

渗流力学边界条件的数理表达

——聚焦于弹性波传播问题

张 阔^{1,2}

¹中国电子信息产业发展研究院, 北京

²北京赛迪出版传媒有限公司, 北京

Email: 274739214@qq.com

收稿日期: 2020年9月15日; 录用日期: 2020年10月6日; 发布日期: 2020年10月13日

摘 要

裂隙在数理方法层面可表达为渗流力学边界条件。对于裂隙环境下的弹性波传播, 在裂隙处设置法向位移为零的渗流力学边界条件, 与实际渗流现象更加符合。对这一数理表达进行求解, 不仅能够生动描述弹性波穿透裂隙传播的效应, 而且能够有效反映裂隙长度、位置、端点等因素对弹性波传播的共同影响。

关键词

渗流力学, 边界条件, 弹性波, 裂隙, 穿透效应

Mathematical Expressions on the Boundary Conditions for Permeable Mechanics

—Focusing on the Elastic Propagation Issue

Kuo Zhang^{1,2}

¹China Center for Information Industry Development, Beijing

²Beijing CCID Publishing & Media Co., Ltd., Beijing

Email: 274739214@qq.com

Received: Sep. 15th, 2020; accepted: Oct. 6th, 2020; published: Oct. 13th, 2020

Abstract

Cracks can be expressed as boundary conditions for permeable mechanics in the mathematical method. For the elastic wave propagation in a scenario with cracks, the boundary conditions for

文章引用: 张阔. 渗流力学边界条件的数理表达[J]. 渗流力学进展, 2020, 10(2): 7-15.

DOI: 10.12677/apf.2020.102002

permeable mechanics on the cracks can be set as zero normal displacement, which is more consistent with the actual permeable phenomenon. By solving such mathematical expressions, one cannot only vividly describe the penetrating effect of elastic wave propagation across the cracks, but also effectively reflect the joint influence of factors including the length, the location and the existence of endpoints of cracks on the elastic wave propagation.

Keywords

Permeable Mechanics, Boundary Condition, Elastic Wave, Crack, Penetrating Effect

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

渗流是指流体渗入物质裂隙过程中形成的微观流动作用[1]。裂隙在自然界普遍存在，大到可能发生于受到力学作用的岩土层，小到可以产生于增材制造等工艺下制备出的材料或元件。源于裂隙的渗流现象会改变物质原有的物理特性，对资源勘探开发、物质无损检测等技术成果的可解释性[2]具有广泛影响。

弹性波在物质中的传播机制是以上技术领域常常需要面对和解决的力学基本问题。当弹性波传播到物质上的裂隙时，受到渗流力学作用的影响，传播方向会发生偏离，波动性态也会有所改变[3] [4]。为了准确描述上述现象，有必要聚焦于弹性波传播问题，构建一套行之有效的渗流力学数理方法。本文假设裂隙是作为渗流力学边界条件而存在的，首先在弹性波方程的基础上给出边界条件的若干具有直观意义的数理表达，然后绘制几种典型的渗流模型，采用频域有限元方法模拟弹性波传播到裂隙处时发生的奇特现象，揭示各种渗流力学作用对弹性波传播的影响。

2. 理论方法与基本假设

2.1. 带有完全匹配层的弹性波方程的等效积分弱形式

不失一般性，考虑二维直角坐标系 (x, y) 下无限大空间内的弹性波传播问题。在频域下引入完全匹配层(PML)，以有限空间区域表达无限大空间内的弹性波传播。推导弹性波方程的等效积分弱形式(EIWF)，以适用于频域有限元求解[5]。EIWF的数理表达为

