

高斯光束照射下不同粒径的倾斜椭球形液滴光学焦散结构的研究

王海楠

上海理工大学理学院, 上海

收稿日期: 2023年3月24日; 录用日期: 2023年4月18日; 发布日期: 2023年4月25日

摘要

基于矢量光线追踪(VRT)模型, 推导了高斯光束在液滴内部的传播过程, 研究了高斯光束照射下不同粒径大小的倾斜椭球形液滴在一阶彩虹区域内所产生的光学焦散结构(即彩虹条纹和双曲脐条纹), 计算了不同椭球度的液滴彩虹条纹的曲率以及彩虹角的位置, 建立了光学焦散特性(主要指彩虹条纹的曲率和彩虹角的位置)与液滴信息的物理关联, 为后续的实验测量提供理论支持。

关键词

光散射, 液滴测量, 光学焦散, 矢量光线追踪

Research on the Optical Caustic Structure of Titled Ellipsoidal Droplet with Different Sizes under Gaussian Beam Irradiation

Hainan Wang

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Mar. 24th, 2023; accepted: Apr. 18th, 2023; published: Apr. 25th, 2023

Abstract

Based on the vector ray tracing (VRT) model, the propagation process of Gaussian beam in the droplet was deduced. The optical caustic structure (*i.e.* rainbow fringe and hyperbolic umbilic fringe) generated by titled ellipsoidal droplet with different sizes in the first-order rainbow region under the irradiation of Gaussian beam was studied. The curvature of rainbow fringe and the position of rainbow

angle of droplet with different ellipsoid were calculated. The physical correlation between the optical caustic properties (mainly referring to the curvature of the rainbow fringe and the position of the rainbow angle) and the droplet information is established, which provides theoretical support for the subsequent experimental measurement.

Keywords

Light Scattering, Droplet Measurement, Optical Caustics, Vector Ray Tracing

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

彩虹散射方法是激光散射法的一种,是指光通过微小粒子时会发生的散射现象,通过观测散射光的有关参量,可得到散射体本身结构的很多信息。例如根据几何光学彩虹角附近的光强分布,可以得到液滴的折射率、温度或者粒径,这种方法被称为彩虹测量技术,由 roth 等首次提出[1]。目前人们所谓的彩虹测量技术一般都指的是利用单色光源照射(一般为激光光源)下的彩虹强度分布测量单粒子的折射率和尺寸,而不再是自然界中出现的复色光彩虹现象。基于单个球形液滴的散射,液滴的大小、折射率和温度等信息可以被确定,这种方法被称为标准彩虹技术[2] [3],可以被用来表征液滴信息。为了测量喷雾中的液滴群的粒径分布和平均温度, van Beeck 提出了全场彩虹测温法(Global Rainbow Thermometry, GRT) [4] [5]。后来的学者们也基于不同的彩虹理论例如 Airy 理论, Lorenz-Mie 理论以及广义 Lorenz-Mie 理论 (GLMT)等对这种方法进行了进一步的探索和发展[6] [7] [8] [9] [10]。彩虹的 Airy 理论是指通过 Airy 峰的角度位置与粒子直径和折射率的关系,来测量均匀粒子的直径和折射率大小。是一种比较传统的彩虹测试方法,由于其测量精度高且测量方法比较简单、易行,所以成为目前粒子尺度测量中常用的方法之一。Lorenz-Mie 是基于严格电磁散射理论,但该数学解的数值计算过程(尤其是针对大粒子)十分困难。广义 Lorenz-Mie 理论是 Lorenz-Mie 理论的扩展理论,可以给出波束照射下粒子(照射到粒子上的光为非均匀的)的散射场分布。目前利用广义 Lorenz-Mie 理论不仅可以计算均匀球、柱的散射强度角分布,而且可以计算非均匀球、柱的散射场,为数值模拟研究不同级次的彩虹提供了理论基础。例如在广义 Lorenz-Mie 理论(GLMT)的框架下,使用了一种稳定的数值算法,模拟了高斯光束照射多层球时径向非均匀加热液滴的彩虹分布[10]。角度的标定是彩虹技术中最重要的环节。吴迎春等人通过一维空间滤波器在傅里叶域提出了一种可以准确提取彩虹散射角的光学设计[11],称之为二维彩虹技术。通过二维彩虹技术,成功地测量了正庚烷液滴的尺寸和折射率。然而标准彩虹技术和全场彩虹测温法都假设液滴为球形液滴,考虑到现实中重力以及一些外力的作用,液滴并不完全为标准的球形液滴。对非球形液滴的参数测量技术进行研究时,非球形液滴的形状通常被近似为椭球形液滴来进行光散射特性研究[12] [13]。

