

Evaluation on High-Degree Series Expansion of the 3-D Isotropic Forward Gravity Field Modelling

Yixin Xiao¹, Hok Sum Fok¹, Wenbin Shen^{1,2*}

¹School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan Hubei

²State Key Laboratory of Information Engineering in Surveying, Mapping and Remote Sensing, Wuhan University, Wuhan Hubei

Email: wbs Shen@sgg.whu.edu.cn

Received: May 20th, 2018; accepted: Jun. 6th, 2018; published: Jun. 13th, 2018

Abstract

The global gravity forward modelling of the shallow layer mass distribution is of vital importance in the computation of Bouguer anomaly, isostatic compensation and ultra-high resolution Earth's gravity field. In this paper, based on the 3-D isotropic gravity forward modelling method, the contribution of each expansion power to the overall resultant forward modelling gravity in each geological province of GEMMA crustal model is further investigated. Consequently, based on the discrepancy of individual binominal expansion of each geological province and the overall resultant forward modelling gravity, for the accuracy criterion of 0.1 mGal, if considering only the influence of forward modelling method, the truncation degree/order of geological provinces with shallower crust is 6, while the one with thicker crust is supposed to truncate at 12th power.

Keywords

Forward Modelling, Spectral Analysis, Crustal Structure, Series Expansion

三维各向异性重力正演模型的高阶展开项评估

肖翼忻¹, 霍学深¹, 申文斌^{1,2*}

¹武汉大学测绘学院, 武汉

²武汉大学测绘遥感国家重点实验室, 武汉

Email: wbs Shen@sgg.whu.edu.cn

收稿日期: 2018年5月20日; 录用日期: 2018年6月6日; 发布日期: 2018年6月13日

*通讯作者。

文章引用: 肖翼忻, 霍学深, 申文斌. 三维各向异性重力正演模型的高阶展开项评估[J]. 地球科学前沿, 2018, 8(3): 500-512. DOI: [10.12677/ag.2018.83054](https://doi.org/10.12677/ag.2018.83054)

摘要

全球范围地表浅层质量分布的重力正演, 在计算评估布格异常、地壳均衡补偿、超高精度地球重力场构建及地球内部结构反演时具有重要意义。本文在考虑质量分布的三维各向异性的重力正演方法的基础上, 考察GEMMA地壳结构模型下各个大地构造分区重力正演各阶结果对总体重力正演结果的贡献率。以仅考虑重力正演算法的误差因素的影响量级为0.1 mGal精度为判断准则, 通过考察在空域下各个大地构造分区按照级数展开阶数的结果与总体重力正演的结果的差值, 结果表明, 其中地壳厚度较浅的大地构造分区(洋壳、大洋中脊)所需截断阶次为6阶, 而地壳厚度较厚的大地构造分区(造山带、盆地、火成岩省、地盾、地台)所需截断阶次为12阶。

关键词

重力正演, 球谐分析, 地壳结构模型, 级数展开

Copyright © 2018 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

全球范围地球浅层质量分布的重力正演在计算评估布格重力异常与地壳均衡补偿时具有不可替代的重要性[1] [2] [3]。地形信息与重力相关联物理量的短波信号具有较强的相关性, 通常能够提供在不小于~10 km 分辨率的重力场信号, 这在缺乏充足密布观测值或观测值精度不足以支持高分辨率模型建模的偏远地区显得尤为关键[4]。高分辨率数字地形模型(DTM, Digital Terrain Models)提供了研究重力场精细结构的关键数据。在已有高精度重力场模型的基础上, 辅以高分辨 DTM 在空域或谱域进行牛顿积分, 目前已经构建了高精度甚至超高精度重力场模型[5] [6] [7]。

空域重力正演, 是对地球物质在球谐[8]或椭球谐[9]近似下的牛顿积分的楔形体(Tesseroid) [10] [11] [12] [13]或者柱体[14] [15]严密解析的实现。在地形质量(Topographic Masses)的实际计算中需要权衡计算的效率与精度, 前人的研究表明, 使用精密数值积分与楔形体公式相结合的方法效果最佳[16] [17] [18]。

谱域重力正演采用截断的[2]或严密解析的[19]二项展开全球积分而得到对应的球谐系数。空域法与谱域法均成功建立在~10 km 的尺度上的地球地形引力位模型[20], 并且所建立模型互相吻合一致。但谱域法在计算中由于球谐分析及球谐综合中快速傅立叶变换(FFT, Fast-Fourier Transforms)的增益, 而有相较于空域法不可比拟的效率。然而, 值得指出的是空域法在计算限定地理范围的区域性计算中仍有更少所需计算数据的优势。根据分层质量模型的边界及分布信息, 能分别求得低分辨率[21] [22] [23]、高分辨率[7] [24]与超高分辨率(例如 Balmino (2012)给出的~2 km 分辨率, 阶次达到 10800 阶的模型) [25]的地形质量相关模型。其中, 严密解析公式的缺陷在于边界函数[26]球谐的计算量过大。Hirt and Kuhn (2012) [27]具体评估了地球地形二项展开直至 10 阶的每一阶对其引力位的贡献, 并量化了忽略高阶项带来的截断误差。Root *et al.* (2016) [24]引入了快速谱重力正演方法(FSM), 从密度分布和地形函数球谐分析得到球谐系数, 并提出了削弱深层物质截断误差的方法。相较于考虑球近似的谱方法, 椭球谐谱方法考虑地球扁率带来的纬度相关地形引力位偏差, 该偏差极值达到 150 mGal [28]。由 Claessens and Hirt (2013) [28]提出的谱组合 HC (Harmonic Combination)方法相较于过去普遍使用的 EI (Extension Integration)方法, 有效地

