

A Discussion on Several Problems in Dynamics of Liquid Sloshing

Yuchun Li, Yipeng Ou

Department of Hydraulic Engineering, College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai
Email: ycl2000@tongji.edu.cn, oypster@qq.com

Received: Apr. 5th, 2018; accepted: Apr. 23rd, 2018; published: Apr. 30th, 2018

Abstract

This paper briefly discusses three issues on dynamics of liquid sloshing: 1) the equivalent mechanical model of liquid sloshing; 2) liquid sloshing damping; 3) parametric sloshing. This paper points out that there are modeling mistakes in the classical theory of equivalent mechanical model. Thus the complete correct solutions cannot be derived by the classical theory. This issue should be further clarified. The theoretical and experimental identification methods are discussed for fluid sloshing damping. The sloshing damping should be generally determined by the experiment. A new method (energy growth exponent and coefficient, EGE/EGC) is applied to discuss the unstable properties of parametric sloshing. A colorful instability diagram can be obtained with the EGE/EGC. The instability boundaries by EGE/EGC agree accurately with the traditional solutions. The unstable characteristics of parametric sloshing can be comprehensively described by using EGE/EGC. The nonlinear damping and mode interaction of limit cycle motion of parametric sloshing are discussed in this paper.

Keywords

Liquid Sloshing, Equivalent Mechanical Model, Sloshing Damping, Parametric Sloshing

液体晃动动力学中的若干问题讨论

李遇春, 欧亿鹏

同济大学土木工程学院水利工程系, 上海
Email: ycl2000@tongji.edu.cn, oypster@qq.com

收稿日期: 2018年4月5日; 录用日期: 2018年4月23日; 发布日期: 2018年4月30日

摘要

本文简要讨论了液体晃动动力学中的三大问题: 1) 液体晃动等效力学模型; 2) 液体晃动阻尼问题; 3) 参

数晃动问题。本文指出经典的等效力学模型理论存在建模方法错误, 因而经典理论不能给出完全正确的解答, 这一问题亟需进一步澄清; 讨论了液体晃动阻尼的理论及试验识别方法, 一般情况下, 液体晃动阻尼需要由试验来确定; 讨论了参数晃动稳定性分析的一个新方法—能量增长指数与系数, 采用能量增长指数与系数可给出彩色的参数晃动不稳定图, 得到的不稳定边界与传统理论解精确吻合, 能量增长指数与系数可更全面地描述参数晃动的不稳定性质, 讨论了液体参数晃动的极限环运动非线性阻尼及各模态之间的相互耦合作用。

关键词

液体晃动, 等效力学模型, 晃动阻尼, 参数晃动

Copyright © 2018 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

贮液箱内带有自由液面的液体在受外部激励(扰动)下产生的运动称之为晃动, 外部激励通常来源于容器的加速水平运动与转动。从数学上讲, 带有自由液面的晃动问题可归结为求解液体运动的 Navier-Stokes 方程(或 Euler 方程), 方程一般情况下是非线性的, 且自由液面的边界条件一般情况下表现为非线性方程, 液面位置随时间改变。液体晃动是一种复杂的动力学现象, 与容器的几何特性、液深、激励、壁面特性等参数有关, 求解液体的一般晃动方程是一件相当困难的事情。从工程应用的角度看, 液体晃动问题涉及液体在外激励作用下的晃动自然频率、振型、自由表面波高、液动压力分布以及作用在容器上的液动力、力矩等, 这些液体的动力学效应会对容器及其相关结构安全性、稳定性以及动力学行为产生重要影响。

