Applied Physics 应用物理, 2013, 3, 167-170
http://dx.doi.org/10.12677/app.2013.39031 Published Online November 2013 (http://www.hanspub.org/journal/app.html)

The Derivation of Reduced Density Equation of Mesoscopic LC Circuit in a Thermal Radiation Field

Xiaojian Xia

The Academy of Physics and Information Engineering, Quanzhou Normal College, Quanzhou
Email: xiaxiaojian18@eyou.com

Received: Sep. 11th, 2013; revised: Oct. 13th, 2013; accepted: Oct. 24th, 2013

Abstract: Quantum LC circuit locates inevitably in radiation field; the thermal radiation field is a reservoir which is described by infinite harmonic oscillators, and quantum LC circuit is a system to be investigated. From the interaction between mesoscopic LC circuit and radiation field, the radiation is reservoir. We trace out the reservoir and deduce the equation of density.

Keywords: Mesoscopic LC Circuit; The Radiation Field; Equation of Reduced Density

介观 LC 电路在辐射场作用下约化密度方程的推导

夏小建

泉州师范学院物理与信息工程学院，泉州
Email: xiaxiaojian18@eyou.com

收稿日期：2013 年 9 月 11 日；修回日期：2013 年 10 月 13 日；录用日期：2013 年 10 月 24 日

摘　要：介观 LC 电路不可避免会处于辐射场中，把辐射场看成是由无穷多谐振子组成的，选择介观 LC 电路为研究对象。本文从介观 LC 电路与辐射场相互作用的哈密顿量出发，把辐射场看成库，通过对库求迹，推导了介观 LC 电路在辐射场作用下的密度方程。

关键词：介观 LC 电路；辐射场；约化密度方程

1. 引言

随着对纳米器件研究的深入，电路和器件的尺度已达到原子尺度尺寸的量级，当电路和器件的尺寸与电子输运的相位相关长度相当时，必须考虑电路和器件的量子效应。20 世纪 70 年代 Louisel 讨论 LC 回路的量子涨落以来[1]，已有大量的文献对介观 LC 的量子特性进行了讨论[2-8]，由于介观 LC 回路不可避免会处在电磁辐射场环境中，研究介观 LC 电路在电磁辐射场下的量子行为十分必要。我们知道，电磁辐射场经过量子化后，可以看成是由一系列不同频率的谐振子组成，我们把介观 LC 电路看成系统，辐射场看成环境。由于环境是一个巨大的体系，在 Markoff 近似下，介观电路不会对环境产生影响，但环境会对介观电路产生影响。本文从介观电路与环境相互作用哈密顿模型出发，推导介观 LC 电路约化密度方程。

2. 介观 LC 回路、辐射场及相互作用哈密顿量

在时变信号源的作用下，介观 LC 回路的基尔霍夫回路方程为

$$L\ddot{q}+L\omega^2 q=e(t) \tag{1}$$

其中 $\omega^2 LC=1$，q 为电容所储电荷，与之共轭的量为

电感中的磁通 $p = L\dot{q}$，刚开始，$e(t) \neq 0$，作用完后 $e(t) = 0$，电路自由演化，此时与运动方程(1)相对应的量子化后的哈密顿算符为

$$\hat{H} = \frac{1}{2L}\hat{P}^2 + \frac{1}{2}L\omega^2\hat{q}^2 \tag{2}$$

$\hat{q}$ 和 $\hat{p}$ 是电荷和磁通算符，满足 $[\hat{q},\hat{p}] = i\hbar$。引入降算符 $\hat{a}$ 和升算符 $\hat{a}^+$

$$\hat{a} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\left(\hat{q} + i\frac{1}{L\omega}\hat{P}\right) \quad \hat{a}^+ = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\left(\hat{q} - i\frac{1}{L\omega}\hat{P}\right) \tag{3}$$

则(2)式可表示为

$$\hat{H}_1 = \hbar\omega\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \tag{4}$$

算符 $\hat{a}$、$\hat{a}^+$和$\hat{a}^+\hat{a}$ 与通常的线性谐振子一样，具有下列性质：

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad \hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \tag{5}$$

