

Classified System of Routine Map Projection Based on the Distant Function between the Pole to Coordinate Origin

Yexun Zhong^{1,2,3,4}, Baoqing Hu^{1,2}, Shaofeng Bian³, Cheng Chen³, Liwen Kang³

¹Key Laboratory of Beibu Gulf Environment Change and Resources Use, Ministry of Education, Guangxi Teachers Education University, Nanning Guangxi

²Guangxi Key Laboratory of Earth Surface Processes and Intelligent Simulation, Guangxi Teachers Education University, Nanning Guangxi

³Department of Navigation Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan Hubei

⁴Guangxi Regional Geographical Information Bureau of Surveying and Mapping, Nanning Guangxi
Email: gxzyxun@163.com, hbq1230@sina.com, sfbian@sina.com

Received: Dec. 3rd, 2016; accepted: Dec. 19th, 2016; published: Dec. 22nd, 2016

Copyright © 2016 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

The longitudes of earth ellipsoid intersect at the poles and the latitudes are parallel to each other. The grid of longitudes and latitudes on the map is the topological map of the grid of longitudes and latitudes on earth ellipsoid. The distance function of the poles to the coordinate origin in the projection grid is related to the classification of seven types of routine map projection. When the distance is equal to zero, it is azimuthal projection; when the distance is finite, it is conic projection or polyconic projection; when the distance is infinite, it is cylindrical projection. The latitude of azimuthal projection and pseudo-azimuthal projection are homocentric circles. The latitude of conic projection and pseudo-conic projection are homocentric circular arc. The latitude of polyconic projection is coaxial arc. The latitude of cylindrical projection and pseudo-cylindrical projection are parallel lines of the equator. All the longitudes of normal projection are straight, while for the pseudo-projection, only the central meridian of symmetry axis of a projection grid is a straight line and the remaining longitudes is the axisymmetric curve of the central longitudes. Meridian of polyconic projection is identical with the pseudo type projection. The distance function of the pole to the coordinate origin is equivalent to the classification of the routine map projection, so that the general definition of routine map projection can be deduced.

Keywords

Routine Map Projection, Topological Mapping, Pole, Coordinate Origin, Distant Function, Definition

基于极点到坐标原点的距离函数的常规地图投影分类体系

钟业勋^{1,2,3,4}, 胡宝清^{1,2}, 边少锋³, 陈 成³, 康丽文³

¹广西师范学院, 北部湾环境演变与资源利用省部共建教育部重点实验室, 广西 南宁

²广西师范学院, 广西地表过程与智能模拟重点实验室, 广西 南宁

³海军工程大学导航工程系, 湖北 武汉

⁴广西测绘地理信息局, 广西 南宁

Email: gxzyxun@163.com, hbq1230@sina.com, sfbian@sina.com

收稿日期: 2016年12月3日; 录用日期: 2016年12月19日; 发布日期: 2016年12月22日

摘 要

地球椭球面上的经线交于极点而纬线则相互平行。地图上的经纬网是地球椭球面上的经纬网的拓扑映射。投影网中极点到坐标原点的距离函数关联着7类常规地图投影的分类。距离等于零时对应着方位投影; 距离为有限值时对应着圆锥投影和多圆锥投影; 距离为无穷大时对应着圆柱投影。方位和伪方位投影的纬线为同心圆; 圆锥和伪圆锥投影的纬线为同心圆弧; 多圆锥投影的纬线为同轴圆弧; 圆柱和伪圆柱投影的纬线为赤道的平行线。所有正常投影的经线均为直线, 而伪型投影只有作为投影网对称轴的中央经线是直线, 其余经线为中央经线的轴对称曲线。多圆锥投影的经线与伪型投影相同。极点到坐标原点的距离函数, 与常规地图投影的分类具有等价关系, 从而可以推出常规地图投影的一般定义。