液体晃动问题涉及数学、物理学、力学以及诸多的工程学领域, 其中工程领域包括航空航天、船舶、土木、水利、化工以及核工程等, 各个不同的学科关于液体晃动的研究论文已多达数千篇, Abramson [1] 与 Dodge [2] 在其专著中总结了航天领域的关于液体火箭内的液体晃动动力学问题; Moiseev 与 Petrov [3] 从力学的角度系统研究了液体晃动的自由振动(晃动)问题; Moiseev 与 Rumjantsev [4] 系统研究了充液刚体的动力稳定性问题, 其中包含了液体的晃动问题; Ibrahim [5] 在 2005 年出版的液体晃动动力学专著中, 引用的论文多达 3000 余篇, 该书堪称液体晃动动力学的百科全书, 其内容几乎涵盖了液体晃动动力学的各个方面; Faltinsen 与 Timokha [6] 从船舶工程的角度, 系统研究了(船舱内)液体的晃动问题; 王照林与刘延柱 [7] 系统研究了航天工程中充液系统动力学问题, 其中包含了液体的晃动问题; 居荣初与曾心传于 1983 年出版的著作(文献 [8]) 可能是国内最早系统介绍土木与水利工程中的液体晃动及其与结构相互作用问题的专著, 这一著作在工程领域得到了广泛的引用; 李遇春 [9] 最近比较系统研究并介绍了水利与土木工程中的液体晃动基本问题。

液体晃动动力学作为流体动力学的一个重要分支, 拥有完整的理论体系, 在不同的学科领域得到了极为广泛的研究, 但液体晃动动力学仍存在一些共性的问题还没有得到很好解决, 本文将讨论液体晃动等效力学模型、液体晃动阻尼以及液体参数晃动三个问题, 提出其中有待解决的问题, 为液体晃动动力学的研究与应用人员提供参考。

2. 液体晃动等效力学(机械)模型

贮液结构物的动力计算问题都会涉及到容器内液体的晃动计算以及液体与结构的相互作用分析, 从

贮液结构设计的角度来考虑, 结构工程师只需要知道液体晃动对结构系统的动力影响, 而液体自身如何运动对于结构设计并不重要, 因此在流体 - 结构相互作用分析中, 只需单方面计算流体对容器的作用效应即可。当贮液容器固有频率与液体晃动固有频率相差较大时, 此时容器壁的微小振动对于液体的晃动影响很小, 这时可以将容器近似看成刚性的。在研究液体的等效力学模型时, 通常将流体假定为无粘性、不可压缩及无旋的液体。液体晃动的等效原则为: ① 流体的原始系统与等效系统具有相同的自然晃动(振动)频率; ② 在液体动力响应的所有时间历程上, 这种等效的力学模型与真实的流体具有完全相同或近似相同的(对结构的)作用效应, 作用效应包括液体对结构的合力与合力矩, 对于结构工程师而言, 液体的等效力学模型将大大简化液体 - 结构的耦合计算, 使液固耦合系统的动力响应分析变得相对容易。

早在上世纪 50 年代, Graham 与 Rodriguez [10] 首先提出了液体晃动等效力学模型的概念, 他们将刚性矩形容器内的液体对容器的作用等效为一个固定质量及一连串的弹簧振子(如图 1 所示); 由于 Graham 与 Rodriguez 的计算模型中包含了无穷级数, 计算比较麻烦, Housner [11] 于 1957 年, 基于一个物理直观, 提出了一个更为简单的等效模型, 这个模型一直在土木与水利工程界得到了广泛应用, 然而 2012 年 Li 与 Wang [12] 的研究表明, Graham 与 Rodriguez, 以及 Housner 的解答均存在缺陷, Graham 与 Rodriguez 给出的弹簧振子位置明显不合理(或存在错误), Housner 公式与精确的公式相比, 在计算固定(脉冲)质量及其位置时误差较大(最大误差达 14.8%), 文献[12]针对经典解答的缺陷, 采用比拟原理提出了一个补充的精确解答, 完善了经典解答; 鉴于部分精确解为无穷级数表达式, 不便于工程应用, 李遇春与来明[13]对部分计算公式进行了数学拟合简化, 提出了表达简单且计算精度高的建议公式。对于其它半圆形、U 形、梯形等二维容器, 由于数学上的巨大困难, 采用解析方法难以得到流体等效模型公式, Li、Di 及 Gong [14] 提出了一种半解析/半数值的方法, 得到了几种非矩形截面内流体等效模型的近似解, 其中 U 形截面内流体的等效模型公式为新修订《水电工程水工建筑物抗震设计规范》[15] 采纳引用。

对于三维直立圆柱形贮液容器, 经典理论[5]给出了精确的液体晃动等效力学模型计算公式, Housner [11] 同样基于物理直观, 提出了近似的等效力学模型, 基于比拟原理[12], 文献[9]导得了精确的等效力学模型公式, 文献[9]研究发现 Housner 模型并不严格满足质量守恒定律, 其固定质量及弹簧振子质量与精