削弱了残余纬度相关误差与球谐阶次相关误差。

无论在空域法还是谱域法，能最佳描述真实地球的物质分布模型都是重力正演模型的关键，物质分布模型包括地球物理表面描述及地球内部物质分布情况。Dziewonski and Anderson (1981) [29]发布了地球物理学最广为使用的一维地壳模型 PREM (the Preliminary Reference Earth Model)，该模型在考虑非粘弹性与各向异性的基础上给出了地球内部包括地幔、地核的地震波波速及密度的径向变化。而相较于仅仅给出径向变化的一维模型，三维分层模型给出不同深度下物质的横向分布，能较好地描述真实地球内部细节。

目前，结合全球覆盖的重力卫星数据，Mooney *et al.* (1998) [30]发表了多源地震波数据与重力梯度数据联合反演得到的分辨率为 $0.5^\circ \times 0.5^\circ$ 的地壳结构模型 GEMMA (GOCE Exploitation for Moho Modelling and Applications)，该模型在全球范围内与 GOCE 重力梯度观测值有较好一致性。GEMMA 地壳结构模型由归算的 GOCE 重力梯度观测值联合先验地震波结果 CRUST2.0 地壳结构模型反演求得，其中，还依据 USGS 给出的主要地质分区与 Gladczenko *et al.* (1997) [31]给出的大洋中脊数据精化了地壳密度函数密度与深度的关系。GEMMA 正演所得对应重力观测值与 GOCE 重力梯度观测值总体标准差在 49 mE。

本文在考虑深层误差影响的快速谱域重力正演方法的基础上，加以对三维各向异性地壳结构模型 GEMMA 的考虑，并以此评估该正演模型的高阶展开项的精度与效率，而进一步回答在使用该正演模型将地球表面重力观测值归算到浅层地壳时满足 0.1 mGal 精度所需展开的阶数。

2. 数据与方法

2.1. GEMMA 地壳模型

GEMMA 地壳结构模型是欧洲航天局(ESA, European Space Agency)的地球重力场和海洋环流探测卫星(GOCE, Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer)的重力梯度产品的应用之一。该地壳结构模型反演地壳地幔边界 Moho 面与地壳密度时，以地震波折射资料反演得到的 CRUST2.0 地壳结构模型为基础，考虑 USGS1995 发布的大地构造分区、全球尺度因子及地壳密度随深度变化的因素，直接使用 GOCE 重力梯度径向观测值进行反演。最终，联合反演得到分辨率为 $0.5^\circ \times 0.5^\circ$ 的地壳结构模型 GEMMA，该模型在全球范围内与 GOCE 重力梯度观测值有较好一致性，GEMMA 正演所得对应重力观测值与 GOCE 重力梯度观测值总体标准差在 49 mE。

2.2. 三维各向异性的重力正演

根据牛顿力学万有引力，在 Σ 外的一点 P 的保守无旋引力位 V 由全球物质的积分并将其中欧几里得距离倒数核函数 $1/\ell$ 作球谐展开可以得到[32]：

$$V(P) = \frac{GM}{R} \sum_{n,m} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \frac{1}{M(2n+1)} Y_{nm}(\Omega) \int_{\Sigma} \left(\frac{r'}{R}\right)^n \rho(r', \Omega') Y_{nm}^*(\Omega') d\Sigma \quad (1)$$

其中， G 为地球引力常数， M 为地球质量， R 为地球的平均半径， ρ 为 Σ 内物质的密度分布，且 $Q \in \Sigma$ ； $\ell(P, Q)$ 为计算点 $P(r, \Omega)$ 与无穷小体积元 $d\Sigma = r^2 dr d\Omega$ 的流动点 $Q(r', \Omega')$ 在地心球坐标系 (r, Ω) 下的欧几里得距离； r 为地心距离， $d\Omega = \sin\theta d\theta d\lambda$ 为单位球上的面元， θ 和 λ 分别表示余纬和经度。 $\sum_{n,m} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n$ 为阶次求和的简写， Y_{nm} 表示完全正则化拉普拉斯面球谐函数，写作：

$$Y_{nm}(\theta, \lambda) = P_{nm}(\cos\theta) \begin{cases} \cos(m\lambda), & m \leq 0 \\ \sin(m\lambda), & m > 0 \end{cases} \quad (2)$$

其中, P_{nm} 为第一类(4 π -normalized)完全正则化缔合勒让德函数。由此, 从(1)提取得无量纲的完全正则化球谐系数:

$$V_{nm} = \frac{3}{4\pi\bar{\rho}R^3(2n+1)} \int_{\Sigma} \left(\frac{r'}{R}\right)^n \rho(r', \Omega') Y_{nm}^*(\Omega') d\Sigma \quad (3)$$

其中, 将 M 近似替换为 $\frac{4}{3}\pi\bar{\rho}R^3$, $\bar{\rho}$ 为地球的平均密度。为了推导地球分层引力位公式, [26]将浅层地球物质按照特定的规则划分为一系列物质层, 在此将该注记方法概括如下, 除此之外其他类似详见[23] [28] [33]。提取一个半径定义域为 $R^{(\omega)} + r_i^{(\omega)}(\Omega') \leq r' \leq R^{(\omega)} + r_e^{(\omega)}(\Omega')$ 的分层 ω ($\omega = [1, 2, \dots, \omega_{\max}]$), 给定分层的完全正则化球谐系数可以由下式给出:

$$V_{nm}^{(\omega)} = \frac{3}{4\pi R^{n+3}(2n+1)} \int_{\sigma} \int_{R^{(\omega)} + r_i^{(\omega)}(\Omega')}^{R^{(\omega)} + r_e^{(\omega)}(\Omega')} r'^{n+2} \frac{\rho^{(\omega)}(r', \Omega')}{\bar{\rho}} Y_{nm}^*(\Omega') d\Omega' dr \quad (4)$$

其中, 在给出半径范围及对应径向距离的时候做出了球近似。给定分层在点 Ω' 的密度 $\rho(r, \Omega')$ 的横向分布通常由离散点表示, 而其径向分布则由多项式函数表示[34]。由于 GEMMA 地壳模型同时给出了在横向和径向上的密度变化, 并且一个分层的纵向变化与其他分层均无关, 那么在与 Ω 分离变量 r 后密度分布函数可以写作:

$$\rho^{(\omega)}(r', \Omega') = \rho^{(\omega)}(\Omega') + \sum_{i=1}^I \alpha_i(\Omega')(R' - r')^i \quad (5)$$