关键词

常规地图投影, 拓扑映射, 极点, 坐标原点, 距离函数, 定义

1. 引言

正轴投影——投影中心轴与地轴一致的条件下的地图投影, 即常规地图投影, 包括方位投影、伪方位投影、圆锥投影、伪圆锥投影、圆柱投影、伪圆柱投影和多圆锥投影。常规地图投影作为经典的地图投影, 在地图投影的教科书中已有较多的论述[1] [2] [3] [4] [5]。这七类地图投影, 方位和伪方位投影的投影面为平面, 具有纬线为同心圆的共性, 适用表示具有圆形轮廓的两极地区; 圆锥和伪圆锥投影的投影面为圆锥面, 具有纬线为同心圆弧的特点, 适用于表示沿纬线方向延伸的中纬度地区; 圆柱和伪圆柱投影的投影面为圆柱面, 纬线为赤道的平行线, 适用于表示沿纬线方向延伸的低纬度和赤道地区。多圆锥投影的纬线为同轴圆弧, 圆心在中央经线上, 中央经线为直线且为投影的对称轴, 非中央经线为对称于中央经线的曲线。多圆锥投影常作为世界地图的数学基础。伪方位投影、伪圆锥投影和伪圆柱投影的中央经线也是直线, 非中央经线为对称于中央经线的曲线[1] [2] [3] [4] [5]。然而, 导致这些地图投影之间差异的关键因素, 相互关系和演化规律的阐释却鲜有文献论述, 有鉴于此, 笔者提出了地图投影中基于极点与坐标原点距离函数的常规地图投影的分类体系。

2. 地球椭球面上的经纬网

2.1. 经纬线的定义及其结构特点

测绘学是研究对实体中与地理空间分布有关的各种几何、物理、人文及随时间变化的信息采集、处理、管理、更新和利用的科学与技术。测定地面点的几何位置是指测定以地球椭球面为参考面的地面点位置[6]。地面点位置用地理坐标——经纬度来表示，也可用地心直角坐标表示。地理坐标和地心直角坐标之间可以换算。经线被定义为包含地轴的平面与地球椭球面的交线，而地轴与地球椭球面的交点便是地极点，即所用经线都交于北极和南极。纬线被定义为平行于赤道平面的平面与地球椭球面的交线，这一定义使得不同纬度的纬线不会相交。这就是经纬线的结构特点。

2.2. 经纬网

[定义 1] 定向集：设 (D, \leq) 是偏序集，如果满足： $\forall x, y \in D, \exists z \in D, \text{s.t. } z \geq x \wedge z \geq y$ ，则称 D 为定向集。

所谓定向集 D ，是指 D 中任意两个元素都存在比它们大的 D 的第三个元素。

[定义 2] 网：设 D 是定向集，则每个映射 $S: D \rightarrow X$ 均称为 X 中的网。 $\forall n \in D$ 用 $S(n)$ 表示 S 在点 n 的值，网 S 又可记作 $S = \{S(n) | n \in D\}$ [7]。

显然，在地球椭球面上，当 $D_\varphi \in [0^\circ, \pm 90^\circ)$ 时， D_φ 是定向集，对于 $n_\varphi \in D_\varphi$ ， n_φ 为 $5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, \dots$ ，都可以构成网 $S_\varphi = \{S_\varphi(n_\varphi) | n_\varphi \in D_\varphi\}$ 。当 $D_\lambda \in [0^\circ, \pm 180^\circ]$ 时， D_λ 是定向集，对于 $n_\lambda \in D_\lambda$ ，同样可以建立不同经线间隔 n_λ 的网 $S_\lambda = \{S_\lambda(n_\lambda) | n_\lambda \in D_\lambda\}$ 。经线网和纬线的并集，即构成地球椭球面上的经纬网 $S_{\varphi\lambda} = S_\varphi \cup S_\lambda$ 。

3. 地图投影是地球椭球面上的经纬网在二维平面上的拓扑变换

3.1. 拓扑变换性质

拓扑学来源于希腊文 Τοποξ (位置)， $\lambda\omicron\gamma\omicron\xi$ (科学)，拓扑学在意译时可看成“位置几何”。由于图形的度量性质(长度、角度、面积等)在图形进行变换时，这些性质是不稳定的，因此不能作为深入研究图形特征的依据。拓扑学研究的是图形在连续变形下不变的整体性质，如分离性、可数性、紧性、连通性和多面体的维数、欧拉示性数等都是拓扑性质[8]。在拓扑概念下，曲直等价，长短等价。复杂的不规则的地理目标在拓扑概念下可用其拓扑等价物代替，从而简化了地理实体之间的空间关系演算。拓扑关系是指从几何观点看，由点状物体、线状物体和面状物体构成的网结构元素(点、线、面)之间的邻接关系、关联关系、包含关系和连通关系等。其中最重要的是邻接关系与关联关系[9]。