上世纪八十年代, Marston [14]开展了椭球形液滴的彩虹散射测量,观测到了双曲脐条纹和尖点焦散。Nye [15]在理论上给出了双曲脐条纹尖点的产生条件,同时也证明了双曲脐条纹与倾斜光线有关。随后给出了尖点位置与椭球形液滴轴比关系函数[16],并将理论计算值与实验数据进行了对比。当液滴椭球度改变时,液滴在一阶和二阶彩虹区域中出现了许多焦散模式,如双曲脐焦散、 E_0 突变等[17] [18] [19]。徐峰 [20]等基于德拜级数模拟分析了一系列光学焦散,其中包括彩虹焦散、横向尖点和双曲脐焦散。基于矢量

光线追踪模型, 于海涛等[21] [22]研究平行光照射下椭球形液滴的一阶和二阶彩虹区域的光学焦散结构, 定量分析了彩虹条纹曲率和尖点焦散位置的变化情况, 建立了彩虹条纹曲率和尖点焦散位置与液滴椭球度的物理关联, 并且通过分析出射光线的边界[23], 提出了一种计算椭球形液滴彩虹散射中光学焦散结构的模型。

对于液滴数目浓度较高的雾化, 则需要更高的空间分辨率, 并且为了避免多液滴的复散射, 高聚焦的高斯光束可以实现更高的空间分辨率。然而, 在高斯光束照射条件下, 倾斜椭球形液滴所产生的光学焦散结构的演变尚未得到研究。倾斜椭球形液滴信息与光学焦散结构特性(即彩虹条纹的曲率、彩虹角位置)之间的关系是什么? 因此需要研究高斯光束照射倾斜椭球形液滴光学焦散特性, 通过研究高斯光束入射倾斜椭球形液滴的光学焦散得到的结果, 预计可以进一步分析倾斜椭球形液滴粒径与光学焦散的关系, 利用分析结果进一步探索测量椭球形液滴的方法, 为液滴测量提供理论基础。本文将致力于研究在高斯光束照射下, 不同粒径大小的倾斜椭球形液滴所产生的光学焦散结构特性。

2. 理论分析

矢量光线追踪模型(VRT), 可以用于研究光线在球体或形状复杂的粒子内部的传播过程。首先, 给出了反射和折射的矢量公式, 然后讨论了光线从光学密度较小的介质中传播到一个光学密度大的过程中, 对于给定条件入射光线、反射光线、折射光线, 以及内部光线进行了详细的推导。

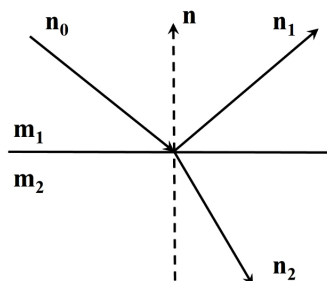


Figure 1. Diagram of light passing through the interface of two media

图 1. 光线穿过两种介质界面时示意图

假设光从介质 1 传播到介质 2 (见图 1), 其中介质 1 和介质 2 的折射率分别为 m_1 和 m_2 。当 $m_2 > m_1$ 时意味着光线从光疏进入到光密介质, 反之则亦然。本文主要研究高斯光束照射倾斜椭球形液滴时的折射和反射情况, 所以只考虑相对折射率 m ($m = m_2/m_1$) 大于 1 的情况。设入射光线的单位矢量是 \mathbf{n}_0 , 反射光线的单位矢量是 \mathbf{n}_1 , 折射光线的单位矢量是 \mathbf{n}_2 , 入射光线经过两介质交界面时接触点处的法线方向向量为 \mathbf{n} , 则入射光线经过交界面后的反射光线矢量公式为:

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_0 - 2(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \quad (2.1)$$

