**Applied Physics** 应用物理, 2018, 8(3), 157-160
Published Online March 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/app
https://doi.org/10.12677/app.2018.83019

Hans汉斯

# Another Proof Theorem of Gauss in the Magnetic Field

**Qili Liao[1], Le Tang[2], Yan Yu[1], Ya Deng[1]**

[1]College of Mobile Telecommunications, Chongqing University of Posts and Telecom, Chongqing
[2]High School of Chongqing Jianshan, Chongqing
Email: xiaosueer@163.com, 76045680@qq.com

Received: Mar. 10th, 2018; accepted: Mar. 21st, 2018; published: Mar. 28th, 2018

## Abstract

**In this paper, we prove theorem of magnetic field of Gauss with the first principle of the motion charge creating the magnetic field equivalence the law of Biot-Savart. This proves to be a further understanding of the nature of the magnetic field. And it can be used for reference in college physics teaching.**

## Keywords

**Motion Charge, Law of Biot-Savart, Theorem of Magnetic Field of Gauss**

# 磁场中的高斯定理另一证明

**廖其力[1]，唐　乐[2]，余　艳[1]，邓　娅[1]**

[1]重庆邮电大学移通学院，重庆
[2]重庆兼善中学，重庆
Email: xiaosueer@163.com, 76045680@qq.com

收稿日期：2018年3月10日；录用日期：2018年3月21日；发布日期：2018年3月28日

## 摘　要

用与毕奥－萨伐尔定律等价的运动电荷产生磁场的第一性原理证明了磁场中的高斯定理，该证明对进一步理解磁场的本质和大学物理教学有一定的借鉴作用。

文章引用: 廖其力, 唐乐, 余艳, 邓娅. 磁场中的高斯定理另一证明[J]. 应用物理, 2018, 8(3): 157-160.
DOI: 10.12677/app.2018.83019

## 关键词

**运动电荷，毕奥－萨伐尔定律，高斯定理**



## 1. 引言

### 1.1. 毕奥-萨伐尔定律发现简介

自丹麦物理学家奥斯特(H. C. Oersted, 1777~1851)在 1820 年发现电流的磁效应以来，磁场的研究得到了较快发展[1] [2]，比如，法国数学家兼物理学家安培(A. M. Ampere, 1775~1836)在同年的 9 月得出判定电流产生磁感应强度方向的右手螺旋定则；10 月法国物理学家毕奥 (J. B. Biot, 1774~1862) 和萨伐尔(F. Savart, 1791~1841)发现了直线电流产生的磁感应强度跟到直线的距离成反比，跟电流强度成正比。紧接着，法国数学家、物理学家拉普拉斯(P. S. Laplace, 1749~1827)在毕奥、萨伐尔、安培等人的基础上将电流产生的磁场给出了数学表达式，这就是通常所说的毕奥-萨伐尔定律。在 1831 年法拉第(M. Farday, 1791~1867)发现了电磁感应现象，1834 年他提出了力线概念，可以方便形象地描述电场、磁场，1851 年他给出了电磁感应定律。1865 年麦克斯韦(J. C. Maxwell, 1831~1879)完整地提出电磁场理论，即麦克斯韦方程组，预言了电磁波的存在并建立了光的电磁波理论，德国物理学赫兹(H. R. Hertz)在 1888 年用实验证实了电磁波。至止，经典电磁场理论趋于完备。在麦克斯韦方程组中，关于磁场中的高斯(C. F. Gauss 1777~1855)定理的证明，大多电磁学方面的教材是根据磁感应线是闭合的这一性质给予形象证明[3] [4] [5]。在文献[6] [7]中用毕奥－萨伐尔定律从积分角度给出了严格证明。本文将用从毕奥-萨伐尔定律导出运动电荷产生磁场的公式来证明高斯定理。

### 1.2. 毕奥-萨伐尔定律

设任意载流导体中的电流强度为 $I$，将其分割为无数电流微元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，其方向规定为该处电流方向，该电流微元在空间任意点 $P$ 处产生的磁感应强度 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 为：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\hat{r}}{r^2} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 是电流微元到 $P$ 点的位置矢量，$|\boldsymbol{r}|$ 表示距离，即 $\boldsymbol{r}$ 的模，用 $r$ 表示，$\hat{r}=\boldsymbol{r}/r$ 为位矢 $\boldsymbol{r}$ 的单位矢量；$\mu_0$ 为真空中的磁导率，其值规定为 $4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{A}^{-2}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 的方向由 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\hat{r}$ 的方向决定，$I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\hat{r}$ 是电流微元矢量 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 和位矢 $\hat{r}$ 的矢积，其方向遵从右手螺旋法则。人们习惯把(1)式叫作毕奥-萨伐尔定律。

设载流导体的横截面积为 $s$，其电流可表为：

$$I=nqvs \tag{2}$$

其中 $q$ 为定向移动电荷的电量，$\boldsymbol{v}$ 为定向移动的速度，电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}=nqs\mathrm{d}l\,\boldsymbol{v}$，$s\mathrm{d}l$ 为该电流微元的体积，$ns\mathrm{d}l$ 为该电流元内定向移动电荷的电荷总数目，则单个运动电荷产生的磁场为：

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{ns\mathrm{d}l}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\boldsymbol{v}\times\hat{r}}{r^2} \tag{3}$$

