)$$

其中 $s_a =$ 高于底泥表面高度 a 出的泥沙浓度, $s_{a,e} =$ 为该高度处的平衡浓度, 用如下方程计算 [11]:

$$s_{a,e} = 0.015 \frac{D_{50} T^{1.5}}{a D_*^{0.3}} \quad (7)$$

$D_{50} = 50\%$ 泥沙直径都小于的泥沙粒径; $T =$ 运输常数; $D_* =$ 颗粒系数而粘性泥沙的沉降与冲刷可分别用下式计算:

$$D = \begin{cases} w_s s_a \left[1 - \frac{\tau_b}{\tau_{c,d}} \right] & \tau_b \leq \tau_{c,d} \\ 0 & \tau_b > \tau_{c,d} \end{cases} \quad (8)$$

$$E = \begin{cases} M \left[\frac{\tau_b - \tau_{c,e}(z,t)}{\tau_{c,e}(z,t)} \right]^{n_0} & \tau_b > \tau_{c,e} \\ 0 & \tau_b \leq \tau_{c,e} \end{cases} \quad (9)$$

3. 致病菌对流 - 扩散方程

地表水中自由态的微生物对流扩散方程形式如下:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial c_d}{\partial t} + \frac{\partial u c_d}{\partial x} + \frac{\partial v c_d}{\partial y} + \frac{\partial w c_d}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{tx} \frac{\partial c_d}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(D_{ty} \frac{\partial c_d}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(D_{tz} \frac{\partial c_d}{\partial z} \right) \\ & = c_o^d + c_t^d - k c_d \end{aligned} \quad (10)$$

其中 C_d 为自由致病菌浓度, C_o^d 自由态致病菌输入或输出项; C_t^d 为自由态和吸附态致病菌转化项, k 为衰减或生长系数。

水体中吸附态致病菌迁移转化可以用以下对流扩散方程表示:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial c_p}{\partial t} + \frac{\partial u c_p}{\partial x} + \frac{\partial v c_p}{\partial y} + \frac{\partial (w - w_s) c_p}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{tx} \frac{\partial c_p}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(D_{ty} \frac{\partial c_p}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(D_{tz} \frac{\partial c_p}{\partial z} \right) \\ & = c_o^p + c_t^p + c_b^p - k c_p \end{aligned} \quad (11)$$

其中 C_p 为吸附态致病菌浓度, C_o^p 为吸附态致病菌输入输出项, C_t^p 为自由态和吸附态微生物转化项, C_b^p 表示随泥沙颗粒沉入底泥中或随底床泥沙的起悬从底泥进入水体中的致病菌。

由于自由态和吸附态污染物之间的转化过程相当复杂, 确定方程(10)和(11)中的 C_t^d 和 C_t^p 很困难。然而, 根据质量守恒可知 $C_t^d = -C_t^p$ 。将方程(10)和(11)叠加, 可以消去该转化项, 从而避开确定 C_t^d 和 C_t^p 的困难, 得到以水体中污染物总浓度为变量的控制方程:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial c_T}{\partial t} + \frac{\partial uc_T}{\partial x} + \frac{\partial vc_T}{\partial y} + \frac{\partial wc_T}{\partial z} - \frac{\partial(w_s s P)}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{ix} \frac{\partial c_T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(D_{iy} \frac{\partial c_T}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(D_{iz} \frac{\partial c_T}{\partial z} \right) \\ & = c_o^d + c_o^p + c_b^p - kc_T \end{aligned} \quad (12)$$