$$\begin{cases} \int_L (s_y \tau_{xx} \bar{\mathbf{n}} \delta u + s_x \tau_{xy} \bar{\mathbf{n}} \delta v) dL - \iint_S \left(s_y \tau_{xx} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + s_x \tau_{xy} \frac{\partial \delta v}{\partial y} \right) dS + \iint_S s_x s_y \rho \omega^2 u \delta u dS = 0 \\ \int_L (s_y \tau_{xy} \bar{\mathbf{n}} \delta u + s_x \tau_{yy} \bar{\mathbf{n}} \delta v) dL - \iint_S \left(s_y \tau_{xy} \frac{\partial \delta v}{\partial x} + s_x \tau_{yy} \frac{\partial \delta u}{\partial y} \right) dS + \iint_S s_x s_y \rho \omega^2 v \delta v dS = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中， S 为一有限空间区域， L 泛指区域内外边界， $\bar{\mathbf{n}}$ 为边界外法向， ρ 为物质密度， ω 为弹性波角频率， u 、 v 分别为弹性波在 x 、 y 分量的位移， τ_{xx} 、 τ_{yy} 分别为弹性波在 x 、 y 分量的法向应力， τ_{xy} 为切向应力。另， s_x 、 s_y 与PML有关，分别表征弹性波在 x 、 y 分量的吸收，具体设置方式详见文献[6]。

2.2. 对裂隙的基本假设

如果物质表现为纯粹的固态，那么弹性波在物质上任一位置处的传播均满足法向位移连续、切向位移连续、法向应力连续、切向应力连续这四个边界条件；如果物质表现出固态和流态的接触作用，那么

弹性波在接触处的传播满足法向位移连续、法向应力连续、切向应力为零这三个边界条件[7]。据此，本文对物质上的裂隙性质作出如下假设：

- ① 裂隙宽度趋于零；
- ② 裂隙存在与否对弹性波传播具有实质影响，而裂隙内填充的物质对弹性波传播的影响不大；
- ③ 弹性波传播到裂隙处时，部分或全部法向连续性边界条件丧失；
- ④ 为确保弹性波穿透裂隙，切向连续性边界条件不作处理。

2.3. 边界条件的数学表达

根据章节 2.2 提出的假设，尤其是③号假设，给出渗流力学边界条件的三种具有直观意义的数理表达。

2.3.1. 弱渗流裂隙

弱渗流裂隙处满足的边界条件有两种情形：

- ① 法向位移为零、法向应力连续。此时有

$$\bar{\mathbf{n}} \cdot \left[u^{L_0} \quad v^{L_0} \right]^T = 0 \quad (2)$$

其中， L_0 为裂隙所在位置。

- ② 法向位移连续、法向应力为零。此时有

$$\bar{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\tau}^{L_0} = 0 \quad (3)$$

其中， $\boldsymbol{\tau}$ 为应力矩阵， $\bar{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\tau}$ 代表法向应力。

2.3.2. 强渗流裂隙

强渗流裂隙处同时满足法向位移为零、法向应力为零这两个边界条件。此时式(2)和式(3)共同成立。

3. 应用

3.1. 裂隙对弹性波传播的影响

3.1.1. 模型与参数

如图 1 所示绘制 1 号模型。物质长 1.2 m，宽 0.8 m，外围施加一厚度为 0.2 m 的 PML。一条无限长的竖向裂隙将物质分割为左右对称的两部分。在 1 号模型下，渗流力学边界条件简化为：

- ① 弱渗流裂隙，法向位移为零、法向应力连续。此时根据式(2)，有

$$u^{L_0} = 0 \quad (4)$$

- ② 弱渗流裂隙，法向位移连续、法向应力为零。此时根据式(3)，有

$$\tau_{xx}^{L_0} = 0 \quad (5)$$

在有限元求解框架下，式(5)化为

$$\rho v_p^2 \frac{\partial v_x^{L_0}}{\partial x} + \rho (v_p^2 - 2v_s^2) \frac{\partial v_z^{L_0}}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

