Applied Physics 应用物理, 2020, 10(6), 297-300
Published Online June 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/app
https://doi.org/10.12677/app.2020.106039

Derivation of the Non-Integrable Phase Factor of A-B Effect

Feifan Su

Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing
Email: ffsu@iphy.ac.cn

Received: May 14th, 2020; accepted: May 27th, 2020; published: Jun. 3rd, 2020

Abstract

Most of studies about the derivation of the non-integrable phase factor of A-B effect are in the way of path integral at present, but the physical process is not easy to understand. Base on the Schrödinger equation, the non-integrable phase factor is obtained in a simple way. And from the theoretical analysis the result that the essence of the non-integrable phase factor is the wave-particle duality of microscopic objects is obtained.

Keywords

Schrödinger Equation, A-B Effect, Non-Integrable Phase Factor, Wave-Particle Duality

A-B效应中不可积相位因子的导出

宿非凡

中国科学院物理研究所，北京
Email: ffsu@iphy.ac.cn

收稿日期：2020年5月14日；录用日期：2020年5月27日；发布日期：2020年6月3日

摘　要

目前推导A-B效应中不可积相位因子的方法主要是从路径积分的角度，物理意义仍不十分突出。本文从量子力学中最基本的Schrödinger方程出发，简洁地导出了A-B效应中的不可积相位因子。从理论分析上得到了不可积相位因子的本质是微观客体的波粒二象性的结论。

关键词

Schrödinger方程，A-B效应，不可积相位因子，波粒二象性

文章引用: 宿非凡. A-B 效应中不可积相位因子的导出[J]. 应用物理, 2020, 10(6): 297-300.
DOI: 10.12677/app.2020.106039

1. 引言

不可积相位因子是解释 A-B 效应的关键，也是量子力学几何相位问题的关键。1986 年殿村(A. Tonomura)的实验漂亮地证实了不可及相位因子的物理实在性[1]。但是，有一些物理学家仍然质疑殿村实验和不可积相位因子的物理实在性，其中以主张磁矢量势为纯数学场的观点为主[2]。

本文从量子力学中最基本的 Schrödinger 方程出发，简洁地导出 A-B 效应中的不可积相位因子。从理论分析上可以看到，被一些研究者忽略的一项[2]正是产生 A-B 效应的关键。从该理论出发也可以清晰地看出，A-B 效应的本质原因正是微观客体的波粒二象性。

2. 不可积相因子的导出

在磁场中运动的电子的 Hamilton 量可以写成[3]：

$$\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}-\left(\frac{e}{2mc}\right)\left(\vec{A}\cdot\hat{p}+\hat{p}\cdot\vec{A}\right)+\frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}^2-\frac{\mu\hat{s}}{\mu_0 s}\cdot\vec{B} \tag{1}$$

如果将磁场源放入无限长的超导筒中，将对磁场中运动电子和磁源系统本身动产生影响，因此 Hamilton 量中还应加入所有与之相关的势能项 V_i，其中包括了超导电子间通过交换虚声子而产生的有效吸引势。因此，可以将磁场中运动电子和磁场源系统的 Hamilton 量分别写为[2]：

$$\hat{H}_1=\frac{\hat{p}^2}{2m}-\left(\frac{e}{2mc}\right)\left(\vec{A}\cdot\hat{p}+\hat{p}\cdot\vec{A}\right)+\frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}^2-\frac{\mu\hat{s}}{\mu_0 s}\cdot\vec{B}+V_1 \tag{2}$$

$$\hat{H}_2=\frac{\hat{p}^2}{2m}-\left(\frac{e}{2mc}\right)\left(\vec{A}\cdot\hat{p}+\hat{p}\cdot\vec{A}\right)+\frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}^2-\frac{\mu\hat{s}}{\mu_0 s}\cdot\vec{B}+V_2 \tag{3}$$

其中 $\vec{A}=\vec{A}_0+\vec{A}_1$，$\vec{B}=\vec{B}_0+\vec{B}_1$，其中 $\vec{A}_0,\vec{B}_0$ 为别为不存在电子的时候磁场源的磁矢势和磁感应强度，$\vec{A}_1,\vec{B}_1$ 分别为磁场源系统中的电流分布和由此产生的无限长超导筒表面的屏蔽电流所产生的矢量势之和。

这样一来，整个体系的 Hamilton 量就可以写成：

$$\hat{H}=\hat{H}_1+\hat{H}_2 \tag{4}$$

将(2)、(3)两式带入(4)式之中并考虑 $\vec{A}=\vec{A}_0+\vec{A}_1$，$\vec{B}=\vec{B}_0+\vec{B}_1$，可以得到：

$$\vec{H}=\frac{\hat{p}^2}{m}-\left(\frac{e}{mc}\right)\left[\left(\vec{A}_0+\vec{A}_1\right)\cdot\hat{p}+\hat{p}\cdot\left(\vec{A}_0+\vec{A}_1\right)\right]+\frac{e^2}{mc^2}\left(\vec{A}_0+\vec{A}_1\right)^2-\frac{2\mu\hat{s}}{\mu_0 s}\cdot\left(\vec{B}_0+\vec{B}_1\right)+V_1+V_2$$

整理之后可以得到：

$$\begin{aligned}\hat{H}=&\frac{\hat{p}^2}{m}-\left(\frac{e}{mc}\right)\left(\vec{A}_1\cdot\hat{p}+\hat{p}\cdot\vec{A}_1\right)+\frac{e^2}{mc^2}\vec{A}_1^2-\frac{2\mu s^2}{\mu_0 s}\vec{B}_1+V_1+V_2\\&-\frac{e^2}{mc^2}\left[\vec{A}_0\cdot\vec{A}_1+\vec{A}_1\cdot\vec{A}_0\right]-\frac{2\mu s^2}{\mu_0 s}\cdot\hat{B}_0+\frac{e^2}{mc^2}\vec{A}_0^2\end{aligned}$$