这是介观电路的电磁湮灭算符和产生算符，湮灭算符和产生算符的物理意义是介观电路释放或吸收一份能量后，其所处的量子态向下或向上跃迁一个能级。

我们知道电磁场经过量子化之后[9]，可以看成由一系列谐振子组成的体系，其哈密顿为

$$\hat{H}_2 = \sum_j\left(\hat{b}_j^+\hat{b}_j + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \tag{6}$$

辐射场的平均光子数即辐射场的强度为

$$\overline{n(\omega)} = \left\langle \hat{b}_j^+\hat{b}_j \right\rangle = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1} \tag{7}$$

假设介观 LC 电路在电源作用完后处于真空态，这时与辐射场开始发生作用。我们知道，量子化后介观 L 电路可以当作一个能级均匀的线性谐振子，而辐射场可以看做由频率不同的线性谐振子的集合，当介观电路辐射的电磁波被辐射场吸收，或者辐射场辐射的电磁波被介观电路吸收时，介观电路与辐射场发生作用。这种相互作用就是耦合，系统与环境的耦合方式共有多种，如系统坐标－环境坐标耦合、系统坐标与环境振子的速度、系统速度与环境坐标、系统速度与环境振子速度[10,11]。在这里我们把环境与介观 LC 电路的作用看成是坐标－坐标之间的耦合引起的，这样在相互作用哈密顿中有四个耦合项，ab_j^+、a^+b_j、$a^+b_j^+$、ab_j，在旋转波近似下，可以得到以下哈密顿量[12](为了简化书写，以下公式中算符都省略上面的“∧”，g_i 为 LC 回路与辐射场的耦合系数)：

$$H = H_0 + H_I = \hbar\omega a^+a + \sum_j b_j^+b_j + \sum_j g_j\left(a^+b_j + ab_j^+\right) \tag{8}$$

3. 介观 LC 电路在耗散环境下 Born-Markov-Lindblad 方程[12]的推导

设系统的密度算符为 ρ_{AB}，介观 LC 回路的密度算符为 ρ_A，辐射场密度为 ρ_B，对 ρ_{AB} 对 B 求迹就可得 ρ_A。ρ_{AB} 满足 Liouville 方程

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}\rho_{AB}}{\mathrm{d}t} = [H, \rho_{AB}] \tag{9}$$

相互作用表象中 $\tilde{\rho}_{AB}$ 和 $\tilde{H}(t)$ 与原表象中的 ρ_{AB} 和 $H_I(t)$ 有如下关系

$$\tilde{\rho}_{AB} = \exp\left(\frac{i}{\hbar}H_0t\right)\rho_{AB}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_0t\right) \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\tilde{H}_1(t) &= \exp\left(\frac{i}{\hbar}H_0t\right)H_1\exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_0t\right)\\ &= \exp\left(i\omega ta^+a + i\sum_j\omega_jtb_j^+b_j\right)\\ &\quad\times\sum_j\hbar g_i\left(a^+b_j + ab_j^+\right)\exp\left(-i\omega ta^+a - i\sum_j\omega_jtb_j^+b_j\right)\\ &= \hbar\left(G(t)a^+ + G^+(t)a\right)\end{aligned} \tag{11}$$

其中 $G(t) \equiv \sum_j\left(g_jb_j\exp\left[i\left(\omega - \omega_j\right)t\right]\right)$

$\tilde{\rho}_{AB}$ 满足与 ρ_{AB} 相同的 Liouville 方程

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\rho}_{AB}}{\mathrm{d}t} = -\frac{i}{\hbar}\left[\tilde{H}_I, \tilde{\rho}_{AB}\right] \tag{12}$$

下面我们对方程(12)两边积分得到

$$\tilde{\rho}_{AB} = \tilde{\rho}_{AB}(0) + \frac{1}{i\hbar}\int_0^t\left[\tilde{H}_1(t'), \tilde{\rho}_{AB}(t')\right]\mathrm{d}t' \tag{13}$$

把它代回(12)式，可以得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\tilde{\rho}_{AB}}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{i\hbar}\left[H_I, \tilde{\rho}_{AB}(0)\right]\\ &\quad - \frac{1}{\hbar^2}\int_0^t\left[\tilde{H}_I(t'), \left[\tilde{H}_1(t'), \tilde{\rho}_{AB}(t')\right]\right]\mathrm{d}t'\end{aligned} \tag{14}$$

