

Anomalous Spectral Behavior of Ultrashort Pulsed Laguerre-Gaussian Beams Diffracted by Circular Ring

Qianhuan Hu, Qihui Zou

School of Science, Southwest Petroleum University, Chengdu Sichuan
Email: 672406591.com, qihui_zou.163.com

Received: Dec. 10th, 2015; accepted: Dec. 27th, 2015; published: Dec. 30th, 2015

Copyright © 2015 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

The spectral anomalies of ultrashort pulsed Laguerre-Gaussian beams diffracted by a circular ring are studied. It is shown that the spectral is split into two peaks with equal height at the critical diffraction angle θ_c , this phenomenon is referred to as spectral switch. With increasing pulse duration, the frequency difference between the two equal heights of the spectral switch decreases and the critical position, where the spectral switch taking place is closer to the z axis and the relative spectral shift decreases. And with increasing the size of the circular ring increases, the relative spectral shift remains.

Keywords

Ultrashort Pulsed, Laguerre-Gaussian Beam, Circular Ring, Spectral Switch, Spectral Blue-Shift

超短脉冲拉盖尔 - 高斯光束通过圆环后的光谱异常

胡前欢, 邹其徽

西南石油大学理学院, 四川 成都
Email: 672406591.com, qihui_zou.163.com

摘要

本文对超短脉冲拉盖尔-高斯脉冲光束通过圆环光阑后在远场的光谱移动和光谱开关以及临界衍射角附近的功率谱变化规律进行了研究。结果表明: 在临界衍射角附近超短脉冲拉盖尔-高斯光束光谱分裂成两等峰值, 即产生了光谱开关效应; 随着脉冲宽度的增加, 两等峰值之间的角频率间隔减小, 光谱开关产生的位置向轴靠近, 相对光谱移动减小; 而随着圆环孔径的增大, 光谱开关产生的位置发生变化, 但相对光谱移动基本保持不变。

关键词

超短脉冲, 拉盖尔-高斯光束, 圆环光阑, 光谱开关, 光谱蓝移

1. 引言

在奇点光学[1]中, 蒲继雄等人[2]首次提出了光谱开关的概念; 随后, Foley 和 Wolf [3]及 Pu J 等人[4]对光谱开关做了相应的分析并对其产生的物理机制进行了深入的研究[3] [4]。迄今为止, 与此相关的许多研究[2]-[6]都得到了实验的验证[7] [8]。而光谱异常行为在信息编码中具有潜在的应用价值, 研究某些光束通过光阑后的光谱异常行为[9]也变得十分具有实际意义。超短脉冲拉盖尔-高斯光束通过圆孔的光谱异常行为已进行了相关的研究[10], 本文基于菲涅耳衍射积分公式, 推导出了超短脉冲拉盖尔-高斯脉冲光束通过圆环光阑后的空间-频率域中解析式, 计算分析了圆环孔径大小的变化以及脉冲宽度的变化对超短脉冲拉盖尔-高斯光束的光谱特性及光谱开关的影响。

2. 理论推导

在柱坐标系中, 设入射面 $z = 0$ 上有一圆对称拉盖尔-高斯脉冲光束

$$E_0(\rho_0, 0, \omega) = S(\omega) L_n \left[\frac{2\rho_0^2}{w_0^2} \right] \exp \left[-\frac{\rho_0^2}{w_0^2} \right] \quad (1)$$

式中 w_0 为束腰宽度, 是与频率无关的常量; ρ_0 为径向距离; $L_n(\cdot)$ 为 n 阶拉盖尔函数; $S(\omega)$ 为初始轴上的脉冲光谱, 是脉冲信号 $f(t)$ 的傅里叶变换谱, 即

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(i\omega t) dt \quad (2)$$

设该拉盖尔-高斯脉冲光束在 $z = 0$ 平面处通过一内径为 a , 外径为 b 的圆环光阑。将(1)式代入菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式, 得在 $z > 0$ 的空间的任一点的光场为[10]

$$E(\rho, z, \omega) = \frac{ik}{z} \exp \left[-ikz - \frac{ik\rho^2}{2z} \right] S(\omega) \int_0^\infty T(\rho_0) \exp \left[-\left(\frac{1}{w_0^2} + \frac{ik}{2z} \right) \rho_0^2 \right] J_0 \left(\frac{k\rho\rho_0}{z} \right) L_n \left(\frac{2\rho_0^2}{w_0^2} \right) \rho_0 d\rho_0 \quad (3)$$