其中 C_T 为总致病菌浓度，可表示为

$$C_T = C_d + S \cdot P \quad (13)$$

C_b^p 可以用以下方程表示：

$$C_b^p = \max(q_{ero}, 0) P_b + \min(-q_{dep}, 0) P \quad (14)$$

其中： q_{ero} 为泥沙冲刷通量(kg/m²/s)， q_{dep} 为泥沙沉积通量(kg/m²/s)， P 为悬沙中污染物浓度。

分配系数 K_D 用如下形式表达：

$$K_D = \frac{P}{C_d} \quad (15)$$

自由态致病菌浓度可表示为：

$$C_d = f_d C_T \quad (16)$$

其中：

$$f_d = \frac{1}{1 + K_D S} \quad (17)$$

而

$$C_p = f_p C_T \quad (18)$$

其中

$$f_p = \frac{K_D S}{1 + K_D S} \quad (19)$$

像对三维泥沙运动方程求解一样，为了求解三维致病菌迁移转化模型方程(12)，采用的是算子分离法将三维方程分解为一个垂向一维方程和一个水平二维方程，具体形式如下所示。

二维水平向致病菌运动方法程：

$$\frac{\partial c_T}{\partial t} + \frac{\partial uc_T}{\partial x} + \frac{\partial vc_T}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{ix} \frac{\partial c_T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(D_{iy} \frac{\partial c_T}{\partial y} \right) = c_o^d + c_o^p - kc_T \quad (20)$$

垂向一维致病菌运动方程：

$$\frac{\partial c_T}{\partial t} + \frac{\partial wc_T}{\partial z} - \frac{\partial(w_s s P)}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(D_{iz} \frac{\partial c_T}{\partial z} \right) = 0 \quad (21)$$

在水体自由表面

$$-w_s s P - D_{iz} \frac{\partial c_T}{\partial z} = 0 \quad (22)$$

在水体与底泥界面

$$-w_s s P - D_{iz} \frac{\partial c_T}{\partial z} = F_{net} \quad (23)$$

其中 F_{net} 致病菌在水砂界面的净通量：

$$F_{net} = \max(q_{ero}, 0)P_b + \min(-q_{dep}, 0)P \quad (24)$$

4. 数学模型的解析解

致病菌在水体中的行为与水动力学条件、泥沙颗粒特性以及吸附解吸附过程等因素密切相关。一般情况下,很难求得方程(14)的解析解。若将水动力学条件、泥沙特性和吸附解吸附关系适当简化,则有可能得出特定条件下的解析解。而这样的解析解对于理论研究和数学模型的开发会有巨大的指导意义。

图 1 为设计算例示意图。 P 为吸附在悬浮泥沙上致病菌的浓度, P_b 为致病菌在底泥中的浓度, H 为水深, h_b 为底泥厚度。 S_0 为水体中初始泥沙浓度, C_T^0 为初始总致病菌浓度, C_T 总致病菌浓度。

为进一步简化问题,作如下假设:泥沙粒径均匀,沉降速度 w_s 为定值。水体中初始悬沙浓度 S_0 大于泥沙饱和浓度 S_e , 致病菌的衰减系数 k 为常数。

在定常流下,假定致病菌唯一源为底泥,致病菌的迁移转化模型方程可以简化为:

$$w_s c_p + D_{tz} \frac{\partial c_T}{\partial z} = 0 \quad (25)$$

其中 c_p = 吸附态致病菌浓度;

c_T = 总致病菌浓度

由方程(20) and (21), 吸附态致病菌浓度可表示为:

$$c_p = \frac{K_D S}{1 + K_D S} c_T \quad (26)$$

平衡状态下泥沙方程可表示为:

$$w_s S + D_{tz} \frac{\partial S}{\partial z} = 0 \quad (27)$$

解方程:

$$S = S_a e^{\frac{w_s(a-z)}{D_{tz}}} \quad (28)$$

把方程(26)和(28)带入到方程(25)得到:

$$w_s \frac{K_D S_a e^{\frac{w_s(a-z)}{D_{tz}}}}{1 + K_D S_a e^{\frac{w_s(a-z)}{D_{tz}}}} c_T + D_{tz} \frac{\partial c_T}{\partial z} = 0 \quad (29)$$

解方程(29), 可得:

$$\frac{c_T}{c_a} = \frac{1 + K_D S_a e^{\frac{w_s(a-z)}{D_{tz}}}}{1 + K_D S_a} \quad (30)$$