把(14)式对系统求迹(对变量 B 求迹)，我们可以得到

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\rho}_A}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\hbar^2}\int_0^t Tr_B\left[\tilde{H}_I(t), \left[\tilde{H}_I(t'), \tilde{\rho}_{AB}(t')\right]\right]\mathrm{d}t' \tag{15}$$

其中(14)式的第一项求迹为零。此式推导如下，假设 t

= 0 时刻，系统和库没有关联，此时密度算符 $\tilde{\rho}_{AB}(0)=\tilde{\rho}_A(0)\otimes\tilde{\rho}_B(0)$，其中 $\tilde{\rho}_A(0)$ 为

$$\tilde{\rho}_A(0)=\frac{\prod_j \exp\left(-\hbar\omega_j b_j^+ b_j/K_B T\right)}{Tr\prod_j \exp\left(-\hbar\omega_j b_j^+ b_j/K_B T\right)} \tag{16}$$

由(11)式和(16)式得到

$$Tr_B\left[\tilde{H}_1(t),\tilde{\rho}_{AB}(0)\right]=0 \tag{17}$$

由于库很大，当库与系统相互作用时，可以认为库没有改变(即作马尔可夫近似)，即有 $\tilde{\rho}_{AB}(t)=\tilde{\rho}_A(t)\otimes\tilde{\rho}_B(0)$。下面把(14)式右边展开，逐项求出。

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\tilde{\rho}_{AB}}{\mathrm{d}t}&=-\frac{1}{\hbar^2}\int_0^t Tr_B\left[\tilde{H}_I(t),\left[\tilde{H}_I(t'),\tilde{\rho}_{AB}(t')\right]\right]\mathrm{d}t'\\&=-\frac{1}{\hbar^2}\int_0^t Tr\left[\tilde{H}_I(t)\tilde{H}_I(t')\tilde{\rho}_{AB}(t')-\tilde{H}_I(t)\tilde{\rho}_{AB}(t')\tilde{H}_I(t')\right]\mathrm{d}t'\\&\quad-\frac{1}{\hbar^2}\int_0^t Tr\left[-\tilde{H}_I(t')\tilde{\rho}_{AB}(t')\tilde{H}_I(t)+\tilde{\rho}_{AB}(t')\tilde{H}_I(t')\tilde{H}_I(t)\right]\mathrm{d}t'\end{aligned} \tag{18}$$

为了简化篇幅，这里给出其中第一项的具体求解过程

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{\hbar^2}\int_0^t Tr\left[\tilde{H}_I(t)\tilde{H}_I(t')\tilde{\rho}_{AB}(t')\right]\mathrm{d}t'\\&=-\frac{1}{\hbar^2}\int_0^t Tr\left[G(t)G'(t')a^+a^++G(t)G^+(t)a^+a+G^+(t)G(t')aa^++G^+(t)G^+(t')aa\right]\tilde{\rho}_{AB}(t')\mathrm{d}t'\\&=-\frac{1}{\hbar^2}\int_0^t Tr\left[G(t)G^+(t')a^+a+G^+(t)G(t')aa^+\right]\tilde{\rho}_{AB}(t')\mathrm{d}t'\\&=-\int_0^t\sum_k\langle b_k|\sum_j g_j b_j\exp\left[i(\omega-\omega_j)t\right]\cdot\sum_m g_m^* b_m^+\exp\left[-i(\omega-\omega_m)t'\right]a^+a\tilde{\rho}_{AB}(t')|b_k\rangle\mathrm{d}t'\\&\quad-\int_0^t\sum_k\langle b_k|\sum_j g_j^* b_j^+\exp\left[-i(\omega-\omega_j)t\right]\cdot\sum_m g_m b_m\exp\left[i(\omega-\omega_m)t'\right]\tilde{\rho}_B(0)\cdot aa^+\tilde{\rho}_A(t')|b_k\rangle\mathrm{d}t'\\&=-\int_0^t\mathrm{d}t'\int_0^\infty g^2(\omega)\left(\overline{n(\omega)}+1\right)D(\omega_j)\exp\left[i(\omega-\omega_j)(t-t')\right]a^+a\tilde{\rho}_A(t')\mathrm{d}\omega_j\\&\quad-\int_0^t\mathrm{d}t'\int_0^\infty g^2(\omega)\overline{n(\omega)}D(\omega_j)\exp\left[-i(\omega-\omega_j)(t-t')\right]aa^+\tilde{\rho}_A(t')\mathrm{d}\omega_j\\&=-\pi g^2(\omega)D(\omega)\left(1+\overline{n(\omega)}\right)a^+a\tilde{\rho}_A(t)-iP\int_0^\infty\frac{g^2(\omega_j)D(\omega_j)\left(1+\overline{n(\omega)}\right)}{\omega-\omega_j}\mathrm{d}\omega_j\cdot a^+a\tilde{\rho}_A(t)\\&\quad-\pi g^2(\omega)D(\omega)\overline{n(\omega)}aa^+\tilde{\rho}_A(t)+iP\int_0^\infty\frac{g^2(\omega_j)D(\omega_j)\overline{n(\omega)}}{\omega-\omega_j}\mathrm{d}\omega_j\cdot aa^+\tilde{\rho}_A(t)\\&=-\left(A+i\Delta\omega\left(1+\overline{n(\omega)}\right)\right)\cdot a^+a\tilde{\rho}_A(t)-\left(B-i\Delta\omega\overline{n(\omega)}\right)\cdot aa^+\tilde{\rho}_A(t)\end{aligned} \tag{19}$$