式中, $k = \omega/c$ 为波数, $J_0(\cdot)$ 表示第一类零阶 Bessel 函数, $T(\rho_0)$ 为圆环光阑函数

$$T(\rho_0) = \begin{cases} 1 & a \leq \rho_0 \leq b \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (4)$$

利用贝塞尔函数和拉盖尔函数的级数展开式

$$J_0(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s! \Gamma(s+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s} \quad (5)$$

$$L_n(x) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{n!}{m!(n-m)!} \frac{x^m}{m!} \quad (6)$$

则(3)式可化为

$$E(\rho, z, \omega) = \frac{ik}{z} \exp\left[-ikz - \frac{ik\rho^2}{2z}\right] S(\omega) \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^{m+s} n! 2^m k^{2s} w_0^{2s+2} \rho^{2s}}{2^{2s+1} s! (m!)^2 (n-m)! z^{2s} \Gamma(s+1)} \cdot \left(1 + \frac{iz_0}{z}\right)^{-(m+s+1)} \left[\Gamma\left(1+m+s, \delta_1^2 \left(1 + \frac{iz_0}{z}\right)\right) - \Gamma\left(1+m+s, \delta_2^2 \left(1 + \frac{iz_0}{z}\right)\right) \right] \quad (7)$$

式中 c 为真空中光速, $\delta_1 = a/w_0$ 和 $\delta_2 = b/w_0$ 表示截断参数, z_0 是瑞利距离, $\Gamma(\cdot)$ 表示 Gamma 函数。(7) 式即超短脉冲拉盖尔-高斯光束通过圆环光阑后在频域中的表达式, 它适用于近场和远场区域。

在远场近似 ($z \gg z_0$) 情况下, (7) 式化简为

$$E(\rho, z, \omega) = \frac{ik}{z} \exp\left[-ikz - \frac{ik\rho^2}{2z}\right] S(\omega) \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^{m+s} n! 2^m k^{2s} w_0^{2s+2} \rho^{2s}}{2^{2s+1} s! (m!)^2 (n-m)! z^{2s} \Gamma(s+1)} \left[\Gamma(1+m+s, \delta_1^2) - \Gamma(1+m+s, \delta_2^2) \right] \quad (8)$$

设在 $z=0$ 处的高斯脉冲为[11]

$$f(t) = \exp\left[-\frac{t^2}{T^2}\right] \exp(-i\omega_c t) \quad (9)$$

式中, T 是与初始时刻脉冲宽度 T_{FWHM} 相关的参数, 即 $T_{\text{FWHM}} = 2T(\ln 2)^{1/2}$, ω_c 为载波频率。其傅里叶变换谱为

$$S(\omega) = \frac{T}{\sqrt{2}} \exp\left[-\frac{T^2(\omega - \omega_c)^2}{4}\right] \quad (10)$$

将(10)代入(8)可得超短脉冲拉盖尔-高斯光束在远场的光场为

$$E(\rho, z, \omega) = \frac{ikT}{\sqrt{2}z} \exp\left[-ikz - \frac{ik\rho^2}{2z}\right] \exp\left[-\frac{T^2(\omega - \omega_c)^2}{4}\right] \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^{m+s} n! 2^m k^{2s} w_0^{2s+2} \rho^{2s}}{2^{2s+1} s! (m!)^2 (n-m)! z^{2s} \Gamma(s+1)} \left[\Gamma(1+m+s, \delta_1^2) - \Gamma(1+m+s, \delta_2^2) \right] \quad (11)$$

由式(11)可得超短脉冲拉盖尔-高斯光束通过圆环后在远场的功率谱为

$$|E(\rho, z, \omega)|^2 = \frac{T^2}{2} \exp\left[-\frac{T^2(\omega - \omega_c)^2}{2}\right] M(\rho, z, \omega) \quad (12)$$