其中, R' 为目标层的上边界, α_i 为多项式系数, I 为给定分层定义径向密度变化所需的最大阶数。同时, 在求得球谐系数后, 重力扰动在球谐近似下可以由引力位求得, 地形改正及地壳密度异常改正均能通过移除密度异常结构的引力信号得到, 该过程也被称为剥离(Stripping) [35]。

对(4)中对径向距离积分的项单独列出, 则对其积分的解引入二项式展开[2], 并将其截断到阶 σ ($\sigma < n+3$)后, 得到精度允许下计算量更小的数值解:

$$\begin{aligned} \int_{R^{(\omega)} + r_i^{(\omega)}(\Omega')}^{R^{(\omega)} + r_e^{(\omega)}(\Omega')} r'^{n+2} dr &= \frac{R'^{(n+3)}}{n+3} \sum_{k=0}^{\sigma} \binom{n+3}{k} \left[\left(\frac{r_e^{(\omega)}}{R'^{(\omega)}} \right)^k - \left(\frac{r_i^{(\omega)}}{R'^{(\omega)}} \right)^k \right] + \epsilon\sigma \\ &= \frac{R'^{(n+3)}}{n+3} \sum_{k=0}^{\sigma} \binom{n+3}{k} F_k^{(\omega)}(\Omega') + \epsilon\sigma \end{aligned} \quad (6)$$

其中, $\epsilon\sigma$ 为二项式的截断误差, $F_k^{(\omega)}(\Omega')$ 为正演模型第 k 阶的高度函数[33]。高度函数在计算效率与计算精度上的截断衡量在 Hirt and Kuhn (2012) [27]中给出了进一步的讨论, 其指出 7th 阶项满足 2160 阶次的球谐系数的精度要求。将式(6)代入式(4), 并将积分移入二项式求和中, 最终所求分层的球谐引力位系数为:

$$V_{nm}^{(\omega)} = \frac{3}{4\pi(n+3)(2n+1)} \frac{R'^{(n+3)}}{R^{n+3}} \sum_{k=0}^{\sigma} \binom{n+3}{k} \int_{\sigma} \frac{\rho^{(\omega)}(\Omega')}{\bar{\rho}} F_k^{(\omega)}(\Omega') Y_{nm}^*(\Omega') d\Omega \quad (7)$$

根据 Root *et al.* (2016) [24], 公式(7)的解可以通过物质密度分布函数 $\frac{\rho(\Omega')}{\bar{\rho}}$ 与高度函数 $F^{(\omega)}(\Omega')$ 在空域上的乘积求得, 并进一步对函数乘积进行全球球谐分析(Global Spherical Harmonic Analysis, GSHA)后可得到其对应球谐系数。其中, GSHA 的实现是通过 Mark Wieczorek 所编写的程序包 SHTOOL 4.2 (<https://shtools.oca.eu/shtools/>)完成, 该程序包涵盖适用于球谐计算的 Fortran/Python 方法。

任意物质分层实际密度的表示如前文所述, 通过各层横向分布的径向多级多项式函数(通常取至第 1 阶)实现, 但在 GEMMA 模型中额外给出了 GOCE 重力梯度观测值最小二乘估计得到的全球地壳模型尺度因子 $h(\Omega')$ 及各个地质分区 χ_i 及其密度函数多项式, 于是 GEMMA 函数地壳分层下的三维密度描述给出如下:

$$\rho^{(\omega)}(r', \Omega') = h^{(\omega)}(\Omega') \sum_{i=0}^M [\alpha_{i0} + \alpha_{i1}(R' - r')] \chi_i \quad (8)$$

类似于(4)~(7)对于横向密度分布的重力正演模型的推导, 任意物质分层三维各向异性的引力位球谐系数可得:

$$V_{nm}^{(\omega)} = \frac{3h^{(\omega)}}{4\pi(2n+1)} \frac{R'^{(\omega)n+3}}{R^{n+3}} \sum_{i=0}^M \chi_i \int_{\sigma} \left[\frac{\alpha_{i0} + \alpha_{i1}R'}{\bar{\rho}(n+3)} \sum_{k=0}^{\sigma} \binom{n+3}{k} F_k^{(\omega)}(\Omega') - \frac{\alpha_{i1}R'^{(\omega)}}{\bar{\rho}(n+4)} \sum_{k=0}^{\sigma+1} \binom{n+4}{k} F_k^{(\omega)}(\Omega') \right] Y_{nm}^*(\Omega') d\Omega \quad (9)$$

其中, 方括号内的公式分别应用式(6)中二维各向异性的 FSM 解得。GEMMA 地壳模型描述文件中的与地质分区相关的径向变化密度函数以径向不同深度下的离散点给出, 不考虑全球地壳模型尺度因子 $h^{(\omega)}(\Omega')$ 在不同地质分区下的多项式系数 $\{\alpha_{i0}, \alpha_{i1}\}$ 在最小二乘估计后给出在表 1。

2.3. 重力正演模型的效率与精度

在重力正演模型推演中公式本身引入的误差主要包含两类误差: 球谐近似的误差, 边界函数二项展开的截断误差。其中, 与纬度相关的球谐近似误差[28], 按照其给出的谐组合(HC, Harmonic Combination)椭球谐重力正演下全球重力扰动与球谐重力正演下重力绕动结果的比对, 其差值在-2.9 mGal 到 4.7 mGal 之间, 且均值为 0.6 mGal, 差值标准差 1.2 mGal。在频域上的 0 到 150 阶、300 阶到 2160 阶分别表现出

Table 1. Density polynomials for Geological provinces, taking the upper crust boundary as the reference surface