其中， v_p 、 v_s 分别为弹性波在物质中传播的纵波、横波速度。

- ③ 强渗流裂隙，同时满足法向位移为零、法向应力为零。此时式(4)和式(6)共同成立。

在模型 1 中，点源和接收端处于同一水平面。点源到裂隙的距离为 0.5 m。接收端一点在裂隙上，另一点在点源另一侧，到裂隙的距离也为 0.5 m。

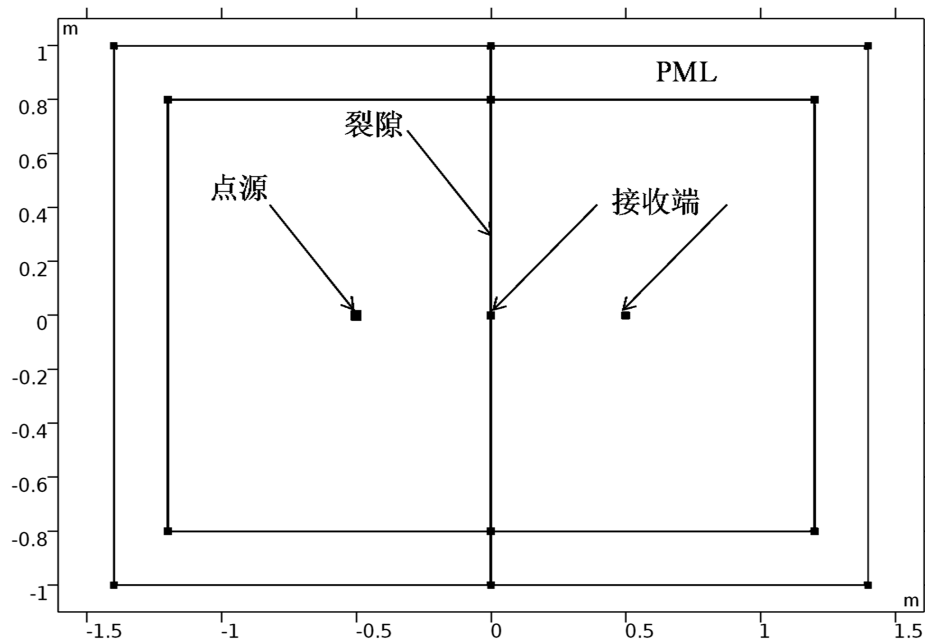


Figure 1. No. 1 model
图 1. 1 号模型

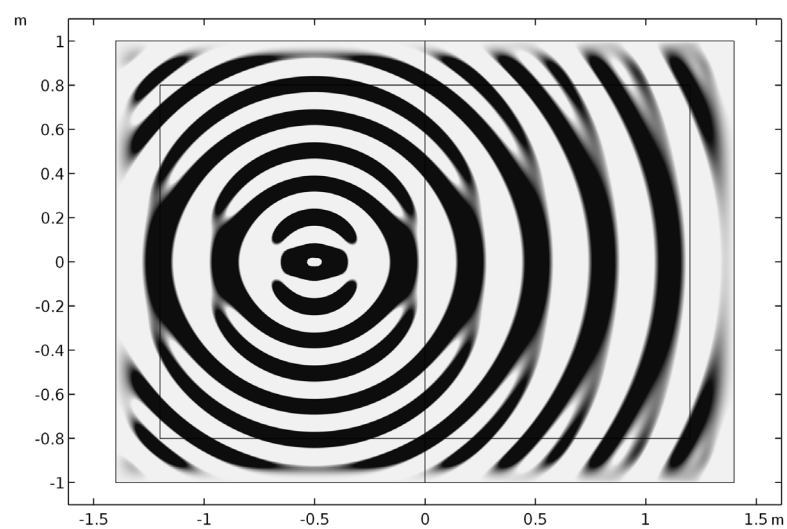
物质的弹性参数如表 1 所示。

Table 1. Elastic parameters of a material
表 1. 物质的弹性参数

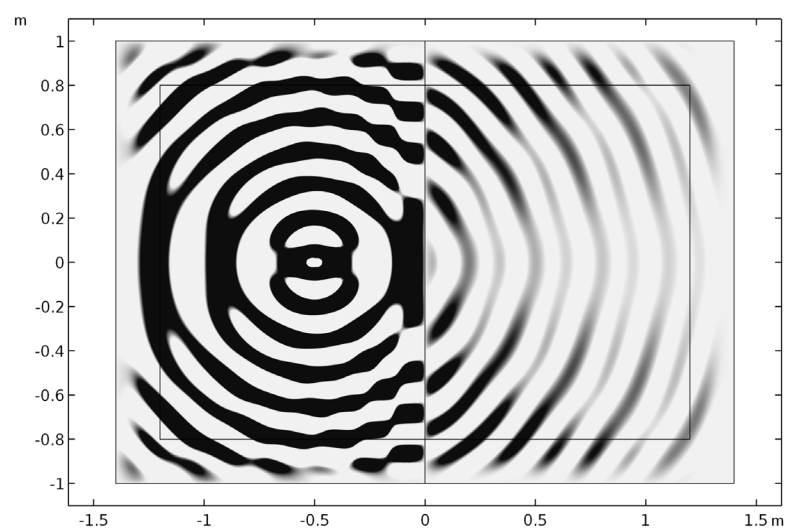
参数	数值
密度(kg/m ³)	2000
纵波速度(m/s)	3000
横波速度(m/s)	1500