这个 Hamilton 量满足 Schrödinger 方程，将其带入电子的 Schrödinger 方程之中并且考虑超导体的 Meissner 效应后可以将电子的 Schrödinger 方程等效为[2]：

$$\left\{\frac{\hat{p}^2}{2m}-\left(\frac{e}{2mc}\right)\left(\vec{A}_1\cdot\hat{p}+\hat{p}\cdot\vec{A}_1\right)+\frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}_1^2-\frac{\mu s^2}{\mu_0 s}\vec{B}_1+V_1+V_2+\frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}_0^2\right\}\psi=E\psi \tag{6}$$

将(6)式与无磁场源时电子满足的 Schrödinger 方程

$$\left\{\frac{\hat{p}^2}{2m}-\left(\frac{e}{2mc}\right)\left(\vec{A}_1\cdot\hat{p}+\hat{p}\cdot\vec{A}_1\right)+\frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}_1^2-\frac{\mu s^2}{\mu_0 s}\vec{B}_1+V_1\right\}\psi=E\psi \tag{7}$$

相比较可以发现，在存在磁场的时候即使用超导筒将磁场源的作用屏蔽，依然会出现一项 $V_2+\frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}_0^2$。明显的这一项中 V_2 可以通过适当取势能零点而化简为零，所以这一项的全部物理意义应该在 $\frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}_0^2$ 之上。

再来从量子力学的最基本方程 Schrödinger 方程的角度来考虑。由于 Schrödinger 方程可以表示为：

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V\right)\psi=E\psi$$

如果可以将波函数 ψ 通过某种变换，使得 $\frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}_0^2$ 在 Schrödinger 方程中不明显出现并且不改变波函数 ψ 的物理实际意义我们就可以得到与(7)式形式相同的方程，这样就可以更加明显地看到 $\frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}_0^2$ 的物理意义。

为了达到上述目的，将波函数写为：$\psi=\psi_0\exp\left[\left(\frac{-ie}{\hbar c}\right)\int^x A(x')\cdot \mathrm{d}x'\right]$(由于电子路径的任意性，积分变量设为 x')。明显的，此时可以将(6)式写为：

$$\left\{\frac{\hat{p}^2}{2m}-\left(\frac{e}{2mc}\right)\left(\vec{A}_1\cdot\hat{p}+\hat{p}\cdot\vec{A}_1\right)+\frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}_1-\frac{\mu s^2}{\mu_0 s}\vec{B}_1+V_1\right\}\psi_0=E\psi_0 \tag{8}$$

可见(8)式与(7)式形式完全一样，而且 ψ_0 与 ψ 只差一个相位，二者在物理实际上等效。

这样一来就从 Schrödinger 方程之中自然导出了 A-B 效应中的不可积相位[4] $\exp\left[\left(\frac{-ie}{\hbar c}\right)\int^x A(x')\cdot \mathrm{d}x'\right]$。

3. 理论分析

由于 Schrödinger 方程在量子力学中的基本地位，可以认为不可积相位因子形成的根源正是来自微观客体的波粒二象性。且由于电磁现象由不可积相位因子完全决定[4]，故 A-B 效应的原因正是不可积相因子及其中的磁矢势，这是由微观客体的波粒二象性决定的。这样一来也就不难从根源上理解不可积相位因子在物理学中占有重要地位的事实[5] [6] [7]。

4. 结论

综上，从量子力学的基础方程 Schrödinger 方程出发，简洁地得出了 A-B 效应关键的不可积相位因子，说明了量子力学的波粒二象性正是产生 A-B 效应的本质原因，对一些报道中关于磁矢势的疑问做了初步的回答。进一步可以尝试从 Dirac 方程出发，通过类似的方法讨论不可积相位因子。由于不可积相位因子的概念贯穿于量子场论、规范场论以及高能物理、凝聚态物理的诸多相关理论之中，本文的结果对在科学研究中把握量子力学的基本特征也有一定的益处。

参考文献

[1] Tonomura, A., Osakabe, N., *et al.* (1986) Evidence for Aharonov-Bohm Effect with Magnetic Field Completely Shielded from Electron Wave. *Physical Review Letters*, **56**, 792. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.56.792

[2] 王瑞峰. A-B 效应的动力学机制及其实验验证方案[J]. 物理学报, 2005, 54(10): 4532-4537.

[3] 朗道. 非相对论量子力学[M]. 第六版. 北京: 高等教育出版社, 2008: 413.

[4] Wu, T.T. and Yang, C.N. (1975) Concept of Nonintegrable Phase Factors and Global Formulation of Gauge Fields. *Physical Review D*, **12**, 3845. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.12.3845

[5] Berry, M.V. (1984) Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes. *Proceedings of the Royal Society of London*, **A392**, 45. https://doi.org/10.1098/rspa.1984.0023

[6] Berry, M.V. (1990) Anticipations of the Geometric Phase. *Physics Today*, **43**, 34. https://doi.org/10.1063/1.881219

[7] Wang, Z.-C., Su, G., Li, L. and Gao, J. (2004) The Effect of the Geometric Phase on Spin-Polarized Electron Tunnelling. *Journal of Physics*: *Condensed Matter*, **16**, 6713-6726. https://doi.org/10.1088/0953-8984/16/37/007