3.2. 地图投影的定义

[定义 3] 同胚：设 X 与 Y 是两个随意的拓扑空间，并设 $f: X \rightarrow Y$ 。如果 f 是连续的双一一函数，并且它的反函数 f^{-1} 也是连续的，那末， f 就叫做空间 X 到空间 Y 上的一个同胚或拓扑映射或拓扑变换；此时空间 X 与空间 Y 叫做同胚的，记作 $X \approx Y$ 。

设 S^2 表示单位球面： $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ ，令 z 表示它的“北极” $(0, 0, 1)$ ‘则通过球极平面射映(stereographic projection)立即看出“刺孔球面” $(S^2 - \{z\})$ 与平面 $x_3 = -1$ 同胚，从而与坐标平面 Y 同胚： $(S^2 - \{z\}) \approx Y$ 。

“刺孔球面” $(S^2 - \{z\})$ 与二维平面 Y 同胚原理，是建立以球面坐标(以纬度 φ 与经度 λ) 的球面二维场与平面二维场(平面直角坐标 x, y) 之间的地图投影的基本原理。“刺孔球面”实际上就是去除“北

极”和“南极”的球面，因为这两点在地轴上，地轴上的无限多点在平面上的投影只有一点，不满足拓扑变换的双一一函数关系[10]。

[定义 4] 地图投影：存在“刺孔球面” $(S^2 - \{z\}) = X$ ，二维平面 Y 以及变换
 $f: X \rightarrow Y, f \supset f_1, f_2 | f_1 = f_2 \vee f_1 \neq f_2$ ，若 $\forall p(\varphi, \lambda) \in A \in (S^2 - \{z\}) = X$ 满足：

$$\left. \begin{array}{l} x = f_1(\varphi, \lambda) \\ y = f_2(\varphi, \lambda) \end{array} \right\} (x, y) \in Y \quad (1)$$

则称满足(1)式的变换为地图投影。 $f \supset f_1, f_2$ 不同，便构成不同的地图投影[11]。

3.3. 地图的经纬网及坐标原点和极点

[定义 5] 地图的经纬网：存在地球椭球面上的经纬网 $S_{\varphi\lambda} = (S_\varphi \cup S_\lambda) \in X$ ，它在 f 下的拓扑映射便是地图上的经纬网：

$$f(S_{\varphi\lambda}) \in Y | S_{\varphi\lambda} = (S_\varphi \cup S_\lambda) \in X \quad (2)$$

(2) 式中的 $f(S_{\varphi\lambda})$ 即地图平面 Y 上的经纬网。

拓扑变换必须满足的双一一函数关系，使得地球椭球面上的经线交点(极点) $Q \in S_{\varphi\lambda}$ 在拓扑变换下变换为经纬网中的极点 $f(Q) \in f(S_{\varphi\lambda})$ ，而坐标原点 $C \in S_{\varphi\lambda}$ 则变换为经纬网中的坐标原点 $f(C) \in f(S_{\varphi\lambda})$ 。由于方位投影、圆锥投影和圆柱投影都是可展面，因此可以定义平面上两个投影点间的距离。

[定义 6] 度量或距离函数：设 x, y, z, \dots 是集合 Y 的元素，如果存在着函数 $d: Y \times Y \rightarrow R$ ，满足下面两个度量公理(Y 是二维空间，即 $Y \in R^2$)：

M1. 恒等定律： $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ；

M2. 三角形不等式： $d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y)$ ；

那么， (Y, d) 叫做一个度量空间， d 叫做 Y 上的度量或距离函数， Y 的所有元素叫做度量空间 (Y, d) 的点， $d(x, y)$ 叫做两点 x 与 y 之间的距离， Y 的任何子集都叫做空间 (Y, d) 的点集。

根据距离函数的定义，可以定义投影网络中极点 $f(Q)$ 和坐标原点 $f(C)$ 的距离函数 $d(f(Q), f(C))$ 。由于常规地图投影与距离函数密切相关，从而可推出常规地图投影的一般定义，并在一般定义的基础上，通过约束条件的不同，分别推出各类常规地图投影的具体定义，从而建立基于极点和坐标原点的距离函数的常规地图投影定义体系。