3.1.2. 结果与讨论

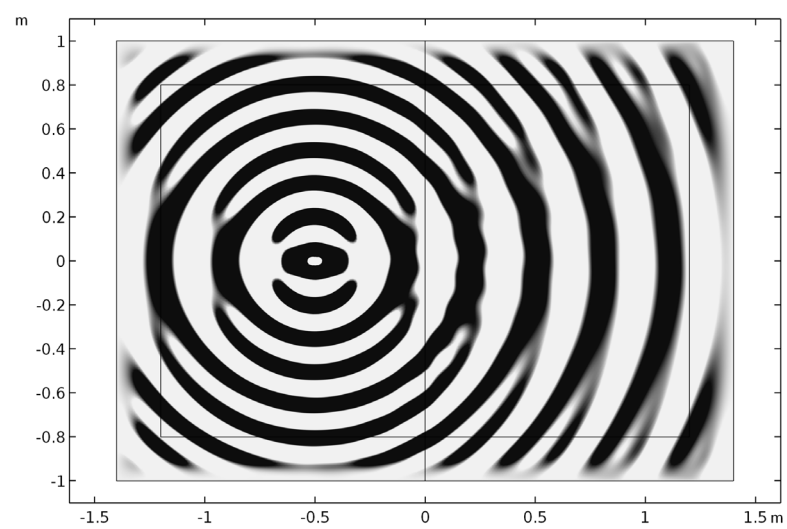
在点源处激发一个频率为 10 kHz 的 u 分量冲击函数，考察三种边界条件数理表达下 1 号模型内的 u 分量弹性波传播响应(以实部为例)，分别如图 2(b)、图 2(c)、图 2(d)所示。为便于比较，图 2(a)展示了裂隙不发生作用的情形。同时，表 2 给出了以上四种情形下接收端处的 u 分量响应值。分析发现，法向应力为零的边界条件对弹性波传播响应的影响不大，图 2(c)的波环相比图 2(a)只是多了一些抖动，弹性波几乎毫无障碍地穿透到了裂隙另一侧，无法合理反映渗流力学作用；但是，法向位移为零的边界条件，会使得弹性波传播到边界条件处时产生的特性变化尤为明显，即图 2(b)的波环形态(如幅度、波数等)相比图 2(a)发生了更为明显的变化，这与渗流力学实际现象更加符合。当然值得注意的是，将裂隙处的法向位移强制取零，并不必然代表弹性波法向位移无法穿透裂隙传播，这可能是部分切向位移也在裂隙处发生了传播方向的偏转，“衍生”了法向位移，并在裂隙另一侧传播；此外，根据式(1)，各个位移、应力分量的相互耦合作用也促进了这一穿透效应的产生。



(a)



(b)



(c)