表 1. 以地壳上边界为深度参考面的各个大地构造单元的密度多项式系数

下标	地质构造单元	深度/(km)	α_0 (km/m ³)	α_1 (km/m ³)
1	OCC (Oceanic Crust)	0.0~3.0	2600	125
		3.0~5.0	2850	50
		5.0~Moho	2950	0
2	BAS (Basins)	0.0~40.0	2626	12.5
		40.0~101.0	3122	0
3	IGP (Igneous Provinces)	0.0~40.0	2626	12.5
		40.0~101.0	3122	0
4	ORC (Orogenetic Crust)	0.0~29.0	2630	11.3
		29.0~39.0	2669	10
		39.0~101.0	2880	4.6
5	SHI (Shields)	0.0~40.0	2626	12.5
		40.0~101.0	3122	0
6	PLA (Platforms)	0.0~40.0	2626	12.5
		40.0~101.0	3122	0
7	EXC (Extended Crust)	0.0~20.0	2554	17.5
		20.0~30.0	2643	13
		30.0~101.0	3031	0
8	OCR (Oceanic Ridges)	0~Moho	2600	0

了显著与细微的地球球近似引入的阶方差偏差。然而由于向地壳核幔边界重力延拓的重力正演的模型分辨率限制，下文将地球球谐近似的误差默认为背景噪声而不做出进一步的讨论。

另一项误差来源，在推导 FSM 过程中省略边界函数二项式展开高阶项的截断误差在最终求得的引力位误差中占据主导地位。根据式(6)边界函数二项展开公式，三维各项异性 FSM 截断误差 $\epsilon\sigma$ 给出如下：

$$\epsilon\sigma = R'^{(\omega)n+3} \left[\frac{\alpha_{i0} + \alpha_{i1}R'}{\bar{\rho}(n+3)} \sum_{k=0}^{\sigma} \binom{n+3}{k} F_k^{(\omega)}(\Omega') - \frac{\alpha_{i1}R'^{(\omega)}}{\bar{\rho}(n+4)} \sum_{k=0}^{\sigma+1} \binom{n+4}{k} F_k^{(\omega)}(\Omega') \right] \quad (10)$$

考虑到截断误差计算成本过高，故分别单列出一阶的边界函数二项展开公式下对应的球谐系数：

$$V_{nm}^{(\omega,k)} = \frac{3h^{(\omega)}}{4\pi(2n+1)} \frac{R'^{(\omega)n+3}}{R^{n+3}} \sum_{i=0}^M \chi_i \int_{\sigma} \left[\frac{\alpha_{i0} + \alpha_{i1}R'}{\bar{\rho}(n+3)} \binom{n+3}{k} F_k^{(\omega)}(\Omega') - \frac{\alpha_{i1}R'^{(\omega)}}{\bar{\rho}(n+4)} \binom{n+4}{k} F_k^{(\omega)}(\Omega') \right] Y_{nm}^*(\Omega') d\Omega \quad (11)$$

其中 $V_{nm}^{(\omega)} = \sum_{k=0}^{\sigma} V_{nm}^{(\omega,k)}$ ，将所得球谐系数的阶方差作能量谱分析，计算到所需精度下的截断阶次。

3. 结果

为了评估实际计算中达到预期精度所需的阶段阶次，三维各项异性 FSM 下的 k 阶的边界函数二项展开式对应的球谐系数，可分别计算得不同地质构造单元下的各阶球谐系数(图 1)。由(11)的阶方差公式，将给定阶的 $V_{nm}^{(\omega,k)}$ 的球谐系数阶方差作能量谱分析，可计算得到所需精度下的截断阶次。

整体的阶方差趋势呈现为两类特征：按照重力正演模型二项展开阶数的增加而降低，这也印证了二项展开数列的收敛性；在 $V_{nm}(1)$ 及 $V_{nm}(2)$ 下的阶方差曲线按照所得重力正演结果的阶次的增加而呈现类双曲线模式的下降，而后续阶的阶方差曲线按照所得重力正演结果的阶次的增加而呈现类双曲线模式的上升。其中，Wieczorek (2007) [3]指出，就地形质量的计算而言，在 $k=1$ 下的球谐系数结果对应布格层间改正(Bouguer Shell Effect, *i.e.* Bouguer Plate Correction)，而 $k>1$ 的球谐系数结果则可解释为对布格层间改正球谐系数的地形改正。沿用该概念，在浅层地壳重力正演的语境下则应为对应层的层间改正值及对应层的起伏改正。与此同时，就 $k>3$ 的 $V_{nm}^{(\omega,k)}$ 阶次 $n < k-3$ 的系数均为 0 值，在这些阶次上的各阶结果对整体的球谐系数 $V_{nm}^{(\omega)}$ 并无贡献[25]；相较而言，在高阶次上(11)中与阶次 n 相关的组合数 $\binom{n+3}{k}$ 与 $\binom{n+4}{k}$ 为随阶次增加的阶方差量级有最主要的贡献。

然而就各个地质构造单元而言，各阶阶方差曲线的抬升速率具有分类差异。以洋壳与大洋中脊这样较新的地壳为例，其中，洋壳较薄密度变化平缓，大洋中脊在计算中认为常密度；重力正演结果各阶阶方差曲线之间间隙明显，相互有大约 10^{-4} 数量级的差异。即在各阶上下一阶的量级仅为该阶的 0.01%，该结果恰好也印证了洋壳与大洋中脊在空间上起伏的内在差异性较低，低阶项能较好地完整描述整体的重力正演结果；同时，以 $V_{nm}^{(\omega)}$ 及 $V_{nm}^{(\omega,1)}$ 阶方差曲线的比对而言，两者最主要的偏差或者不重叠部分分别出现在 120 阶及 150 阶以后。拉伸地壳(Extended Crust)的大地构造分区下，重力正演结果各阶阶方差曲线之间的间隙则有所缩减，互相大约有 10^{-3} 数量级的差异，即在各阶上下一阶的量级仅为该阶的 0.1%。同时，值得注意的是 $V_{nm}^{(\omega,2)}$ 的阶方差曲线在 100 阶后超过了整体的 $V_{nm}^{(\omega)}$ 阶方差曲线，且在较高阶次的部分各阶阶方差曲线的聚拢程度高于前面洋壳与大洋中脊的结果。而诸如造山带(Orogenetic Crust)与盆地(Basins)，火成岩省(Igneous Provinces)，地盾(Shields)，地台(Platforms)的大地构造分区，其各阶较上一阶的数量级差异为 10^{-2} ，即 1%。换言之，该阶方差曲线更加聚拢的大地构造分区下为了达到同样的目标精度需要对重力正演模型的二项展开式截断到更高阶次。