其中 $c_a = S_a P_b$ 。

通过对模型计算结果与前面推导出的平衡状态下致病菌垂向分布的解析解对比进行模型验证。相应参数设置如下 $H = 1.0 \text{ m}$, $S_a = 1 \text{ kg/m}^3$, $a = 0.05 \text{ m}$, $w_s = 0.02 \text{ m/s}$, $u_* = 0.1 \text{ m/s}$ and $k_{von} = 0.4$ 。 $P_b = 100 \text{ cfu/0.1 g}$, $K_D = 10 \text{ l/g}$ 。根据 van Rijn [15] 的建议,混合系数 $D_{tz} = \frac{1}{6} k u_* H$, 垂向均匀分为十层。模型据算结果与解析解对比如图 2, 图 3 所示。通过对比可以看出模型对泥沙和致病菌沿水深垂向分布均得出较好的计算结果。

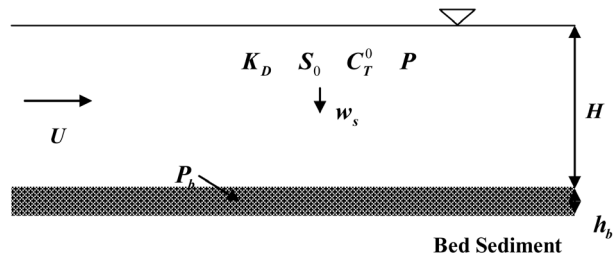


Figure 1. Example diagram
图 1. 算例示意图

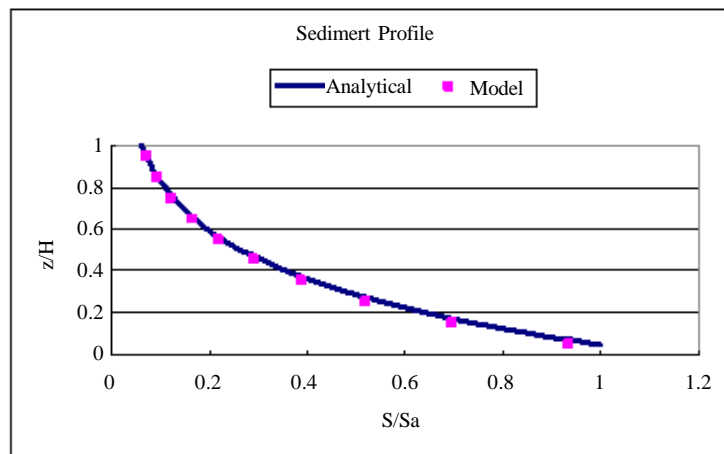


Figure 2. Comparison of model predicted sediment concentration and analytical solution
图 2. 模型计算泥沙浓度与解析解对比

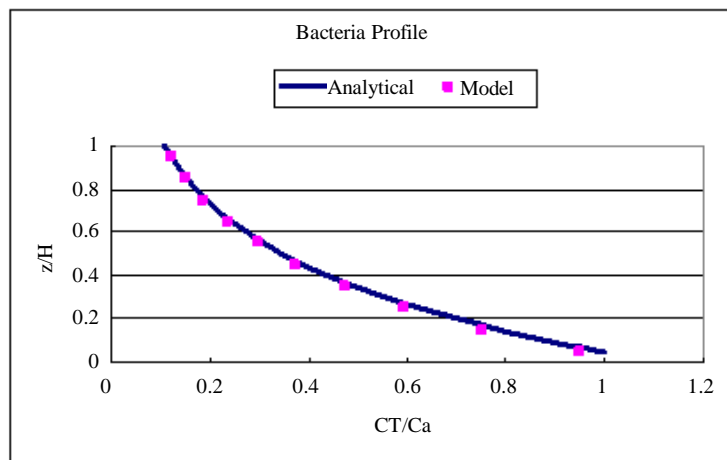


Figure 3. Comparison of model predicted pathogen concentration and analytical solution
图 3. 模型计算致病菌与解析解对比