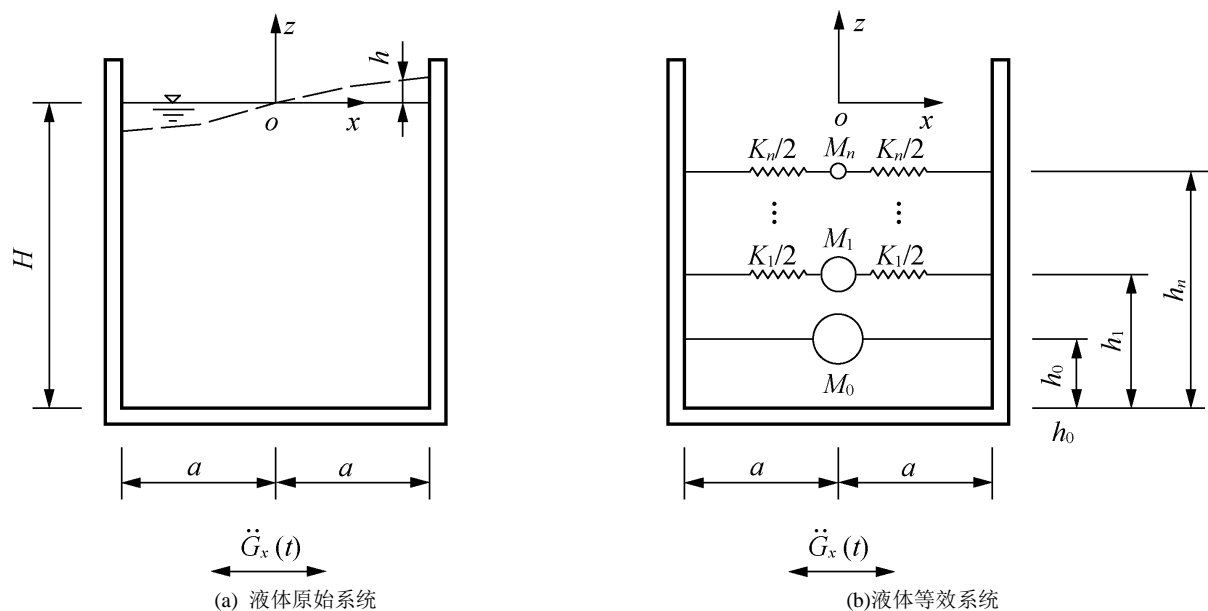


Figure 1. The equivalent mechanical model of liquid sloshing in a rectangular container [12]

图 1. 矩形容器中液体晃动的等效力学模型[12]

确解相比有较大的误差, 因而 Housner 模型并非是一个令人满意的等效力学模型; 此外文献[9]得到的等效质量位置函数与经典理论[5]给出的结果并不相同, 这一现象与前面二维矩形容器的情形类似, 在一些特殊的情况下, 经典理论[5]给出的等效质量位置明显不合理, 等效力学模型的经典理论[2] [5]存在系统性的错误, 这一问题还可能引起其它更多容器(如球形、抛物面容器等)的等效力学模型的错误, 经典理论的主要问题是其等效力学建模概念(方法)存在问题, 从而导致部分理论结果明显不合理, 关于这一问题的详细讨论将另文讨论。

3. 液体晃动阻尼

Dodge [2]、Ibrahim [5]、Faltinsen 与 Timokha [6]对液体阻尼的相关问题进行了全面而系统的阐述, 贮液容器内液体的阻尼来自于四个方面: ① 液体与容器固壁之间的边界层摩擦阻尼; ② 液体内部的黏性阻尼; ③ 自由表面阻尼; ④ 其他毛细阻尼。一般认为液体与容器固壁之间的边界层阻尼起主要作用。