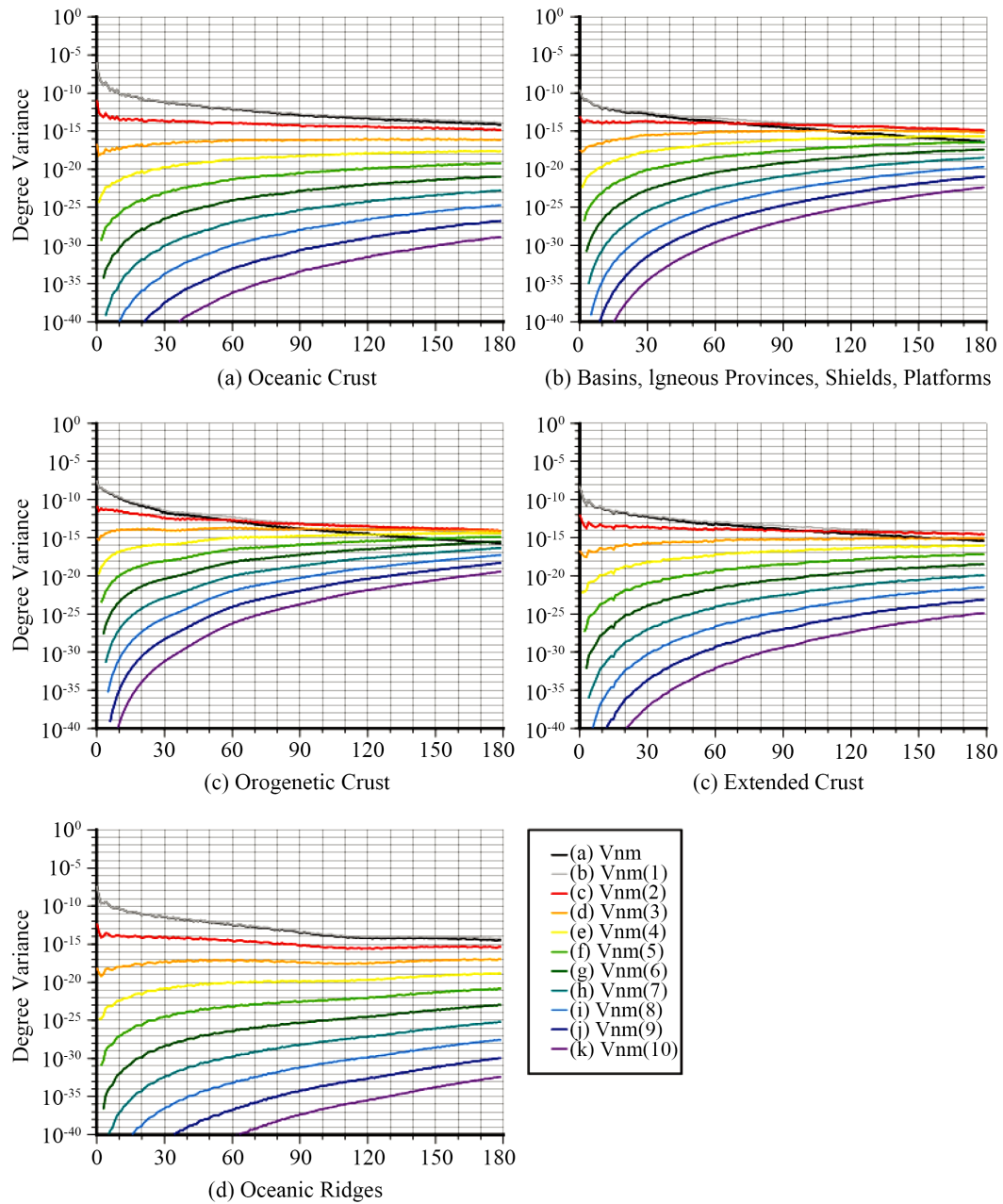


Figure 1. Degree variances at different power under 3-D isotropic FSM of different geological provinces
图 1. 不同大地构造单元下的三维各项异性 FSM 下的重力正演各阶球谐系数阶方差

4. 讨论

为了进一步明晰所需精度下所需要截断到的阶数，下文在 GEMMA 地壳结构模型给定的空间分辨率 $0.5^\circ \times 0.5^\circ$ 下进一步考察空域下的各个地质构造单元按照二项展开阶数的空域结果与总重力正演结果的差值(见表 2)。

在地壳深度较浅的地质构造单元，诸如洋壳与大洋中脊内，三维各向异性下的 FSM 收敛速度较快，在考虑 5 阶的重力正演二项展开项后残差标准差已经小于 0.1 mGal，且其差值的极值在 6 阶的重力正演二项展开项后达到 0.1 mGal 的水平。该结果与 Hirt and Kuhn (2013) [27]仅考虑横向各向异性的重力正演

Table 2. Statistics of discrepancy between the spatial result of individual binominal expansion of each geological province and the overall resultant forward modelling gravity**表 2.** 各个地质构造单元按照二项展开阶数的空域结果与总体重力正演结果的差值统计结果