该式揭示了磁场的电本质：磁场由运动电荷产生，也突显了毕奥-萨伐尔定律作为磁场第一性原理的重要性。下面用(3)式证明磁场中的高斯定理。

### 1.3. 磁场中的高斯定理

在麦克斯韦方程组中，关于磁场中的高斯定理积分形式如下：

$$\oiint_s \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0 \tag{4}$$

其微分形式为：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{5}$$

其中$\nabla$是梯度算符，在直角坐标系中的表达式为$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$，$\hat{i},\hat{j},\hat{k}$分别为$x,y,z$轴的单位矢量。由数学中的高斯定理可证明(4)式和(5)式是等价：

$$\oiint_s \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_V(\nabla\cdot\boldsymbol{B})\mathrm{d}V=0$$

所以，只需证明(5)式成立即可。下面将从两方面来证明。

## 2. 磁场中的高斯定理的证明

### 2.1. 运动电荷产生的磁场的高斯定理的证明

不失一般性，设电荷以速度$\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{k}$沿$z$轴运动，即速度分量分别为$v_x=0$、$v_y=0$、$v_z=v$；其位置为$O'(0,0,z')$，它在空间任一点$P(x,y,z)$产生的磁感应强度为$\boldsymbol{B}$，位矢为$\boldsymbol{O'P}=\mathbf{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+(z-z')\hat{k}$，由公式：

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})=(\nabla\times\boldsymbol{f})\cdot\boldsymbol{g}-\boldsymbol{f}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{g}) \tag{6}$$

有：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 q}{4\pi}\nabla\cdot\left(\boldsymbol{v}\times\frac{\hat{r}}{r^2}\right)=\frac{\mu_0 q}{4\pi}\left[(\nabla\times\boldsymbol{v})\cdot\frac{\hat{r}}{r^2}-\boldsymbol{v}\cdot\left(\nabla\times\frac{\hat{r}}{r^2}\right)\right] \tag{7}$$

先证$\nabla\times\boldsymbol{v}=0$：

$$(\nabla\times\boldsymbol{v})_x=\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}=\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial 0}{\partial z}=0$$

同理可证明 $(\nabla\times\boldsymbol{v})_y=(\nabla\times\boldsymbol{v})_z=0$

再证$\nabla\times\frac{\hat{r}}{r^2}=0$：

$$\begin{aligned}\left(\nabla\times\frac{\hat{r}}{r^2}\right)_x&=\frac{\partial\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right)_z}{\partial y}-\frac{\partial\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right)_y}{\partial z}\\&=\frac{\partial\left(\frac{z-z'}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\right)}{\partial y}-\frac{\partial\left(\frac{y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\right)}{\partial z}\\&=\frac{3zy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}-\frac{3yz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}=0\end{aligned}$$

同理可证 $\left(\nabla\times\frac{\hat{r}}{r^2}\right)_y=\left(\nabla\times\frac{\hat{r}}{r^2}\right)_z=0$

故证明：$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$

### 2.2. 电流产生的磁场的高斯定理的证明

由毕奥-萨伐尔定律[8]，电流 $I$ 在空间 $P$ 点产生的磁感应强度 $B$ 是所有电流元在该点产生磁感应强度

$$\boldsymbol{B}=\int\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\int_a^b\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\hat{r}}{r^2} \tag{8}$$

由(8)式有：

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{B}&=\nabla\cdot\left(\int_a^b\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\hat{r}}{r^2}\right)=\int_a^b\left(\nabla\cdot\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\hat{r}}{r^2}\right)\right)\\&=\int_a^b\left(\nabla\cdot\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{nsqv\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\hat{r}}{r^2}\right)\right)=\int_a^b ns\mathrm{d}l\left(\nabla\cdot\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\boldsymbol{v}\times\hat{r}}{r^2}\right)\\&=\int_a^b ns\mathrm{d}l\left(\nabla\cdot\boldsymbol{B}\right)=0\end{aligned}$$

上式中第五个等号后的 $B$ 为单个运动电荷产生的磁感应强度。

由于磁体产生的磁场在本质上讲就是磁体内所有运动电荷(电子和质子)产生的磁感应强度在宏观上的表现，所以磁体产生的磁场由叠加原理可知也是满足高斯定理的。至此我们证明了高斯定理。

## 3. 结论

建立在实验基础之上的毕奥-萨伐尔定律是磁场的基本原理，由它得出的运动电荷产生的磁场更能深刻反映磁场的实质，(1)式是磁场中的第一性原理，就象牛顿(I. Newton, 1642-1727)的万有引力定律反映物质质量之间的基本作用规律和库仑(C. A. Coulomb, 1736-1806)定律反映物质电量之间的基本作用规律一样。从这一公式出发，本文从微分角度证明了磁场中的高斯定理，该证明对理解磁场的起源和大学物理教学有一定的参考作用。

## 参考文献

[1] 陈毓芳，邹延肃. 物理学史简明教程[M]. 北京：北京师范大学出版社, 1986: 183-190.

[2] 申先甲，张锡鑫，束炳如，陈毓芳. 物理学史教程[M]. 湖南教育出版社, 1987: 288-295.

[3] 谢国亚，林朝金，廖其力. 大学物理教程(下) [M]. 吉林：吉林大学出版社, 2012: 31-36.

[4] Purcell, E.M. (1965) Electricity and Magnetism, Berkeley Physics Course. Vol. 2, McGraw Hill, 183-184.

[5] 郭硕鸿. 电动力学[M]. 北京：高等教育出版社, 1979: 13-14.

[6] 赵凯华，陈熙谋. 电磁学[M]. 北京：高等教育出版社, 1985: 352-353.

[7] 梁灿彬，秦光戎，梁竹健. 电磁学[M]. 北京：高等教育出版社, 1980: 294-302.

[8] 廖其力，余艳，邓娅，邓敏艺，白克钊. 用 Mathematica 研究环形电流平面内磁场[J]. 广西物理，2016，37(1): 54-56.

**知网检索的两种方式：**

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7567，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：app@hanspub.org