对于小幅液体晃动而言, 可采用(无阻尼的)势流理论来研究液体晃动, 采用速度势函数来描述液体运动, 从而可以得到液体的模态运动方程为:

$$\ddot{q}_j(t) + \omega_j^2 q_j(t) = f_j(t) \quad (j=1,2,3,\dots) \quad (1)$$

式中: ω_j 为液体系统的第 j 阶自然圆频率, $q_j(t)$ 为第 j 阶广义坐标, $f_j(t)$ 为第 j 阶广义力。方程(1)表达了一个无阻尼液体系统的强迫振动方程, 当需要考虑液体的晃动阻尼时, 可在方程(1)上增加一个阻尼项 $2\zeta_j \omega_j \dot{q}_j(t)$, 即有

$$\ddot{q}_j(t) + 2\zeta_j \omega_j \dot{q}_j(t) + \omega_j^2 q_j(t) = f_j(t) \quad (j=1,2,3,\dots) \quad (2)$$

式中: ζ_j 为第 j 阶模态的阻尼比系数, 于是有阻尼的晃动可以由方程(2)来确定。这样液体晃动阻尼可以归结为阻尼比系数的确定。将液体与容器固壁边界层内的液体按粘性液体考虑, 基于 Stokes 边界层理论, 可得到容器的边界层阻尼比的估计公式为[9]:

$$\zeta_b = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{2\omega}} \iint_{\partial S_w} |\nabla \phi|^2 ds}{\iiint_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dV} \quad (3)$$

式中: Ω 为液体空间区域, ∂S_w 为容器的湿边界, ϕ 表示了速度势的幅值函数, ν 为液体运动粘度, ω 为液体晃动圆频率。液体内部的粘性阻尼比可以采用下列耗散函数来计算[6]

$$\zeta_v = \frac{\nu}{\omega} \frac{\iiint_{\Omega} \left[2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} \right)^2 \right] dV}{\iiint_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dV} \quad (4)$$

一般认为, 以上液体内部的体阻尼相比于边界层阻尼要小得多, 体阻尼可忽略不计。对于矩形容器, 根据式(3)与(4)可以得到阻尼比的解析公式(可参见文献[9]); 对于非矩形的容器, 可采用数值方法计算。

已有试验研究表明, 由公式(3) (4)估计的液体晃动阻尼比系数比试验值要小许多, 究其原因有: 1) 边界层流动可能处于紊流状态, 边界层厚度增加, 阻尼也会增加, 而公式(3) (4)是基于层流模型得到的, 难以完全符合流体的真实流动状况, 采用流体的湍流模型去模拟边界层流动, 由此计算边界层阻尼是一个可行的途径; 2) 理论阻尼未包含自由表面张力以及毛细作用等影响。一般而言, 液体阻尼的影响因素极为复杂, 采用理论方法难以精确计算液体晃动阻尼, 因此工程实践中通常更多采用试验方法来确定液体晃动阻尼。

目前采用非接触的激光位移测量装置可以容易测得液体自由表面的位移响应, 通过测量液体自由表面某一模态的位移衰减曲线, 可以容易得到阻尼比系数, 文献[16] [17]介绍一种参数激振的方法, 可容易激发出液体表面的前几阶反对称与对称晃动模态, 撤除激励后液体表面按某一阶模态做自由衰减晃动, 从而可以较精确地测量晃动的模态频率、振型与对应的阻尼比系数。

当液体处于共振状态时, 液体晃动幅度较大, 这时液体晃动阻尼对于晃动响应至关重要, 这时以上小幅晃动得到的阻尼比(线性阻尼)将不再适用于大幅晃动的情形, 这时需要采用非线性阻尼模型, 这一问题很复杂, 需要进一步的理论与试验研究。

4. 液体参数晃动

参数晃动现象最早由英国科学家 Faraday 在实验中发现的, 当贮液容器做竖向周期性振动时, 他观察到液体发生一种共振, 这时容器振动的频率是自由液面晃动频率的二倍(普通共振时, 水平激励频率与液体晃动频率近似相等), 这种竖向振动所激发的液体表面波称之为“Faraday 波”。当给贮液容器施加竖向加速度激励时, 液体的运动微分方程将发生根本性的变化, 这时方程右边的强迫激励项消失, 外部激励在运动微分方程的刚度系数中反映, 液体的运动方程成为变系数的微分方程, 即系统的参数(这里表现为刚度系数)随外激励发生改变, 这种激励称为参数激励, 当参数激励为某种特殊的周期函数时, 这时液体自由表面将会产生一种共振现象, 这种共振称之为参数晃动(或参数振动), 参数晃动的机制不同与一般的强迫共振机制。参数晃动问题已在许多综述性的文献中[5] [6]得到了很好的阐述。