大地构造分区		Min (mGal)	Max (mGal)	Mean STD (mGal)	RMS
Oceanic Crust	1	-1374.7	599	-3.3	76.1
	2	-146.2	286.7	0	10.7
	3	-49.8	24.5	0	1.5
	4	-4	7.3	0	0.2
	5	-0.9	0.5	0	0
	6	-0.1	0.1	0	0
Basins, Igneous Province, Shields, Platforms	1	-3554.9	1139.1	-0.2	52.1
	2	-1026.7	1938.1	0	26.7
	3	-837.5	553.7	0	11.1
	4	-219.2	300.2	0	3.9
	5	-91.7	69.9	0	1.2
	6	-18.9	24.3	0	0.3
	7	-5.7	4.4	0	0.1
	8	-0.9	1.2	0	0
	9	-0.2	0.2	0	0
	10	0	0	0	0
Orogenetic Crust	1	-5359.2	2212.2	-2.9	167.9
	2	-2145.4	3323.2	0	83.2
	3	-1815.3	1428.8	0	43.8
	4	-736	852.2	0	20.9
	5	-342.5	314.7	0	8.7
	6	-129.4	119.1	0	3.2
	7	-36.4	45.2	0	1
	8	-13.8	9.9	0	0.3
	9	-2.5	3.7	0	0.1
	10	-0.9	0.6	0	0
	11	-0.2	0.2	0	0
	12	0	0	0	0
Extended Crust	1	-2377.7	1043.1	-0.9	83.5
	2	-630	963.5	0	31.1
	3	-287.9	221.1	0	9.1
	4	-57.7	72.7	0	2.1
	5	-15.6	12.3	0	0.4
	6	-2.2	2.8	0	0.1
	7	-0.5	0.4	0	0
	8	-0.1	0.1	0	0

Continued

Oceanic Ridges	1	-526.8	300.2	-0.6	33.8
	2	-44.6	68.8	0	3.3
	3	-9.6	5.6	0	0.3
	4	-0.6	1.1	0	0
	5	-0.1	0.1	0	0
	6	0	0	0	0

结果一致。值得提及的是, Hirt and Kuhn (2013) [27]额外计算了将重力正演参考面移至 $H = 4000$ m 的情形, 在该条件下重力正演的收敛效率相较于参考面在 $H = 0$ m 的情形有更快的收敛速度。而本文重力正演模型建立时事先将参考面移至上界面与下界面的均值处, 故所呈现的结果是快速收敛的重力正演结果。而对于地壳厚度较大的地质构造单元, 诸如盆地、火成岩省、地盾、地台、造山带地壳及拉伸地壳, 其重力正演结果达到 0.1 mGal 的截断阶次分别要求达到 10, 12, 8 阶。然而就实际计算而言, 诸如青藏高原、圣安第斯山脉等多山区域的三维各向异性的重力正演中, 纳入计算的地质构造单元大多为造山带地壳, 而在全球重力正演计算中在其他地壳相对较薄的区域不必考虑较高的截断阶数。由此, 为了在仅考虑重力正演算法的误差因素影响的情况下达到 0.1 mGal 的精度要求, 建议在陆壳的三维各向异性重力正演计算中截断阶次选取到 12 阶, 而在洋壳的三维各向异性重力正演计算中截断阶次选取到 6 阶。

5. 结论

本文研究了 GEMMA 模型下重力正演的精度与效率问题。数值计算表明, 整体的阶方差按照重力正演模型二项展开阶数的增加而降低, 而在 $V_{nm}(1)$ 及 $V_{nm}(2)$ 下的阶方差曲线按照所得重力正演结果的阶次的增加而呈现类双曲线模式的下降, 但后续阶的阶方差曲线按照所得重力正演结果的阶次的增加而呈现类双曲线模式的上升。就各个地质构造单元而言, 地壳厚度较薄且密度变化平缓的单元各阶阶方差曲线的抬升速率较慢, 而地壳厚度较深或密度变化较大的单元各阶阶方差曲线的抬升速率较快。反映在重力正演各阶球谐展开系数上的贡献率则为, 在阶方差曲线更加聚拢的地质构造单元下为了达到同样的目标精度需要对重力正演模型的二项展开式截断到更高的阶次。同时, 对于在空域下各个地质构造单元按照二项展开阶数的结果与总体重力正演的结果的差值, 为了在仅考虑重力正演算法的误差因素影响的情况下达到 0.1 mGal 的精度要求, 建议在陆壳的三维各向异性重力正演计算中截断阶次选取到 12 阶, 而在洋壳的三维各向异性重力正演计算中截断阶次选取到 6 阶。

致 谢

本文研究受国家重点基础研究发展规划项目(973 计划) (No.2013CB733305)及国家自然科学基金(Nos.41631072, 41721003, 41429401, 41210006, 41174011, 41128003, 41021061)的资助, 特此感谢。

参考文献

- [1] Rapp, R.H. (1982) Degree Variances of the Earth's Potential, Topography and Its Isostatic Compensation. *Bulletin Géodésique*, **56**, 84-94.
- [2] Rummel, R., et al. (1988) Comparisons of Global Topographic/Isostatic Models to the Earth's Observed Gravity Field. Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University Columbus, Ohio.
- [3] Wiczeorek, M.A. (2007) Gravity and Topography of the Terrestrial Planets. In: *Treatise on Geophysics*, 2nd Edition, Vol. 10, 153-193. <https://doi.org/10.1016/B978-0-444-53802-4.00169-X>
- [4] Pavlis, N.K., et al. (2012) The Development and Evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008): The

EGM2008 Earth Gravitational Model. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, **117**, n/a-n/a.