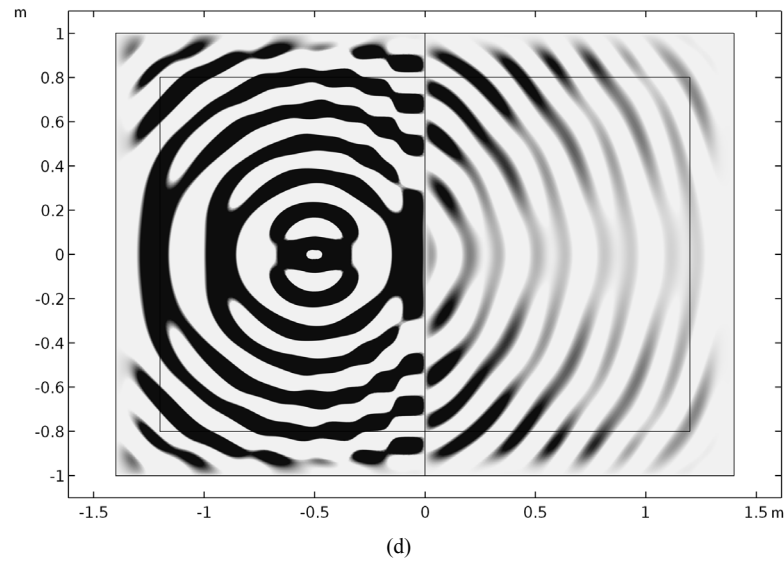


Figure 2. Effect of a crack on the elastic propagation response with a frequency of 10 kHz (In the model). (a) Without a crack; (b) With a weak permeable crack of type ①; (c) With a weak permeable crack of type ②; (d) With an enhanced permeable crack

图 2.1 裂隙对 10 kHz 弹性波传播响应的影响(模型内)。(a) 无裂隙; (b) 弱渗流裂隙①; (c) 弱渗流裂隙②; (d) 强渗流裂隙

Table 2. Effect of a crack on the elastic propagation response with a frequency of 10 kHz (At the receiver)

表 2. 裂隙对 10 kHz 弹性波传播响应的影响(接收端处)

裂隙类型	裂隙处接收端/(10 ⁻¹²)	物质内接收端/(10 ⁻¹²)
无裂隙	-1.2711 - 2.7712i	2.5190 + 0.4845i
弱渗流裂隙①	0.0000 + 0.0000i	0.2910 + 0.0973i
弱渗流裂隙②	-1.2188 - 3.1541i	2.3614 + 0.6462i
强渗流裂隙	0.0000 + 0.0000i	0.2582 + 0.2264i

3.2. 裂隙端点对弹性波传播的影响

3.2.1. 模型与参数

考虑一个更复杂些的模型。如图 3 所示绘制 2 号模型。物质长、宽、外围施加的 PML 厚度不变。模型内部有一条有限长的斜向 45° 裂隙。鉴于章节 3.1 得到的重要结论，在 2 号模型下，仅考虑弱渗流裂隙 ① 的边界条件，此时根据式(2)，有

$$u^{L_0} \cos \theta + v^{L_0} \sin \theta = 0 \tag{7}$$

当 $\theta = 45^\circ$ 时，式(7)简化为

$$u^{L_0} + v^{L_0} = 0 \tag{8}$$

若执意要考虑法向应力为零的边界条件，则根据式(3)，有

$$\tau_{45^\circ}^{L_0} = \tau_{xx}^{L_0} \cos^2 \theta + \tau_{yy}^{L_0} \sin^2 \theta - 2\tau_{xy}^{L_0} \cos \theta \sin \theta = 0 \tag{9}$$

当 $\theta = 45^\circ$ 时，式(9)简化为

$$\tau_{xx}^{L_0} + \tau_{yy}^{L_0} - 2\tau_{xy}^{L_0} = 0 \tag{10}$$

然后将各应力分量转换为位移即可，在此不再展开。

在模型 2 中，点源依旧与两个接收端处于同一水平面。裂隙一端在点源正上方，点源到该端的距离为 0.5 m；裂隙另一端在最右侧接收端正下方，距离也为 0.5 m。为了考察裂隙端点对弹性波传播的影响，以下将裂隙两端也视作接收端。