4. 常规地图投影的定义体系

4.1. 常规地图投影的一般定义

常规地图投影的类型与投影网络中极点到坐标原点的距离大小密切相关，两者具有等价关系，因此，得常规地图投影的一般定义：

[定义 7] 常规地图投影：在投影中心轴与地轴一致的条件下，设 $f(Q) \in f(S_{\varphi\lambda})$ 为极点的投影， $f(C) \in f(S_{\varphi\lambda})$ 为坐标原点的投影，具有距离函数的投影：

$$d(f(Q), f(C)) \in [0, \infty) \quad (3)$$

称为常规地图投影，即方位投影、伪方位投影、圆锥投影、伪圆锥投影、圆柱投影、伪圆柱投影和多圆锥投影。

4.2. 方位投影

[定义 8] 方位投影：设经线 λ_i 的曲率为 $k_i \in \lambda_i \in f(S_{\varphi\lambda})$ ， $f(Q) \in f(S_{\varphi\lambda})$ 为极点的投影， $f(C) \in f(S_{\varphi\lambda})$ 为坐标原点的投影，若距离函数满足：

$$d(f(Q), f(C)) = 0 \wedge \forall P_{ij} \in f(S_{\varphi\lambda}) \Rightarrow P_{ij} \in \varphi_j = 2\pi r_j |r_j = P_{ij} f(Q) \quad (4)$$

则称 $f(S_{\varphi\lambda})$ 为方位投影。

1) 当 $\forall \lambda_i \in f(S_{\varphi\lambda}) \Rightarrow k_i = 0$ 为正方位投影(见图 1)；

2) $\exists \lambda_0 \wedge k_0 = 0 \in \lambda_0 \wedge \forall \lambda_i \in \lambda_0^c \in f(S_{\varphi\lambda}) \Rightarrow k_i \neq 0$ 时，为伪方位投影(见图 2)。

第二个条件表明，伪方位投影只有作为对称轴的中央经线 λ_0 是直线，其余经线皆为曲线，而正方位投影的所有经线皆为直线。

4.3. 圆锥投影

[定义 9] 圆锥投影：设经线 λ_i 的曲率为 $k_i \in \lambda_i \in f(S_{\varphi\lambda})$ ， $f(Q) \in f(S_{\varphi\lambda})$ 为极点的投影， $f(C) \in f(S_{\varphi\lambda})$ 为坐标原点的投影，若距离函数满足：



Figure 1. Azimuthal projection
图 1. 方位投影

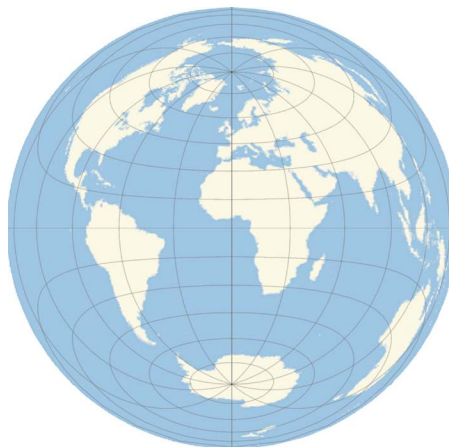


Figure 2. Pseudo-azimuthal projection
图 2. 伪方位投影

$$d(f(Q), f(C)) \in (0, \infty) \wedge \forall P_{ij} \in f(S_{\varphi\lambda}) \Rightarrow P_{ij} \in \varphi_j \in 2\pi r_j \mid r_j = P_{ij} f(Q) \quad (5)$$

则称 $f(S_{\varphi\lambda})$ 为圆锥投影。

- 1) 当 $\forall \lambda_i \in f(S_{\varphi\lambda}) \Rightarrow k_i = 0$ 为正圆锥投影(见图 3);
- 2) $\exists \lambda_0 \wedge k_0 = 0 \in \lambda_0 \wedge \forall \lambda_i \in \lambda_0^c \in f(S_{\varphi\lambda}) \Rightarrow k_i \neq 0$ 时, 为伪圆锥投影(见图 4)。