经过交界面后的折射光线矢量公式为:

$$\mathbf{n}_2 = \frac{1}{m}[\mathbf{n}_0 - (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}] - \sqrt{1 - \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^2}(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n})^2}\mathbf{n} \quad (2.2)$$

利用上述光线穿过两种介质交界面时的折射和反射光线的矢量公式, 可以模拟计算光束入射倾斜椭球形液滴的光线追踪过程。

根据矢量光线追踪原理可以计算光线进入液滴的光线追踪过程, 主要推导了当高斯光束同心入射(即高斯光束中心与液滴中心重合)倾斜椭球形液滴时光线路径的计算公式。

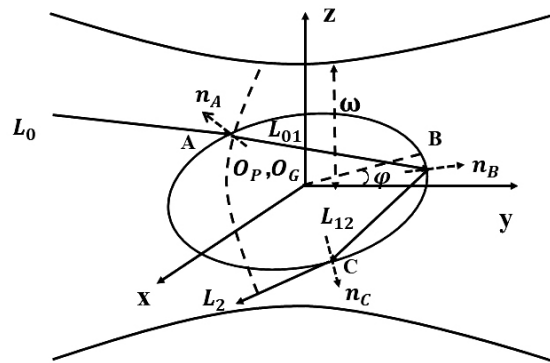


Figure 2. Schematic diagram of a tilted oblate droplet illuminated by a Gaussian beam

图 2. 高斯光束入射倾斜椭球形液滴示意图

假设倾斜椭球形液滴的中心(O_P)在笛卡尔坐标轴的中心(O_G)处,如图 2 所示,倾斜椭球形液滴的半轴长分别为 a , b 和 c , a/c 为椭球度,折射率为 m ,椭球液滴的标准方程为:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2.3)$$

绕 x 轴旋转 φ 度后变为:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dyz - 1 = 0 \quad (2.4)$$

其中,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{a^2}, \\ B &= \frac{\cos^2 \varphi}{b^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{c^2}, \\ C &= \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{c^2}, \\ D &= 2 \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

在上述方程中,如果液滴绕 x 轴逆时针旋转则 φ 设为正值,反之则亦然。

假设束腰半径为 ω_0 , 波长为 λ 的 TEM_{00} 高斯光束正入射到倾斜椭球形液滴,其中高斯光束沿着 x 轴正方向传播,沿着 y 方向偏振,并且中心与液滴中心重合(即同心入射),如图 2 所示。当高斯光束中的一条光线 L_0 到达倾斜椭球形液滴表面的 A 点时,在一阶近似中,入射的高斯光束在 A 点的相位 φ_i 符合[24]:

$$\varphi_i(x, y, z) = -k \left(y + \frac{x^2 + z^2}{2R} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{y}{y_R} \right) \quad (2.6)$$

其中 k 为波数,等于 $\frac{2\pi}{\lambda}$; R 代表波阵面曲率 $R = y \{ 1 + [y/y_R]^2 \}$; y_R 为瑞利长度 $y_R = \pi \omega_0^2 / \lambda$; 任意位置的高斯光束的光斑半径可以表示 $\omega = \omega_0 \{ 1 + [y/y_R]^2 \}^{1/2}$ 。

入射光线的方向矢量是垂直于在这一点波阵面的,此时 L_0 可以表示为:

$$L_0 = L_x \vec{i} + L_y \vec{j} + L_z \vec{k} \quad (2.7)$$

其中 \vec{i} , \vec{j} 和 \vec{k} 分别为沿着 x 轴 y 轴以及 z 轴的方向矢量。 L_x , L_y , 和 L_z 分别为:

$$\begin{aligned} L_x &= -\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = \frac{2y_R xy}{\omega_0^2 [y_R^2 + y^2]} \\ L_y &= -\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} = k + \frac{k(x^2 + z^2)[y_R^2 - y^2]}{[y^2 + y_R^2]^2} - \frac{y_R}{y_R^2 + y^2} \\ L_z &= -\frac{\partial \varphi_i}{\partial z} = \frac{2y_R zy}{\omega_0^2 [y_R^2 + y^2]} \end{aligned} \tag{2.8}$$