式中 $M(\rho, z, \omega)$ 为光谱调制函数, 用来描述圆环光阑衍射对源光谱的调制作用。

$$M(\rho, z, \omega) = \frac{\omega^2}{c^2 z^2} \left[\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^{m+s} n! 2^m \omega^{2s} w_0^{2s+2} \rho^{2s}}{2^{2s+1} s! (m!)^2 (n-m)! c^{2s} z^{2s} \Gamma(s+1)} \left[\Gamma(1+m+s, \delta_1^2) - \Gamma(1+m+s, \delta_2^2) \right] \right]^2 \quad (13)$$

将(12)式对 ω 求导, 并令其等于零可得轴上功率谱取极大值时的角频率应满足关系

$$\omega = \frac{\omega_c}{2} + \frac{\omega_c}{2} \sqrt{1 + \frac{8}{\omega_c^2 T^2}} \quad (14)$$

对(14)式进行泰勒级数展开并忽略高阶项可得轴上光谱移动为

$$\Delta\omega = \omega - \omega_c \approx \frac{2}{\omega_c T^2} \quad (15)$$

上式表明超短脉冲拉盖尔-高斯光束在远场轴上光谱蓝移, 大小为 $1/T^2\omega_c$, 轴上光谱蓝移与文献[9]一致。 $\Delta\omega$ 与脉冲宽度 T 有关, 脉冲宽度越大, 蓝移越小。

3. 数值计算结果和分析

对 $n=3$ 时超短脉冲拉盖尔-高斯光束的解析式进行计算来说明超短脉冲拉盖尔-高斯光束通过圆环后的光谱移动及光谱开关等特性。

在远场傍轴近似下, $\sin\theta \approx \tan\theta = \rho/z$, θ 为衍射角, 图 1 给出了在载波频率处不同截断参数 δ_2 的光谱调制函数 $M(\rho, z, \omega)$ 与衍射角 θ 的关系。计算参数: $\delta_1 = 1$, $\omega_c = 2.36 \text{ fs}^{-1}$, $w_0 = 0.05 \text{ mm}$, $z = 100 \text{ mm}$ 。由图 1 可以看出, 当 $\delta_2 = 1.6$ 时, 随着衍射角的增大, 光谱调制函数减小, 当 $\theta = 0.252^\circ$ 时调制函数第一次取得极小值, 而随着衍射角的继续增大, 调制函数先增大再减小, 然后再增大再减小, 分别于 $\theta = 0.579^\circ$ 和 $\theta = 0.908^\circ$ 处取得第二次和第三次极小值, 即 0.252° 、 0.579° 和 0.908° 为此时光谱调制函数的一阶、二阶和三阶临界衍射角。当 $\delta_2 = 2$ 时, 其相应的一阶、二阶和三阶临界衍射角分别为 0.268° 、 0.587° 和 0.888° 。当 $\delta_2 = 2.4$ 时, 其对应的一阶、二阶和三阶临界衍射角分别为 0.105° 、 0.330° 和 0.577° 。

图 2 给出了在第一阶临界衍射角附近的超短脉冲拉盖尔-高斯光束的归一化功率谱。计算参数: $\omega_c = 2.36 \text{ fs}^{-1}$, $w_0 = 0.05 \text{ mm}$, $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 2$, $T = 3 \text{ fs}$ 。由图可以看出, 在衍射角 $\theta_c = 0.2608^\circ$ 处, 光谱分裂成两个相等的峰值, 两峰对应的角频率分别为 1.976 fs^{-1} 和 2.872 fs^{-1} , 且 $\omega_{\min} = 2.42 \text{ fs}^{-1}$ 时, $|E(\rho, z, \omega_{\min})|^2 = 0$, 这种光谱异常行为被称为光谱开关[2]; 当 $\theta = 0.252^\circ < \theta_c$ 时, 功率谱取得极大值对应的角频率为 2.016 fs^{-1} , 小于载波频率, 称为光谱红移; 当 $\theta = 0.266^\circ > \theta_c$ 时, 功率谱取得极大值时的角频率为 2.848 fs^{-1} , 大于载波频率, 称为光谱蓝移。