第二个条件表明, 伪圆锥投影只有作为对称轴的中央经线 λ_0 是直线, 其余经线皆为曲线, 而正圆锥投影的所有经线皆为直线。

4.4. 圆柱投影

从中心射影引进无穷远元素, 可拓广欧氏平面。在拓广的欧氏平面上, 无穷远点是二维空间中平行直线的交点[12]。

[定义 10] 圆柱投影: 设经线 λ_i 的曲率为 $k_i \in \lambda_i \in f(S_{\varphi\lambda})$, $f(Q) \in f(S_{\varphi\lambda})$ 为极点的投影, $f(C) \in f(S_{\varphi\lambda})$ 为坐标原点的投影, 若距离函数满足:

$$d(f(Q), f(C)) \in \infty \wedge \forall P_{ij} \in f(S_{\varphi\lambda}) \Rightarrow P_{ij} \in \varphi_j = 2\pi r_j \wedge r_j \in \infty \quad (6)$$

则称 $f(S_{\varphi\lambda})$ 为圆柱投影。

- 1) 当 $\forall \lambda_i \in f(S_{\varphi\lambda}) \Rightarrow k_i = 0$ 为正圆柱投影(见图 5);

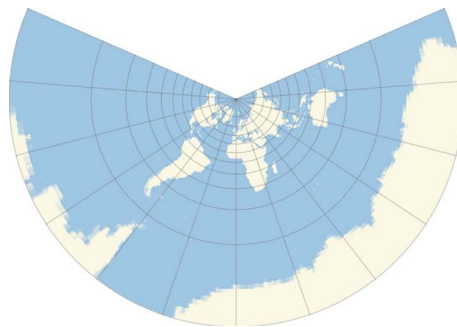


Figure 3. Conic projection
图 3. 圆锥投影

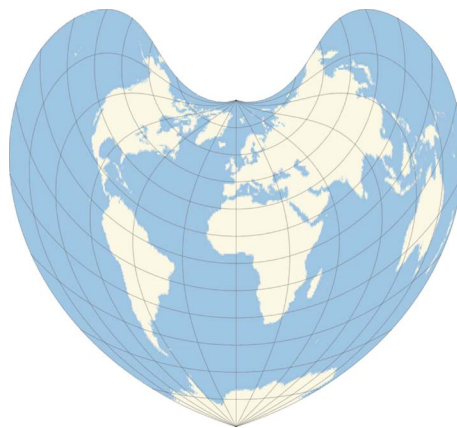


Figure 4. Pseudo-conic projection
图 4. 伪圆锥投影

2) $\exists \lambda_0 \wedge k_0 = 0 \in \lambda_0 \wedge \forall \lambda_i \in \lambda_0^c \in f(S_{\varphi_i}) \Rightarrow k_i \neq 0$ 时, 为伪圆柱投影(见图 6)。

第二个条件表明, 伪圆柱投影只有作为对称轴的中央经线 λ_0 是直线, 其余经线皆为曲线, 而正圆柱投影的所有经线皆为直线。

4.5. 多圆锥投影

[定义 11] 多圆锥投影: 设 $f(Q) \in f(S_{\varphi_i})$ 为极点的投影, $f(C) \in f(S_{\varphi_i})$ 为坐标原点的投影, 若距离函数和经线满足:

$$\begin{aligned} d(f(Q), f(C)) \in (0, \infty) \wedge \forall P_{ij} \in f(S_{\varphi_i}) \Rightarrow P_{ij} \in \varphi_j \in 2\pi r_j \mid \gamma_j = g(\varphi_j) \\ \exists \lambda_0 \wedge k_0 = 0 \in \lambda_0 \wedge \forall \lambda_i \in \lambda_0^c \in f(S_{\varphi_i}) \Rightarrow k_i \neq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