随后, 入射光线 L_0 在 A 点折射后进入液滴内部, 折射光线 L_{01} 在倾斜椭球形液滴内传播并与液滴相较于 B 点, 然后在 B 点发生一次反射, 反射光线 L_{12} 与液滴相交于点 C , 最后在 C 点折射后离开液滴, 如图 2 所示。根据矢量光线追踪模型我们可以得到上述折射、反射以及最后出射光线矢量公式为:

$$\begin{aligned} L_r &= L_0 - 2(L_0 \cdot n_A)n_A, \\ L_{01} &= \frac{1}{m}(L_0 - (L_0 \cdot n_A)n_A) - \sqrt{1 - \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^2}(L_0 \cdot n_A)^2} n_A, \\ L_1 &= m(L_{01} - (L_{01} \cdot n_B)n_B) + \sqrt{1 - m^2 + m^2(L_{01} \cdot n_B)^2} n_B, \\ L_{12} &= L_{01} - 2(L_{01} \cdot n_B)n_B, \\ L_2 &= m(L_{12} - (L_{12} \cdot n_C)n_C) + \sqrt{1 - m^2 + m^2(L_{12} \cdot n_C)^2} n_C. \end{aligned} \tag{2.9}$$

其中 m 为相对折射率, n_A, n_B 和 n_C 分别为点 A, B, C 处的法向量。

通过上述矢量光线追踪模型, 可以获得与一阶彩虹相关的折射光线矢量公式, 即 L_2 。假设折射光线的矢量公式为 $L_2 = (a_x, a_y, a_z)$ 如图 3 所示, 可以得到偏转角(off-axis angle)为:

$$\theta = \cos^{-1} \left[\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \right] \tag{2.10}$$

仰角(elevation angle)为:

$$\phi = \cos^{-1} \left[\frac{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \right] \tag{2.11}$$

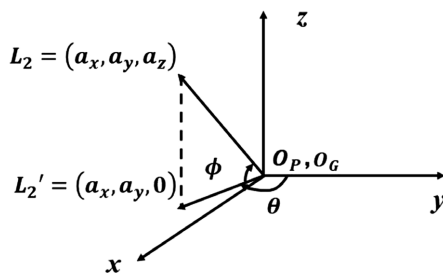


Figure 3. Definition of the scattering angle of outgoing rays
图 3. 出射光线散射角的定义示意图

正如图 3 所示, 出射光线 L_2 与 L_2' 离开液滴时具有相同的偏转角, 但仰角不同, 这意味着两条出射光线是在同一散射平面内的。同一散射平面中的出射光线, 仰角相同, 但离开液滴时的具体位置不同, 这

意味着出射光线离开液滴后以相同的方向进行传播(即偏转角相同, 仰角也相同)。通过计算特定散射平面上的出射光线, 可以得到与液滴信息有关的光学焦散结构。

假设光线的方向矢量为 $(\mathbf{m}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{p}_0)$, 光线上任意一点的坐标为 (x_0, y_0, z_0) , 其中这个光线可以是入射光线、反射光线或者折射光线, 则光线的方程可以表示为:

$$\frac{x-x_0}{m_0} = \frac{y-y_0}{n_0} = \frac{z-z_0}{p_0} \quad (2.12)$$

其中 $m_0 \neq 0$, $n_0 \neq 0$, $p_0 \neq 0$ 。假设光线照射在液滴表面 (x_0, y_0, z_0) 点上。点 (x_0, y_0, z_0) 位于倾斜椭球形液滴上, 则有:

$$Ax_0^2 + By_0^2 + Cz_0^2 + Dy_0z_0 - 1 = 0. \quad (2.13)$$

光线进入液滴后会在其他点与液滴表面相交, 光线与液滴表面的其他交点 (x_1, y_1, z_1) 可通过以下方式计算获得:

1) 当 $m_0 \neq 0$, $n_0 \neq 0$, $p_0 \neq 0$ 时, 光线的方程可以表示为:

$$\begin{aligned} y &= y_0 + \frac{n_0}{m_0}(x-x_0), \\ z &= z_0 + \frac{p_0}{m_0}(x-x_0). \end{aligned} \quad (2.14)$$