图 3 给出了 $T = 3 \text{ fs}$, 6 fs , 9 fs 时的超短脉冲拉盖尔-高斯光束的一阶光谱开关, 计算参数: $\omega_c = 2.36 \text{ fs}^{-1}$, $w_0 = 0.05 \text{ mm}$, $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 2$ 。由图可以看出随着脉冲宽度的增加, 对应于 $T = 3 \text{ fs}$ 、 6 fs 和 9 fs 时的临界衍射角分别为 0.166° 、 0.470° 和 0.528° , 产生一阶光谱开关的衍射角逐渐增大; 光谱开关的两等峰值之间的角频率间隔分别为 0.91 fs^{-1} 、 0.46 fs^{-1} 和 0.32 fs^{-1} , 光谱开关的两个等峰值之间的角频率间隔减小。由此可见, 随着脉冲宽度的增加, 光谱开关的两等峰值之间的角频率间隔减小, 对应的临界衍射角亦发生变化。

我们定义相对光谱移动为

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_c} = \frac{\omega_p - \omega_c}{\omega_c}$$

式中, ω_p 表示功率谱取极大值时的角频率。 $\Delta\omega/\omega_c > 0$, 光谱蓝移, $\Delta\omega/\omega_c < 0$, 光谱红移。

图 4 给出了超短脉冲拉盖尔-高斯光束相对光谱移动随衍射角的变化关系, 计算参数: $\omega_c = 2.36 \text{ fs}^{-1}$, $w_0 = 0.05 \text{ mm}$, $\delta_1 = 1$ 。由图 4(a)可以看出, 当 $T = 3 \text{ fs}$, $\delta_2 = 1.6$ 时, 轴上相对光谱移动 $\Delta\omega/\omega_c = 0.038983$, 随衍射角增大, 光谱蓝移减小, $\theta = 0.1311^\circ$ 时, $\Delta\omega/\omega_c = 0$, 衍射角进一步增大, 光谱红移, 当衍射角增大到 $\theta = 0.2475^\circ$ 时, $\Delta\omega/\omega_c$ 突然从 -0.15254 跃至 0.20678 , 即产生了第一阶光谱开关效应; 而对应于 $T = 3$