参数晃动包括线性与非线性参数晃动问题。线性参数晃动在数学上归结 Mathieu (马休)方程, 其基本问题为晃动的稳定性分析, 参数振动传统理论能给出的参数晃动的不稳定图, 这个图只能判定系统是稳定或不稳定。设液体第 j 阶自然频率为 ω_j , 外激励频率为 ω , 则频率比为 ω/ω_j , 在不稳定区域中存在三种不稳定模式: ① 当频率比在 2 附近时, 将发生第 j 阶模态的次谐波(sub-harmonic)晃动; ② 当频率比在 1 附近时, 将发生第 j 阶模态的谐波(harmonic)晃动; ③ 当频率比在 $2/3 = 0.667$ 附近时, 将发生第 j 阶模态的 $2/3$ 超谐波(super-harmonic)晃动。然而从已有的参数晃动实验中[16]可以发现: 以上三种不稳定模式中, 最容易发生的参数晃动(失稳)为次谐波晃动, 这种共振模式在实验中很容易观察到, 谐波与超谐波晃动很难发生, 即使对于经常观察到的次谐波晃动, 它们在不同参数激励下的不稳定行为也很不相同, 因此传统的不稳定图似乎难以全面表达参数失稳的特征, Li & Wang [16]及 Li *et al.* [18]最近从能量分析的角度, 提出了一个能量增长指数 λ' 及其对应的无量纲能量增长系数 $\eta = \lambda'/\omega_j$ 来分析参数失稳的特征, 能量增长系数反映了系统能量的增长速度, 当能量增长系数 η 大于零时, 流体系统内能量将随着时间以指数形式增长, 发生参数晃动失稳, 即不稳定; 当能量增长系数 η 等于零, 系统内能量的吸收与耗散趋近平衡, 即为发生失稳晃动的临界状态(边界); 当能量增长系数 η 小于零, 系统内的能量耗散大于吸收, 也意味着流体系统保持稳定或静止。文献[18]导得了能量增长指数与系数的近似解析表达式, 图 2 根据能量增长系数的理论公式, 给出了三类参数晃动模式的能量增长系数彩色不稳定云图(图中的纵坐标为激励系数), 由图 2 可以看出, 能量增长系数 η 等于零代表了参数不稳定边界(图中纵坐标表示激励系数, 横坐标表示激励频率与模态频率的比值), 图中的边界与传统理论给出的边界精确吻合, 次谐波参数晃动的能量增长系数最大, 谐波参数晃动的能量增长系数次之, 超谐波参数晃动的能量增长系数最小, 能量增长系数愈大, 则系统愈容易发生参数晃动(失稳), 也愈危险, 这从理论上解释了为什么三类参数晃动模式具有完全不同的不稳定特征。