把(2.14)公式带入(2.4)得:

$$\begin{aligned} &\left(A + B \frac{n_0^2}{m_0^2} + C \frac{p_0^2}{m_0^2} + D \frac{n_0 p_0}{m_0^2} \right) x^2 \\ &+ \left[2B \left(-\frac{n_0^2}{m_0^2} x_0 + \frac{n_0}{m_0} y_0 \right) + 2C \left(-\frac{p_0^2}{m_0^2} x_0 + \frac{p_0}{m_0} z_0 \right) + D \left(-2 \frac{n_0 p_0}{m_0^2} x_0 + \frac{p_0}{m_0} y_0 + \frac{n_0}{m_0} z_0 \right) \right] x \\ &+ B \left(\frac{n_0}{m_0} x_0 - y_0 \right)^2 + C \left(\frac{p_0}{m_0} x_0 - z_0 \right)^2 + D \left(\frac{n_0 p_0}{m_0^2} x_0^2 - \frac{n_0}{m_0} x_0 z_0 - \frac{p_0}{m_0} x_0 y_0 + y_0 z_0 \right) - 1 = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

设:

$$\begin{aligned} a_1 &= A + B \frac{n_0^2}{m_0^2} + C \frac{p_0^2}{m_0^2} + D \frac{n_0 p_0}{m_0^2}, \\ b_1 &= 2B \left(-\frac{n_0^2}{m_0^2} x_0 + \frac{n_0}{m_0} y_0 \right) + 2C \left(-\frac{p_0^2}{m_0^2} x_0 + \frac{p_0}{m_0} z_0 \right) + D \left(-2 \frac{n_0 p_0}{m_0^2} x_0 + \frac{p_0}{m_0} y_0 + \frac{n_0}{m_0} z_0 \right), \\ c_1 &= B \left(\frac{n_0}{m_0} x_0 - y_0 \right)^2 + C \left(\frac{p_0}{m_0} x_0 - z_0 \right)^2 + D \left(\frac{n_0 p_0}{m_0^2} x_0^2 - \frac{n_0}{m_0} x_0 z_0 - \frac{p_0}{m_0} x_0 y_0 + y_0 z_0 \right) - 1. \end{aligned} \quad (2.16)$$

随后根据

$$x = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4a_1 c_1}}{2a_1}. \quad (2.17)$$

求解方程可得到另一点 (x_1, y_1, z_1) 的坐标。

综上所述, 如果已知光线的方向向量 $(\mathbf{m}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{p}_0)$ 、倾斜液滴的方程以及光线与液滴表面的一个交点 (x_0, y_0, z_0) , 则另一个交点可根据式(2.12)和(2.4)解方程后获得。当 $m_0 \neq 0$, $n_0 \neq 0$, $p_0 \neq 0$ 时, 上述公式是有效

的。其他情况也可以通过这种方法进行求解。但不同的是光线方程不同，不同情况下的光线方程及其物理意义如下：

2) 当 $m_0 = 0$, $n_0 \neq 0$, $p_0 \neq 0$ 时，光线的方程为：

$$\begin{aligned} x &= x_0, \\ \frac{y - y_0}{n_0} &= \frac{z - z_0}{p_0}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

物理意义是光线垂直于 x 轴传播。按照第一种情况的步骤，将式(2.18)带入(2.4)后，通过解方程就可以得到光线与液滴的另一个坐标。

3) 当 $m_0 \neq 0$, $n_0 = 0$, $p_0 \neq 0$ 时，光线的方程为：

$$\begin{aligned} y &= y_0, \\ \frac{x - x_0}{m_0} &= \frac{z - z_0}{p_0}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

物理意义是光线垂直于 y 轴传播。

4) 当 $m_0 \neq 0$, $n_0 \neq 0$, $p_0 = 0$ 时，光线的方程为：

$$\begin{aligned} z &= z_0, \\ \frac{x - x_0}{m_0} &= \frac{y - y_0}{n_0}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

此时代表光线垂直于 z 轴传播。

5) 当 $m_0 \neq 0$, $n_0 = 0$, $p_0 = 0$ 时，光线方程为：

$$\begin{aligned} y &= y_0, \\ z &= z_0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

物理意义为光线垂直于 y 轴和 z 轴传播，也就是说，光线与 x 轴平行。

6) 当 $m_0 = 0$, $n_0 \neq 0$, $p_0 = 0$ 时，光线方程为：

$$\begin{aligned} x &= x_0, \\ z &= z_0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