- [5] Jarvis, A., *et al.* (2008) Hole-filled SRTM for the Globe Version 4. Available from the CGIAR-CSI SRTM 90m Database. <http://srtm.csi.cgiar.org>
- [6] Jakobsson, M., *et al.* (2012) The International Bathymetric Chart of the Arctic Ocean (IBCAO) Version 3.0. *Geophysical Research Letters*, **39**, L12609. <https://doi.org/10.1029/2012GL052219>
- [7] Hirt, C. and Rexer, M. (2015) Earth2014: 1 arc-min Shape, Topography, Bedrock and Ice-Sheet Models—Available as Gridded Data and Degree-10,800 Spherical Harmonics. *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation*, **39**, 103-112. <https://doi.org/10.1016/j.jag.2015.03.001>
- [8] Kuhn, M. and Seitz, K. (2005) Comparison of Newton's Integral in the Space and Frequency Domains. In: *A Window on the Future of Geodesy*, Springer, Berlin, Heidelberg, 386-391. https://doi.org/10.1007/3-540-27432-4_66
- [9] Grombein, T., *et al.* (2014) A Wavelet-Based Assessment of Topographic-Isostatic Reductions for GOCE Gravity Gradients. *Surveys in Geophysics*, **35**, 959-982. <https://doi.org/10.1007/s10712-014-9283-1>
- [10] Heck, B. and Seitz, K. (2007) A Comparison of the Tesseroid, Prism and Point-Mass Approaches for Mass Reductions in Gravity Field Modelling. *Journal of Geodesy*, **81**, 121-136. <https://doi.org/10.1007/s00190-006-0094-0>
- [11] Tsoulis, D., Novák, P. and Kadlec, M. (2009) Evaluation of Precise Terrain Effects Using High-Resolution Digital Elevation Models. *Journal of Geophysical Research*, **114**, B02404.
- [12] Grombein, T., Seitz, K. and Heck, B. (2013) Optimized Formulas for the Gravitational Field of a Tesseroid. *Journal of Geodesy*, **87**, 645-660. <https://doi.org/10.1007/s00190-013-0636-1>
- [13] Deng, X.-L., *et al.* (2016) Corrections to “A Comparison of the Tesseroid, Prism and Point-Mass Approaches for Mass Reductions in Gravity Field Modelling” (Heck and Seitz, 2007) and “Optimized Formulas for the Gravitational Field of a Tesseroid” (Grombein *et al.*, 2013). *Journal of Geodesy*, **90**, 585-587. <https://doi.org/10.1007/s00190-016-0907-8>
- [14] Nagy, D., Papp, G. and Benedek, J. (2000) The Gravitational Potential and Its Derivatives for the Prism. *Journal of Geodesy*, **74**, 552-560. <https://doi.org/10.1007/s001900000116>
- [15] Nagy, D., Papp, G. and Benedek, J. (2002) Corrections to “The Gravitational Potential and Its Derivatives for the Prism”. *Journal of Geodesy*, **76**, 475-475. <https://doi.org/10.1007/s00190-002-0264-7>
- [16] Shen, W. and Han, J. (2013) Improved Geoid Determination Based on the Shallow-Layer Method: A Case Study Using EGM08 and CRUST2.0 in the Xinjiang and Tibetan Regions. *Terrestrial, Atmospheric and Oceanic Sciences*, **24**, 591.
- [17] Shen, W.-B. and Deng, X.-L. (2016) Evaluation of the Fourth-Order Tesseroid Formula and New Combination Approach to Precisely Determine Gravitational Potential. *Studia Geophysica et Geodaetica*, **60**, 583-607. <https://doi.org/10.1007/s11200-016-0402-y>
- [18] Deng, X.-L. and Shen, W.-B. (2017) Evaluation of Gravitational Curvatures of a Tesseroid in Spherical Integral Kernels. *Journal of Geodesy*, **92**, 415-429.
- [19] Lachapelle, G. (1976) A Spherical Harmonic Expansion of the Isostatic Reduction Potential. *Bollettino di Geodesia e Scienze Affini*, **35**, 281-299.
- [20] Grombein, T., Seitz, K. and Heck, B. (2016) The Rock-Water-Ice Topographic Gravity Field Model RWI TOPO 2015 and Its Comparison to a Conventional Rock-Equivalent Version. *Surveys in Geophysics*, **37**, 937-976. <https://doi.org/10.1007/s10712-016-9376-0>
- [21] Pavlis, N.K. and Rapp, R.H. (1990) The Development of an Isostatic Gravitational Model to Degree 360 and Its Use in Global Gravity Modelling. *Geophysical Journal International*, **100**, 369-378. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1990.tb00691.x>
- [22] Tenzer, R., *et al.* (2010) The Spherical Harmonic Representation of the Gravitational Field Quantities Generated by the Ice Density Contrast. *Contributions to Geophysics and Geodesy*, **40**, 207-223. <https://doi.org/10.2478/v10126-010-0009-1>
- [23] Tenzer, R., *et al.* (2015) Analysis of the Refined CRUST1.0 Crustal Model and Its Gravity Field. *Surveys in Geophysics*, **36**, 139-165. <https://doi.org/10.1007/s10712-014-9299-6>
- [24] Root, B.C., *et al.* (2016) On a Spectral Method for Forward Gravity Field Modelling. *Journal of Geodynamics*, **97**, 22-30. <https://doi.org/10.1016/j.jog.2016.02.008>
- [25] Balmino, G., *et al.* (2012) Spherical Harmonic Modelling to Ultra-High Degree of Bouguer and Isostatic Anomalies. *Journal of Geodesy*, **86**, 499-520. <https://doi.org/10.1007/s00190-011-0533-4>
- [26] Rexer, M., *et al.* (2016) Layer-Based Modelling of the Earth's Gravitational Potential up to 10-km Scale in Spherical Harmonics in Spherical and Ellipsoidal Approximation. *Surveys in Geophysics*, **37**, 1035-1074. <https://doi.org/10.1007/s10712-016-9382-2>
- [27] Hirt, C. and Kuhn, M. (2012) Evaluation of High-Degree Series Expansions of the Topographic Potential to High-

er-Order Powers: Topopotential to Higher-Order Powers. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, **117**.