物质的弹性参数同如表 1 所示。

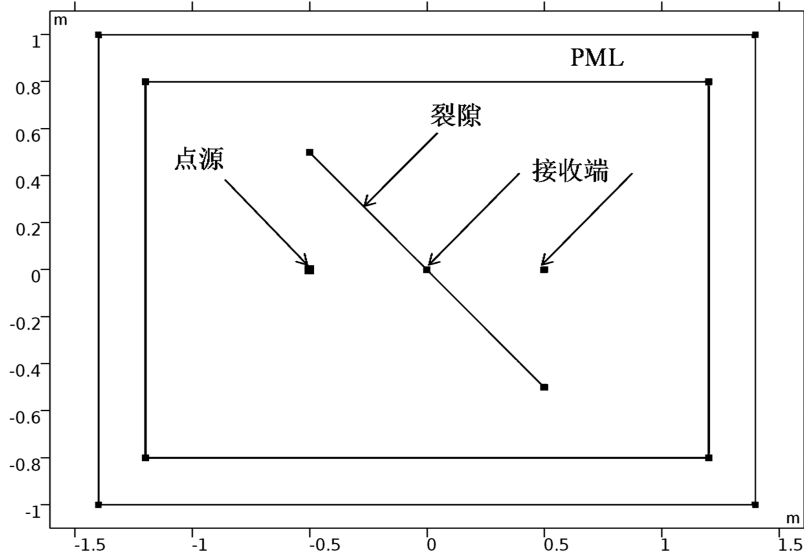
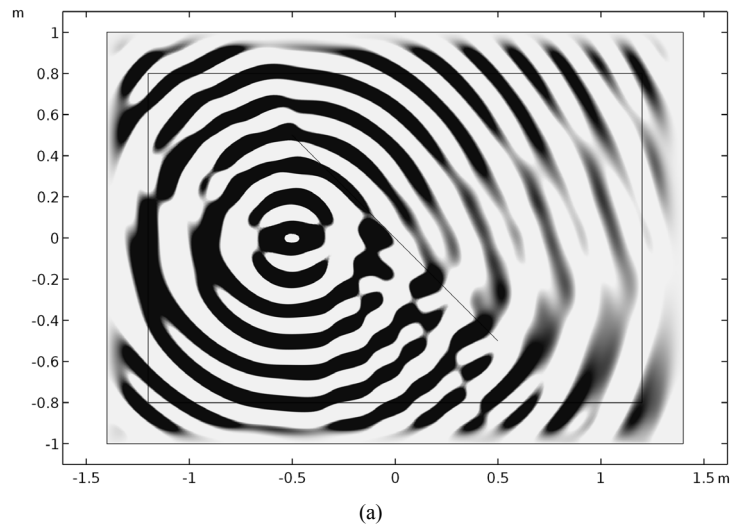


Figure 3. No. 2 model
图 3. 2 号模型

3.2.2. 结果与讨论

在点源处激发一个频率为 10 kHz 的 u 分量冲击函数，考察弱渗流裂隙①的数理表达下 2 号模型内的弹性波传播响应(以实部为例)，分别如图 4(a)~(b)所示。为便于比较，读者也可将图 2(a)展示的裂隙不发生作用的情形拿来作为对比。分析发现，裂隙端点附近的波环发生了一定程度的扭曲，这就如同文献[4]所提到的，裂隙端点“似乎成为了一个新的‘波源’”，会“源源不断地在模型中传播某种波”。此外，当裂隙不发生作用时，根据点源处激发 u 分量冲击函数时的并矢格林函数解[8]，点源左右两侧、上下两侧的 v 分量本应呈现反对称特征，然而，倾斜裂隙的存在、裂隙端点的波源效应，共同使这一反对称特征受到了破坏。



(a)

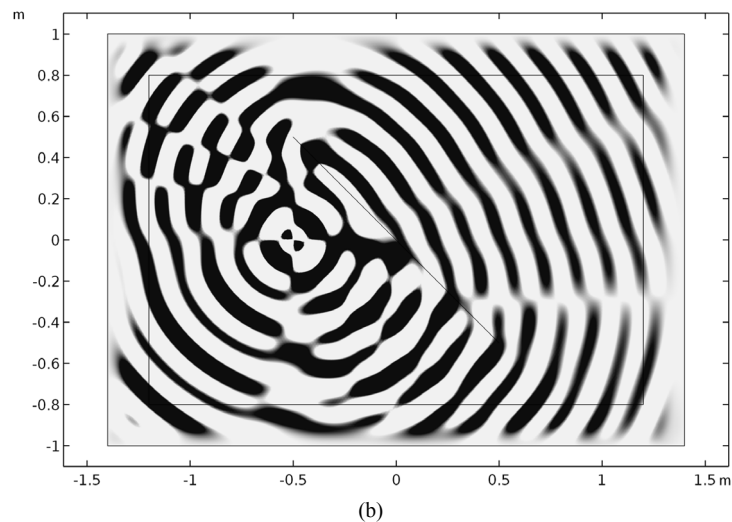


Figure 4. Effect of crack end point on the elastic propagation response with a frequency of 10 kHz (In the model). (a) u component; (b) v component