5. 结论

本文通过引入平衡状态假设，对水沙环境中致病菌迁移转化模型进行简化，对其解析解进行了初步探索，得出平衡状态下致病菌分布的解析解。所用方法及所得结果可用于进一步的解析解研究，也可用

于数值模拟方法和程序的验证。本文还对模型针对推导出的解析解进行验证，模型给出较好模拟结果，这说明模型对致病菌在水沙环境中的迁移转化能较准确的进行模拟，同时本文中的解析解也可以作为其它类似模型，及今后致病菌和其它微生物模型的验证和校准等工作。本文仅开展了尝试性的工作，求解中所用的假设的条件比较理想化，需要在进一步的研究中逐步向实际情况靠近。

基金项目

天津市应用基础与前沿技术研究计划(14JCYBJC22300)。

参考文献 (References)

- [1] 禹雪中, 杨志峰, 钟德钰, 彭期冬. 河流泥沙与污染物相互作用数学模型[J]. 水利学报, 2006, 37(1): 10-15.
- [2] Bai, S. and Lung, W. (2005) Modeling Sediment Impact on the Transport of Fecal Bacteria. *Water Research*, **39**, 5232-5240.
- [3] Kashefipour, S.M., Lin, B., Harris, E. and Falconer R. (2002) Hydro-Environmental Modelling for Bathing Water Compliance of an Estuarine Basin. *Water Research*, **39**, 1854-1868.
- [4] Lin, B. and Falconer, R.A. (2001) Numerical Modelling of 3-D Tidal Currents and Water Quality Indicators in the Bristol Channel. *Water and Maritime Engineering, Proceedings of Institution of Civil Engineers*, **148**, 155-166.
- [5] Wu, Y., Falconer, R.A. and Lin, B. (2005) Modelling Trace Metal Concentration Distributions in Estuarine Waters. *Estuarine, Coastal and Shelf Science*, **64**, 699-709.
- [6] Characklis, G.W., Dilts, M.J., Simmons III, O.D., Likirdopulos, C.A., Krometis, L.A.H. and Sobsey, M.D. (2005) Microbial Partitioning to Settleable Particles in Storm Water. *Water Research*, **39**, 1773-1782.
- [7] Jamieson, R.C. *et al.* (2005) Resuspension of Sediment-Associated Escherichia in a Natural Stream. *Journal of Environmental Quality*, **34**, 581-589.
- [8] Fries, J.S. Characklis, G.W. and Noble, R.T. (2006) Attachment of Fecal Indicator Bacteria to Particles in the Neuse River Estuary, N.C. *Journal of Environmental Engineering*, **132**, 1338-1345.
- [9] Rehmann, C.R., Soupier, M.R. (2009) Importance of Interactions between the Water Column and the Sediment for Microbial Concentrations in Streams. *Water Research*, **43**, 4579-4589.
- [10] Gao, G., Falconer, R.A. and Lin, B. (2011) Numerical Modelling of Sediment-Bacteria Interaction Processes in Surface Waters. *Water Research*, **45**, 1951-1960.
- [11] 袁德奎, 郑康, 聂红涛. 水沙环境中重金属迁移转化模型的两个解析解[J]. 海洋技术, 2008, 27(3): 61-65.
- [12] 高广海. 水沙环境中致病菌迁移转化模型的解析解[J]. 水资源与水工程学报, 2013, 24(5): 81-84.
- [13] Lin, B. and Falconer, R.A. (1996) Numerical Modelling of Three-Dimensional Suspended Sediment for Estuarine and Coastal Waters. *Journal of Hydraulic Research*, **34**, 435-455.
- [14] Wu, Y. and Falconer, R.A. (2000) A Mass Conservative 3-D Numerical Model for Predicting Solute Fluxes in Estuarine Waters. *Advances in Water Resources*, **23**, 531-543.
- [15] Van Rijn, L.C. (1993) Principles of Sediment Transport in Rivers, Estuaries and Coastal Seas. Aqua Publications, Netherlands.

期刊投稿者将享受如下服务：

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱：aep@hanspub.org