- [28] Claessens, S.J. and Hirt, C. (2013) Ellipsoidal Topographic Potential: New Solutions for Spectral forward Gravity Modeling of Topography with Respect to a Reference Ellipsoid. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, **118**, 2013JB010457.
- [29] Dziewonski, A.M. and Anderson, D.L. (1981) Preliminary Reference Earth Model. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **25**, 297-356. [https://doi.org/10.1016/0031-9201\(81\)90046-7](https://doi.org/10.1016/0031-9201(81)90046-7)
- [30] Reguzzoni, M. and Sampietro, D. (2015) GEMMA: An Earth Crustal Model Based on GOCE Satellite Data. *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation Part A*, **35**, 31-43.
- [31] Gladczenko, T.P., Coffin, M.F. and Eldholm, O. (1997) Crustal Structure of the Ontong Java Plateau: Modeling of New Gravity and Existing Seismic Data. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, **102**, 22711-22729. <https://doi.org/10.1029/97JB01636>
- [32] Heiskanen, W.A. and Moritz, H. (1967) Physical Geodesy. *Bulletin Géodésique (1946-1975)*, **86**, 491-492.
- [33] Novák, P. and Grafarend, E.W. (2006) The Effect of Topographical and Atmospheric Masses on Spaceborne Gravimetric and Gradiometric Data. *Studia Geophysica et Geodaetica*, **50**, 549-582. <https://doi.org/10.1007/s11200-006-0035-7>
- [34] Tenzer, R., Pavel, N. and Vladislav, G. (2012) The Bathymetric Stripping Corrections to Gravity Field Quantities for a Depth-Dependent Model of Seawater Density. *Marine Geodesy*, **35**, 198-220. <https://doi.org/10.1080/01490419.2012.670592>
- [35] Tenzer, R., Hamayun, K. and Vajda, P. (2009) Global Maps of the CRUST 2.0 Crustal Components Stripped Gravity Disturbances. *Journal of Geophysical Research*, **114**, B05408.

附录

三维各向异性重力正演高阶展开项, 按照 $V_{nm}^{(\omega)} = \sum_{k=0}^{\sigma} V_{nm}^{(\omega,k)}$ 给出的一阶、二阶直至 10 阶的各项展开式,

同时为了展示的方便, 令 $F_k^{*(\omega)}(\Omega') = \frac{3h^{(\omega)}}{4\pi(2n+1)} \frac{R'^{(\omega)n+3}}{R^{n+3}} \cdot F_k^{(\omega)}(\Omega')$:

$$V_{nm}^{(\omega,1)} = \sum_{i=0}^M \chi_i \int_{\sigma} \left[\frac{\alpha_{i0} + \alpha_{i1} (R' - R^{(\omega)})}{\bar{\rho}} F_1^{*(\omega)}(\Omega') \right] Y_{nm}^*(\Omega') d\Omega \quad (1)$$

$$V_{nm}^{(\omega,2)} = \sum_{i=0}^M \chi_i \int_{\sigma} \left\{ \frac{\alpha_{i0} + \alpha_{i1} [(n+2)R' - (n+3)R^{(\omega)}]}{2\bar{\rho}} F_2^{*(\omega)} \right\} Y_{nm}^*(\Omega') d\Omega \quad (2)$$

$$V_{nm}^{(\omega,3)} = \sum_{i=0}^M \chi_i \int_{\sigma} \left\{ \frac{\alpha_{i0} + \alpha_{i1} [(n+2)(n+1)R' - (n+3)(n+2)R^{(\omega)}]}{6\bar{\rho}} F_3^{*(\omega)} \right\} Y_{nm}^*(\Omega') d\Omega \quad (3)$$

$$V_{nm}^{(\omega,4)} = \sum_{i=0}^M \chi_i \int_{\sigma} \left\{ \frac{\alpha_{i0} + \alpha_{i1} [(n+2)(n+1)nR' - (n+3)(n+2)(n+1)R^{(\omega)}]}{24\bar{\rho}} F_4^{*(\omega)} \right\} Y_{nm}^*(\Omega') d\Omega \quad (4)$$

$$V_{nm}^{(\omega,5)} = \sum_{i=0}^M \chi_i \int_{\sigma} \left\{ \frac{\alpha_{i0} + \alpha_{i1} [(n+2)(n+1)n(n-1)R' - (n+3)(n+2)(n+1)nR^{(\omega)}]}{120\bar{\rho}} F_5^{*(\omega)} \right\} Y_{nm}^*(\Omega') d\Omega \quad (5)$$

$$V_{nm}^{(\omega,6)} = \sum_{i=0}^M \chi_i \int_{\sigma} \left\{ \frac{\alpha_{i0} + \alpha_{i1} [(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)R' - (n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)R^{(\omega)}]}{720\bar{\rho}} F_6^{*(\omega)} \right\} Y_{nm}^*(\Omega') d\Omega \quad (6)$$

$$V_{nm}^{(\omega,7)} = \sum_{i=0}^M \chi_i \int_{\sigma} \left\{ \frac{\alpha_{i0} + \alpha_{i1} [(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)R' - (n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)nR^{(\omega)}]}{5040\bar{\rho}} F_7^{*(\omega)} \right\} Y_{nm}^*(\Omega') d\Omega \quad (7)$$

$$V_{nm}^{(\omega,8)} = \sum_{i=0}^M \chi_i \int_{\sigma} \left\{ \frac{\alpha_{i0} + \alpha_{i1} [(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)R' - (n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)R^{(\omega)}]}{40320\bar{\rho}} F_8^{*(\omega)} \right\} Y_{nm}^*(\Omega') d\Omega \quad (8)$$

$$V_{nm}^{(\omega,9)} = \sum_{i=0}^M \chi_i \int_{\sigma} \left\{ \frac{\alpha_{i0} + \alpha_{i1} [(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)R' - (n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)R^{(\omega)}]}{362880\bar{\rho}} F_9^{*(\omega)} \right\} Y_{nm}^*(\Omega') d\Omega \quad (9)$$

$$V_{nm}^{(\omega,10)} = \sum_{i=0}^M \chi_i \int_{\sigma} \left\{ \frac{\alpha_{i0} + \alpha_{i1} \left[(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)R' - (n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)R^{(\omega)} \right]}{3628800\bar{\rho}} F_{i0}^{*(\omega)} \right\} Y_{nm}^*(\Omega') d\Omega \quad (10)$$

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2163-3967，即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>
期刊邮箱：ag@hanspub.org