图 4. 裂隙端点对 10 kHz 弹性波传播响应的影响(模型内)。(a) u 分量; (b) v 分量

表 3 给出了上述情形下各接收端处的 u 、 v 分量响应值。其中，最右侧接收端的 u 分量由于受到裂隙长度、位置、端点等因素的共同影响，其响应值 $-0.2483 - 0.3743i$ 与 1 号模型中相应的 $0.2910 + 0.0973i$ 相差较大，且发生了极性翻转。顺带地，表 3 还给出了叠加分量 $\frac{1}{\sqrt{2}}(u+v)$ 的响应值。其中，裂隙及其端点处的叠加分量均为零，验证了模型求解的自圆性。

Table 3. Effect of crack end point on the elastic propagation response with a frequency of 10 kHz (At the receiver and the end point)

表 3. 裂隙端点对 10 kHz 弹性波传播响应的影响(接收端、裂隙端点处)

裂隙类型	裂隙处接收端/(10^{-12})	物质内接收端/(10^{-12})	裂隙上端点/(10^{-12})	裂隙下端点/(10^{-12})
无裂隙	$-1.2711 - 2.7712i$	$2.5190 + 0.4845i$	—	—
弱渗流裂隙① u 分量	$-0.6367 - 1.3855i$	$-0.2483 - 0.3743i$	$4.8803 + 1.0155i$	$-1.3954 - 0.6770i$
弱渗流裂隙① v 分量	$0.6367 + 1.3855i$	$1.2998 + 0.4108i$	$-4.8803 - 1.0155i$	$1.3954 + 0.6770i$
弱渗流裂隙① $\frac{1}{\sqrt{2}}(u+v)$ 分量	$0.0000 + 0.0000i$	$0.7435 + 0.0258i$	$0.0000 + 0.0000i$	$0.0000 + 0.0000i$

4. 结论

本文聚焦于弹性波传播问题，对渗流力学边界条件的数理表达进行了探索，主要认识有：

- (1) 将裂隙作为边界条件进行处理，不失为探究其渗流力学作用的有效策略；
- (2) 对于弹性波传播问题，法向位移为零的渗流力学边界条件与实际现象更加符合；
- (3) 裂隙处的法向位移为零，并不必然代表弹性波法向位移无法穿透裂隙传播。

同时，结合弹性波传播响应在不同渗流模型中的差异可知，本文提出的渗流力学边界条件的数理表达，能够合理反映裂隙长度、位置、端点等因素的共同影响。

参考文献

- [1] 程林松. 高等渗流力学[M]. 北京: 石油工业出版社, 2011.
- [2] 张阔, 刘鹤. 增材制造技术中的弹性各向异性影响因素[J]. 工业技术创新, 2017, 4(4): 53-58.
- [3] 张阔. 增材制造技术中基于时域有限元方法的声波 - 弹性波耦合(一): 理论[J]. 工业技术创新, 2019, 6(5): 74-85, 90.
- [4] 张阔. 增材制造技术中基于时域有限元方法的声波 - 弹性波耦合(二): 应用[J]. 工业技术创新, 2019, 6(6): 75-86.
- [5] 张阔. 隧道效应下的 Schrödinger 方程吸收边界条件[J]. 新一代信息技术, 2019, 2(17): 47-52.
- [6] 张阔. 关于半整数维波动方程求解的几点注记[J]. 新一代信息技术, 2019, 2(21): 13-21.
- [7] 张阔. 柱状模型传递矩阵校正图谱[J]. 新一代信息技术, 2020, 3(2): 1-9.
- [8] 张阔. 各向同性负泊松比超材料弹性参数线性化初探[J]. 工业技术创新, 2018, 5(4): 53-60.