物理意义为光线平行于 y 轴传播。

7) 当 $m_0 = 0$, $n_0 = 0$, $p_0 \neq 0$ 时，光线方程为：

$$\begin{aligned} x &= x_0, \\ y &= y_0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

物理意义为光线平行于 z 轴传播。

8) 当 $m_0 = 0$, $n_0 = 0$, $p_0 = 0$ ，数学上，这表示坐标中的一个点。所以对于这条光线没有物理意义。

总之，给定由向量 (m_0, n_0, p_0) 描述的光线方向与液滴表面的函数方程，以及光线与液滴的一个交点 (x_0, y_0, z_0) 坐标，则其他交点可根据上述过程进行计算。

3. 结果与分析

根据所阐述的矢量光线追踪原理，利用“边界”方法，模拟高斯光束照射下不同倾斜椭球形液滴的光学焦散结构。设高斯光束的波长为 $0.6328 \mu\text{m}$ ，束腰半径为 $100 \mu\text{m}$ 。研究了不同粒径大小的倾斜椭球形液滴的光学焦散结构，分别研究了在粒径大小为 $100 \mu\text{m}$ 、 $200 \mu\text{m}$ 和 $1000 \mu\text{m}$ (即 $a = 100 \mu\text{m}$ 、 $a = 200$ 、

$a = 1000$)时, 椭球形液滴的椭球度为 1.05、1.12、1.18 和 1.24 (即 $a/c = 1.05$ 、 $a/c = 1.12$ 、 $a/c = 1.18$ 和 $a/c = 1.24$)时的光学焦散结构。其中液滴的相对折射率为 $m = 1.333$, 倾斜角度为 5° 。