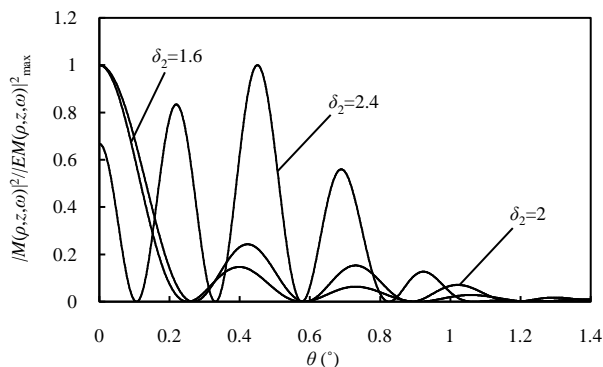


Figure 1. The normalized spectral modifier versus diffraction angle

图 1. 归一化光谱调制函数与衍射角的关系

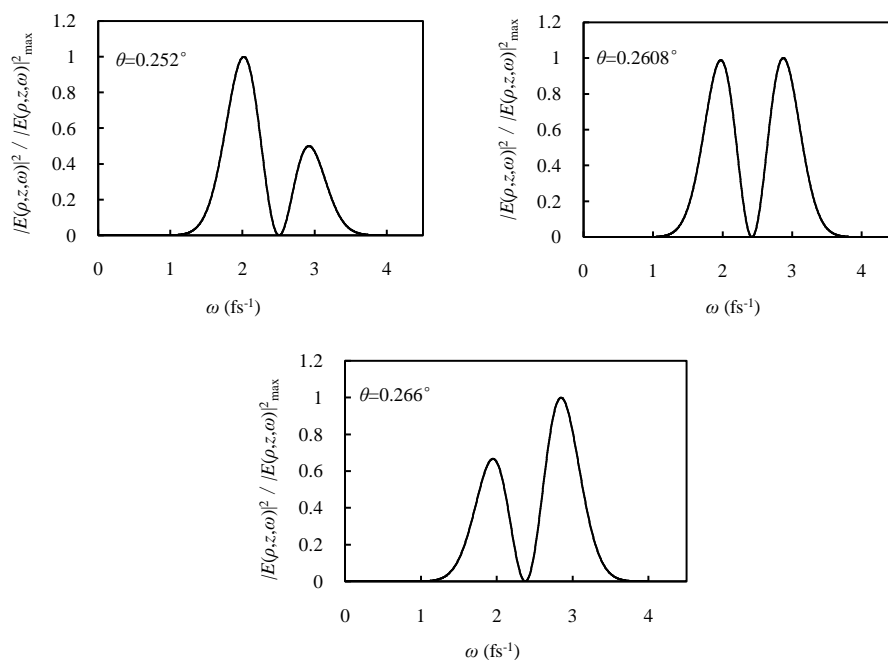


Figure 2. The normalized power spectrum of an ultrashort pulsed Laguerre-Gaussian beam near the critical diffraction angle

图 2. 超短脉冲拉盖尔 - 高斯光束在临界衍射角附近的归一化功率谱

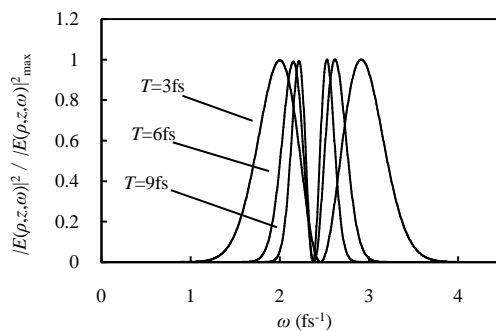


Figure 3. The dependence of the first-order spectral switch on the pulse duration $T = 3$ fs, 6 fs, 9 fs

图 3. $T = 3$ fs, 6 fs, 9 fs 时的超短脉冲拉盖尔 - 高斯光束的一阶光谱开关

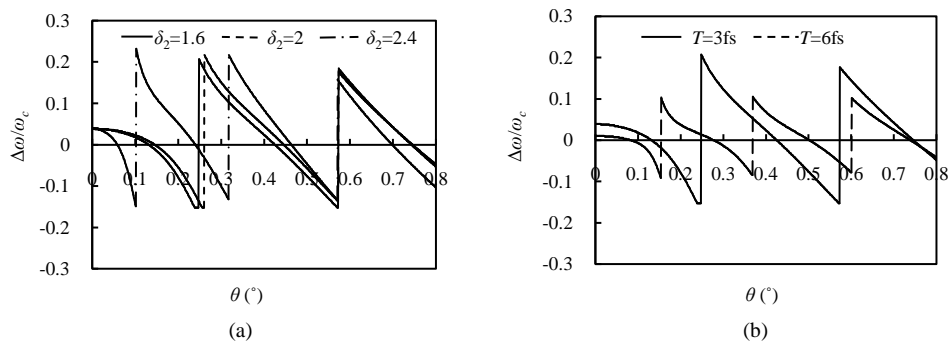


Figure 4. The relative spectral shift of an ultrashort pulsed Laguerre-Gaussian beam versus diffraction angle

图 4. 超短脉冲拉盖尔-高斯脉冲光束的相对光谱移动随衍射角的变化关系

fs, $\delta_2 = 2$ 时, 在 $\theta = 0.2605^\circ$ 处, $\Delta\omega/\omega_c$ 突然从 -0.15254 跃至 0.21695 , 即第一阶光谱开关效应产生; 而对应于 $T = 3$ fs, $\delta_2 = 2.4$ 时, 在 $\theta = 0.1015^\circ$ 处, $\Delta\omega/\omega_c$ 突然从 -0.14915 跃至 0.23220 , 即第一阶光谱开关效应产生。则由此可知, 随着圆环孔径的增加, 相对光谱移动基本保持不变, 光谱开关位置发生变化。