对于更为复杂的自参数晃动问题, 有必要进一步引入能量增长指数及其对应的无量纲能量增长系数来分析其自参数失稳的特征。

值得指出的是, 历史上, 自 Faraday 波被发现后, 许多学者对参数晃动展开了试验研究, 在以往的

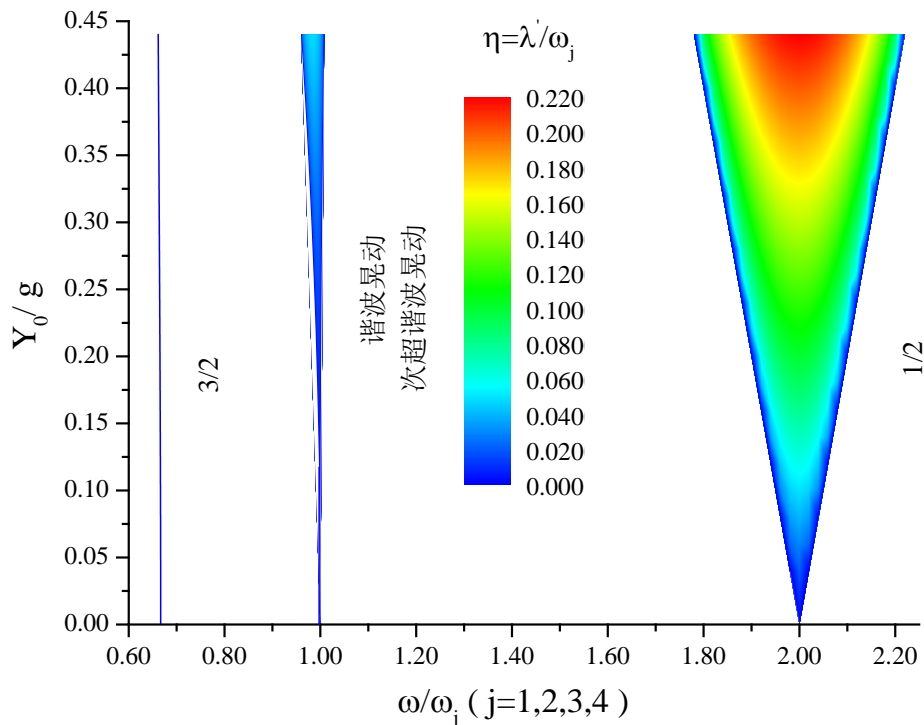


Figure 2. The energy growth coefficient (unstable) cloud chart of three kinds of parametric sloshing modes

图 2. 三类参数晃动模式的能量增长系数(不稳定)云图

试验研究中, 研究者一般都不关注贮液容器的激励加速度, 一般认为激振器给出的加速度都是一个纯净的正弦波, 然而现有研究[16] [19]发现, 电磁激振器给出的正弦波一般或多或少都会产生波形失真的现象, 一个普遍的规律是, 当输出频率为 f 时, 通常还包含一定的 $2f, 3f, 4f, \dots$ 等(成倍数的)谐波激励成份, 由于这种谐波噪声成份, 有可能对参数晃动试验结论造成误判, 例如: 试验研究一阶的 $3/2$ 次超谐波晃动时, 信号发生器设定激振频率为 $f = (2/3)f_1$ (f_1 是一阶流体晃动自然频率), 由于倍频噪声信号的存在, 输出加速度频率中可能隐含有 $3f = 3 \times (2/3)f_1 = 2f_1$ 的谐波成份, 在上述的三种晃动模式竞争中, $1/2$ 次谐波晃动占据绝对优势, 即使 $2f_1$ 的谐波成份激振幅值较小, 也很容易引发一阶的 $1/2$ 次谐波晃动, 此时发生的 $1/2$ 次谐波参数晃动却可能被误判为一阶的 $3/2$ 次超谐波参数晃动。Dodge [2]对纵向激励下圆柱容器参数晃动进行过试验研究, 并称在试验中观察到超谐波晃动模式, 然而迄今为止, 还未有其他研究者在试验中观察到超谐波晃动模式, 由于超谐波晃动能量增长系数很小, 一般情况下流体系统中吸收能量远远小于系统耗散能量, 超谐波晃动的发生极其困难, 除非激振幅值足够大, 但这已远超出实际试验范围, 因此作者认为 Dodge 等人试验结果可能存在误判。鉴于此, 今后有必要加强参数晃动的试验研究。

当参数共振发生以后, 液体的晃动幅度会越来越大, 理论与试验研究发现, 液体的晃动幅度不会无限增大, 而是最终稳定在一个有限振幅范围, 这种稳态的参数晃动也称之为极限环运动, 液体的稳态的参数晃动属于非线性参数晃动的范畴, 这时控制液体线性参数晃动的 Mathieu 方程将不再适用, 而应该建立相应的非线性运动方程。采用多模态方法[6]可以建立液体参数晃动的非线性运动方程[9], 而非线性参数晃动很复杂, 还存在如下的问题需要进一步研究: ① 非线性参数晃动阻尼对其响应具有重要影响, 这个非线性阻尼机制很复杂, 需要进一步研究; ② 非线性参数晃动涉及各模态之间的相互耦合, 正是耦合效应导致了晃动的一些非线性特征(例如: 液面波峰幅值大于波谷幅值), 这一耦合机制还需要进一步研究。