其中系数 $A\equiv\pi g^2(\omega)D(\omega)\left(1+\overline{n(\omega)}\right)$，$B=\pi g^2(\omega)D(\omega)\overline{n(\omega)}$

同理可得其它各项(注意：(19)式中的第一项与第四项、第二项与第三项互为共轭项，可利用此性质在得到第一项和第二项后，立刻得到第三项和第四项两式)。

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{\hbar^2}\int_0^t Tr\left[-\tilde{H}_I(t)\tilde{\rho}_{AB}(t')\tilde{H}_I(t')\right]\mathrm{d}t'\\&=\left[B+i\cdot\overline{n(\omega)}\Delta\omega\right]\cdot a^+\tilde{\rho}_A(t)a+\left[A-i\cdot\left(\overline{n(\omega)}+1\right)\cdot\Delta\omega\right]\cdot a\tilde{\rho}_A(t)a^+\end{aligned} \tag{20}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\hbar^2}\int_0^t Tr\left[-\tilde{H}_I(t')\tilde{\rho}_{AB}(t')\tilde{H}_I(t)\right]\mathrm{d}t' \\
&=\left[B-i\cdot\overline{n(\omega)}\Delta\omega\right]\cdot a^+\tilde{\rho}(t)a+\left[A-i\cdot\left(\overline{n(\omega)}+1\right)\cdot\Delta\omega\right]\cdot a\tilde{\rho}(t)a^+
\end{aligned}
\tag{21}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\hbar^2}\int_0^t Tr\left[\tilde{\rho}_{AB}(t')\tilde{H}_I(t')\tilde{H}_I(t)\right]\mathrm{d}t' \\
&=-\left(A+i\Delta\omega\left(1+\overline{n(\omega)}\right)\right)\cdot\tilde{\rho}_A(t)a^+a-\left(B+i\Delta\omega\cdot\overline{n(\omega)}\right)\tilde{\rho}_A(t)aa^+
\end{aligned}
\tag{22}
$$

把(19)~(22)式代入(15)式，得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\tilde{\rho}_A}{\mathrm{d}t}=&-\left[A+i\left(1+\overline{n(\omega)}\right)\Delta\omega\right]a^+a\tilde{\rho}_A(t)-\left[B-i\cdot\overline{n(\omega)}\cdot\Delta\omega\right]aa^+\tilde{\rho}_A(t) \\
&+\left[B+i\cdot\overline{n(\omega)}\Delta\omega\right]\cdot a^+\tilde{\rho}_A(t)a+\left[A-i\cdot\overline{n(\omega)}+1)\cdot\Delta\omega\right]a\tilde{\rho}_A(t)a^+ \\
&+\left[B-i\cdot\overline{n(\omega)}\Delta\omega\right]\cdot a^+\tilde{\rho}_A(t)a+\left[A+i\cdot\left(\overline{n(\omega)}+1\right)\cdot\Delta\omega\right]a\tilde{\rho}_A(t)a^+ \\
&-\left[A-i\left(1+\overline{n(\omega)}\right)\Delta\omega\right]\cdot\tilde{\rho}_A(t)a^+a-\left[B+i\cdot\overline{n(\omega)}\Delta\omega\right]\tilde{\rho}_A(t)aa^+
\end{aligned}
\tag{23}
$$