则称 $f(S_{\varphi_i})$ 为多圆锥投影[13] (见图 7)。

5. 结论

地球椭球面上的经线交于极点 Q , 而纬线则相互平行。经纬线在地球椭球面上的空间结构和关系是

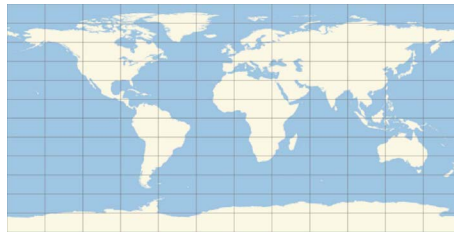


Figure 5. Cylindrical projection

图 5. 圆柱投影

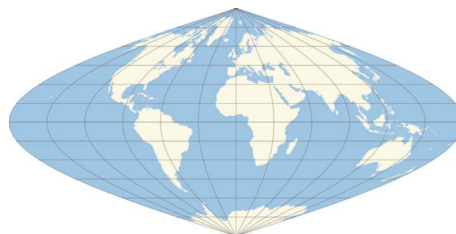


Figure 6. Pseudo-cylindrical projection

图 6. 伪圆柱投影

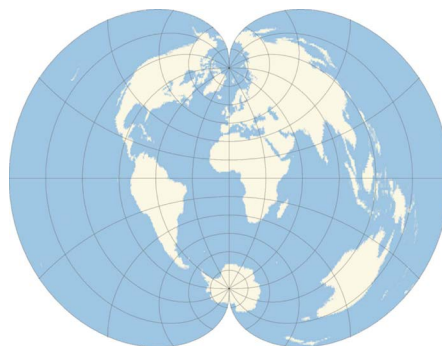


Figure 7. Polyconic projection

图 7. 多圆锥投影

地图投影的原型。地图投影本质上是刺孔球面在二维平面上的拓扑影射。拓扑影射必须满足的双一一函数关系,使得地球椭球面的经线交点 Q 和坐标点 C ,在地图投影中必有对应的象 $f(Q)$ 和 $f(C)$ 。在投影中心轴与地轴一致的正轴条件下,正方位投影、伪方位投影、正圆锥投影、伪圆锥投影、正圆柱投影、伪圆柱投影和多圆锥投影可用其极点投影 $f(Q)$ 到坐标原点的投影 $f(C)$ 的距离函数来确定。 $d(f(Q), f(C)) \in [0, \infty)$ 的取值,对应着地图投影的类型。所有正常投影的经线均为直线。伪方位投影、伪圆锥投影和伪圆柱投影等“伪”字型投影的共同点是,都存在一条作为投影对称轴的中央直经线,其余经线均为中央经线的轴对称曲线,其曲率随着与中央经线经差的大小而变化。非中央经线的曲率是否为零,是正、伪型投影的主要区别。多圆锥投影的经线也具有以中央经线的轴对称曲线的特点。本文的创新意义及其与传统的地图投影分类的主要特点是:本文揭示了常规地图投影的类型与投影网络中极点和坐标原点的距离大小密切相关性,给出了以极点和坐标原点的距离函数为变量的包括正方位投影、伪方位投影、正圆锥投影、伪圆锥投影、正圆柱投影、伪圆柱投影和多圆锥投影等七类常规地图投影的一般定义,从而使其获得高度的概括。

基金项目

本文得到国家自然科学基金项目(41671459; 41361022; 41571441); 广西科技开发项目(2014DD29090); 广西北部湾重大基础项目子课题(2012GXNSFEA053001)的资助,谨致感谢。

参考文献 (References)

- [1] 胡毓钜, 龚剑文. 地图投影(第二版) [M]. 北京: 测绘出版社, 2006.
- [2] 胡毓钜, 龚剑文. 地图投影图集(第三版) [M]. 北京: 测绘出版社, 2006.
- [3] 祝国瑞. 地图学(第三版) [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2004.
- [4] 钟业勋. 数理地图学[M]. 北京: 测绘出版社, 2007.
- [5] 钟业勋, 胡毓钜. 圆柱投影, 圆锥投影和方位投影的统一数学模型及应用比较研究[J]. 地图, 1992(1): 12-17.
- [6] 宁津生, 陈俊勇, 李德仁, 等. 测绘学概论[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2006.
- [7] 程吉树, 陈水利. 点集拓扑学[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [8] 谷超豪. 数学词典[M]. 上海: 上海辞书出版社, 1992.
- [9] 毋河海. GIS 地图信息综合基本模型与算法[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2010.
- [10] 李孝传, 陈玉清. 一般拓扑学导引[M]. 北京: 高等教育出版社, 1982.
- [11] 钟业勋, 童新华, 韦清媛. 地图投影的拓扑学原理[J]. 桂林理工大学学报, 2014, 34(3): 510-514.
- [12] 罗淼, 严虹, 廖义琴. 几何学概论[M]. 北京: 清华大学出版社, 2011.
- [13] 钟业勋, 胡宝清, 童新华, 等. 地图学概念的数学表述研究[M]. 北京: 科学出版社, 2015.

期刊投稿者将享受如下服务：

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱：ag@hanspub.org