5. 结论

本文讨论了液体晃动动力学中的三个问题：液体晃动等效力学模型、液体晃动阻尼以及液体参数晃动，主要结论如下：

1) 经典的等效力学模型理论存在建模方法上的错误，因而经典理论不能给出完全正确的理论解，这一问题还可能导致其它更多容器的等效力学模型的错误，经典理论具体问题的详细讨论需要另文讨论；

2) 液体的晃动阻尼是一个很复杂的问题，尽管目前有一些晃动阻尼的理论计算公式，但理论方法一般情况下还难以精确计算液体晃动阻尼，通常需要试验方法来确定液体晃动阻尼；

3) 采用能量增长指数与系数可给出彩色的参数晃动不稳定图，得到的不稳定边界与传统理论解精确吻合，能量增长指数与系数可更全面地描述参数晃动的不稳定性，可以解释一些用传统理论难以解释的参数晃动现象。液体的非线性极限环运动极为复杂，该问题仍是非线性动力学的研究热点之一，其运动机制还需要进一步研究。

参考文献

- [1] Abramson, H.N. (1966) The Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers. NASA SP-1 06, National Aeronautics and Space Administration, Washington DC.
- [2] Dodge, F.T. (2000) The New "Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers". Southwest Research Institute, San Antonio.
- [3] Moiseev, H.N. and Petrov, A.A. (1966) The Calculation of Free Oscillations of a Liquid in a Motionless Container. *Advances in Applied Mechanics*, **9**, 91-154. [https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70007-3](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70007-3)
- [4] Moiseev, H.N. and Rumjantsev, V.V. (1968) Dynamic Stability of Bodies Containing Fluid. Edited by Abramson, H.N., Springer-Verlag, New York. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-86452-0>
- [5] Ibrahim, R.A. (2005) Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications. Cambridge University Press, Cambridge. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511536656>
- [6] Faltinsen, O.M. and Timokha, A.N. (2009) Sloshing. Cambridge University Press, Cambridge.
- [7] 王照林, 刘延柱. 充液系统动力学[M]. 北京: 科学出版社, 2002.
- [8] 居荣初, 曾心传. 弹性结构与液体的耦联振动理论[M]. 北京: 地震出版社, 1983.
- [9] 李遇春. 液体晃动动力学基础[M]. 北京: 科学出版社, 2017.
- [10] Graham, E.W. and Rodriguez, A.M. (1952) Characteristics of Fuel Motion Which Affect Airplane Dynamics. *Journal of Applied Mechanics*, **19**, 381-388.
- [11] Housner, G.W. (1957) Dynamic Pressure on Accelerated Fluid Containers. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **47**, 15-35.
- [12] Li, Y. and Wang, J. (2012) A Supplementary, Exact Solution of an Equivalent Mechanical Model for a Sloshing Fluid in a Rectangular Tank. *Journal of Fluids and Structures*, **31**, 147-151. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2012.02.012>
- [13] 李遇春, 李明. 矩形容器中流体晃动等效模型的建议公式[J]. 地震工程与工程震动, 2103, 33(1): 111-114.
- [14] Li, Y., Di, Q. and Gong, Y. (2012) Equivalent Mechanical Models of Sloshing Fluid in Arbitrary-Section Aqueducts. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **41**, 1069-1087. <https://doi.org/10.1002/eqe.1173>
- [15] 水电工程水工建筑物抗震设计规范[S]. NB 35047-2015.
- [16] Li, Y. and Wang, Z. (2016) Unstable Characteristics of Two-Dimensional Parametric Sloshing in Various Shape Tanks: Theoretical and Experimental Analyses. *Journal of Vibration and Control*, **22**, 4025-4046. <https://doi.org/10.1177/1077546315570716>
- [17] 王立时, 李遇春, 张皓. 二维晃动自然频率与阻尼比系数的试验识别[J]. 振动与冲击, 2016, 35(8): 173-176.
- [18] Li, Y., Wang, L. and Yu, Y. (2016) Stability Analysis of Parametrically Excited Systems using the Energy-Growth Exponent/Coefficient. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, **16**, Article ID: 1750018.
- [19] 王庄. 任意截面水槽液体二维参数晃动研究[D]: [博士学位论文]. 上海: 同济大学, 2014.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7567，即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱：app@hanspub.org