把(23)式化简整理得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\tilde{\rho}_A(t)}{\mathrm{d}t}=&-i\Delta\omega\left[a^+a,\tilde{\rho}_A(t)\right]+A\left[a,\tilde{\rho}_A(t)a^+\right]+A\left[a\tilde{\rho}_A(t),a^+\right] \\
&+B\left[a^+,\tilde{\rho}_A(t)a\right]+B\left[a^+\tilde{\rho}_A(t),a\right]
\end{aligned}
\tag{24}
$$

上式可以化简成如下的等式

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\tilde{\rho}_A(t)}{\mathrm{d}t}=&-i\Delta\omega\left[a^+a,\tilde{\rho}_A(t)\right]-\frac{\gamma}{2}\left(1+\overline{n(\omega)}\right)\left(\tilde{\rho}_A(t)a^+a+a^+a\tilde{\rho}_A(t)-2a\tilde{\rho}(t)a^+\right) \\
&-\frac{\gamma}{2}\overline{n(\omega)}\left(\tilde{\rho}_A(t)aa^++aa^+\tilde{\rho}_A(t)-2a^+\tilde{\rho}_A(t)a\right)
\end{aligned}
\tag{25}
$$

对于 $T=0$ 或者 $\langle n(\omega)\rangle=0$ 和 $\Delta\omega\approx0$，我们得到

$$
\frac{\mathrm{d}\tilde{\rho}_A(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{\gamma}{2}\left(\tilde{\rho}_A(t)a^+a+a^+a\tilde{\rho}_A(t)-2a\tilde{\rho}(t)a^+\right)\tag{26}
$$

其中 $\gamma\equiv2(A-B)=2\pi g^2(\omega)D(\omega)$，$\gamma$ 表征了耗散环境衰减速率的物理量，$D(\omega)$ 为光子数密度分布。(25)式就是耗散环境中密度算符的演化遵循的密度方程。

4. 结果及讨论[12]

以上我们从介观 LC 电路与环境的相互作用出发，推导了电磁环境中密度算符的演化遵循的密度方程。该结论在量子光学中经常用到，但在国内的文献中难以见到。本文的推导对加深理解和研究介观电路理论具有一定的指导意义。

参考文献 (References)

[1] Louisell, W.H. (1973) Quantum statistical properties of radiation. John Wiley, New York.

[2] Cheng, B., Li, Y.Q., et al. (1997) Quantum effects of charge in the mesoscopic circuit. *Acta Physica Sinica*, **46**, 131-133.

[3] Cui, Y.S. (1998) Quantum fluctuations of voltage and current in mesoscopic LC circuit. *Acta Photonica Sinica*, **27**, 517-520.

[4] Ji, Y.H., Rao, J.P., et al. (2002) Quantum tunneling effect in the mesoscopic LC circuit. *Acta Physica Sinica*, **51**, 395-398.

[5] Ji, Y.H., Luo, H.M., et al. (2004) Preparation of schrodinger cat state via a mesoscopic LC circuit. *Acta Physica Sinica*, **53**, 2534-2538.

[6] Xia, X.J. (2009) Evolution of quantum state in the mesoscopic LC circuit driven by a time dependent source. **26**, 694-697.

[7] Zhou, X.F. (2007) Evolution of quantum state in the mesoscopic LC circuit driven by time dependent source. Chinese Journal of Quantum Electronics, **24**, 600-604.

[8] Zhang, D.-Y., Guo, P. and Gao, F. (2007) Fidelity of two-level atoms' quantum states in a strong thermal radiation field. *Acta Physica Sinica*, **56**, 1906-1910.

[9] Tan, W.H. (2008) An introduction to quantum optics. Science Publication, Beijing.

[10] Bao, J.D. and Zhou, Y.Z. (2005) Anomalous dissipation: Strong non-Markovian effect and its dynamical origin. *Physical Review E*, **71**, 010102.

[11] Bai, Z.W. and Bao, J.D. (2005) Classic and quantum diffusion in the presence of velocity-dependent coupling. *Physical Review E*, **72**, 061105.

[12] Orszag, M. (2007) Quantum optics. Science Publication, Beijing.