由图 4(b) 可以看出, 对应于 $T = 6$ fs, $\delta_2 = 2$ 时, 在 $\theta = 0.1535^\circ$ 处, $\Delta\omega/\omega_c$ 突然从 -0.09152 跃至 0.10339 , 即第一阶光谱开关效应产生。与 $T = 3$ fs, $\delta_2 = 2$ 时比较, 其相对光谱移动显著减小, 同时光谱开关位置向轴靠近。所以, 随着脉冲宽度的增加, 相对光谱移动减小, 光谱开关位置向轴逼近。总的来说, 圆环孔径的大小主要影响光谱开关的位置, 而脉冲宽度显著影响相对光谱移动的大小, 而对光谱开关的位置影响较小。

4. 结论

本文基于菲涅耳衍射积分和级数展开法导出了超短脉冲拉盖尔-高斯光束通过圆环光阑后的频谱解析式, 并对其进行了数值计算和分析。结果表明: 超短脉冲拉盖尔-高斯光束通过圆环光阑后在临界角附近光谱分裂成两等值的波峰, 即产生光谱开关效应, 且光谱在衍射角略小于临界衍射角 θ_c 时, 光谱红移, 在衍射角略大于临界衍射角 θ_c 时, 光谱蓝移。随着圆环孔径的增加, 相对光谱移动基本保持不变; 而随着脉冲宽度的增加, 光谱开关的两等峰值之间角频率间隔逐渐减小, 相应阶光谱开关的位置明显向轴靠近, 相对光谱移动亦明显减小。

参考文献 (References)

- [1] Soskin, M.S. and Vasnetsov, M.V. (2001) "Singular Optics" in Progress in Optics. In: Wolf, E., Ed., *Progress in Optics*, Elsevier, Amsterdam.
- [2] Pu, J., Zhang, H., et al. (1999) Spectral Shifts and Spectral Switches of Partially Coherent Light Passing through an Aperture. *Optics Communications*, **162**, 57-63. [http://dx.doi.org/10.1016/S0030-4018\(99\)00051-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0030-4018(99)00051-6)
- [3] Foley, J.T. and Wolf, E. (2002) Phenomenon of Spectral Switches as a New Effect in Singular Optics with Polychromatic Light. *Journal of the Optical Society of America*, **19**, 2510-2516. <http://dx.doi.org/10.1364/JOSAA.19.002510>
- [4] Pu, J., Nemoto, S. and Lü, B. (2003) Effect of Spectral Correlations on Spectral Switches in the Diffraction of Partially Coherent Light. *Journal of the Optical Society of America*, **20**, 1933-1939. <http://dx.doi.org/10.1364/JOSAA.20.001933>
- [5] Gbur, G., Visser, T.D. and Wolf, E. (2002) Anomalous Behavior of Spectra Near Phase Singularities of Focused Waves. *Physical Review Letters*, **88**, 013901-4. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.88.013901>
- [6] 吕百达, 潘留占. 被光阑衍射的多色部分空间相干光的光谱异变和光谱开关[J]. 中国科学, 2003(5): 454-463.
- [7] Kandpal, H.C., Anand, S. and Vaishya, J.S. (2002) Experimental Observation of the Phenomenon of Spectral Switching for a Class of Partially Coherent Light. *IEEE Journal of Quantum Electron*, **38**, 336-339. <http://dx.doi.org/10.1109/3.992545>

-
- [8] Popescu, G. and Dogariu, A. (2002) Spectral Anomalies at Wave-Front Dislocation. *Physical Review Letters*, **88**, 183902-4. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.88.183902>
- [9] Lv, B. and Pan, L. (2002) Spectral Switching of Gaussian-Schell-Model Beam through an Aperture Lens. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, **38**, 340-344. <http://dx.doi.org/10.1109/3.992546>
- [10] 邹其徽, 吕百达. 超短脉冲贝塞尔 - 高斯光束在自由空间的传输特性[J]. *强激光与粒子束*, 2005, 17(12): 1769-1772.
- [11] Agrawal, G.P. (1999) Far-Field Diffraction of Pulsed Optical Beams in Dispersive Media. *Optics Communications*, **167**, 15-22. [http://dx.doi.org/10.1016/S0030-4018\(99\)00303-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0030-4018(99)00303-X)