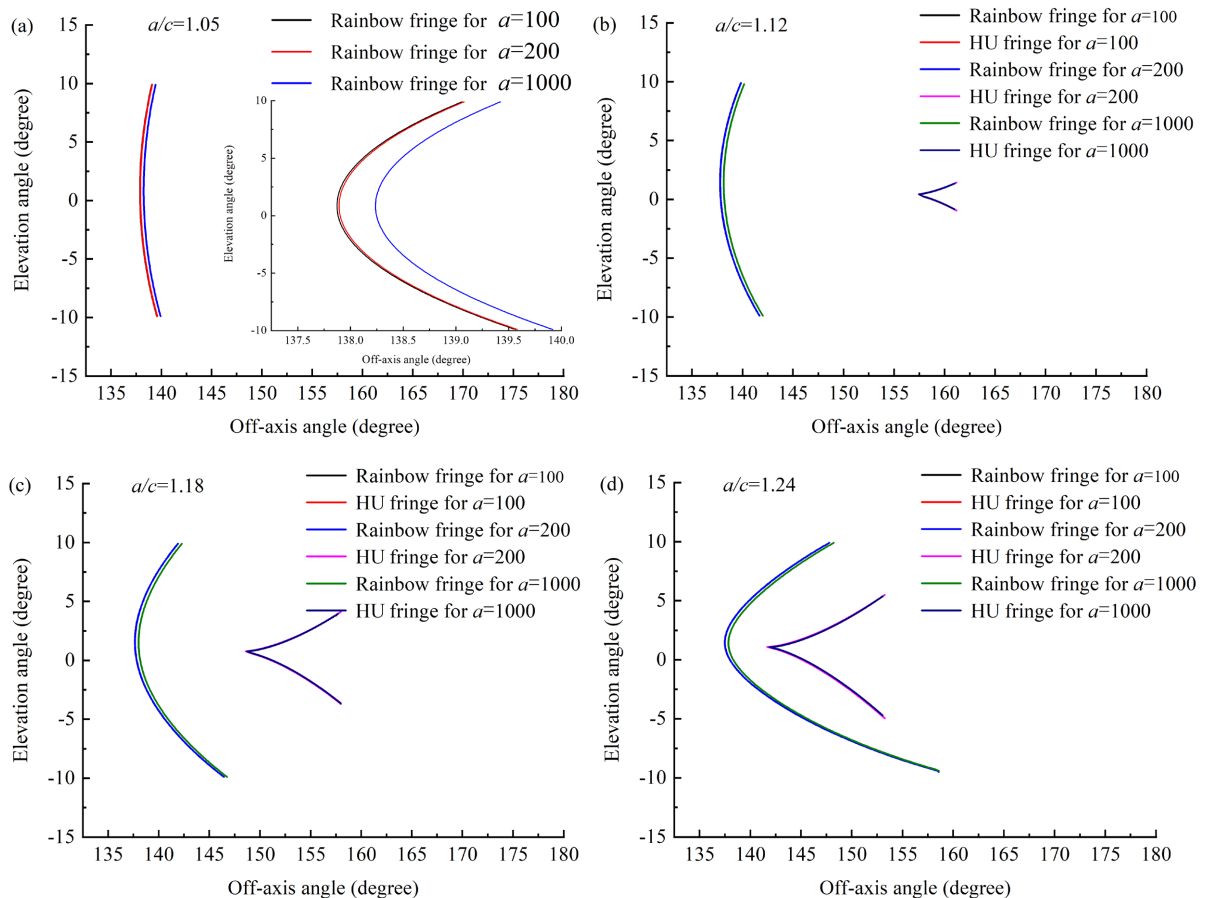


Figure 4. Optical caustic by tilted ellipsoidal droplets with different sizes
图 4. 不同粒径的倾斜椭球形液滴形成的光学焦散结构

图 4(a) 高斯光束同心照射椭球度为 1.05, 粒径大小分别为 $100 \mu\text{m}$ 、 $200 \mu\text{m}$ 和 $1000 \mu\text{m}$ 时倾斜椭球形液滴所产生的光学焦散结构, 此时只有彩虹条纹, 并没有双曲脐条纹。三种彩虹条纹弯曲程度都很小, 开口方向沿着偏转角增大的方向, 也就是后向散射方向。粒径为 $100 \mu\text{m}$ 时椭球形液滴所产生的彩虹条纹与粒径为 $200 \mu\text{m}$ 时椭球形液滴所产生的彩虹条纹几乎接近重合, 只能在很小的散射角范围内看到两种彩虹条纹的微小差异(见图 4(a)插图)。但粒径大小为 $1000 \mu\text{m}$ 时椭球形液滴所产生的光学焦散结构却和粒径为 $100 \mu\text{m}$ 和 $200 \mu\text{m}$ 时有明显的差异, 主要表现为彩虹角的位置变化。

图 4(b) 为高斯光束同心照射椭球度为 1.12 时, 粒径大小分别为 $100 \mu\text{m}$ 、 $200 \mu\text{m}$ 和 $1000 \mu\text{m}$ 时倾斜椭球形液滴所产生的光学焦散结构。从图中可以看出, 彩虹条纹弯曲程度相较于 1.05 明显增大, 开口方向同样沿着偏转角增大的方向。粒径为 $100 \mu\text{m}$ 时椭球形液滴所产生的彩虹条纹与粒径为 $200 \mu\text{m}$ 时椭球形液滴所产生的彩虹条纹同样几乎接近重合, 粒径大小为 $1000 \mu\text{m}$ 时和粒径为 $100 \mu\text{m}$ 和 $200 \mu\text{m}$ 时的彩虹条纹有明显的差异, 主要体现在彩虹角的位置差异。此时已经存在双曲脐条纹, 开口方向沿着偏转角增大的方向, 即后向散射方向, 且不同粒径下尖点焦散的位置几乎重合。

高斯光束照射椭球度为 1.18, 粒径大小不同的椭球形液滴所产生的光学焦散结构如图 4(c) 所示, 相

较于椭球度为 1.05 和 1.12 时, 彩虹条纹的弯曲程度更大。同等条件照射下, 不同粒径大小的椭球形液滴彩虹角的位置也有很大的差异。此时的双曲脐条纹相较于椭球度为 1.12 时开口程度明显变大, 开口方向沿着偏转角增大的方向, 即后向散射方向, 但三者仍几乎接近重合。当倾斜椭球形液滴椭球度为 1.24 时, 彩虹条纹的弯曲程度也变得更大, 粒径大小为 $100\ \mu\text{m}$ 和 $200\ \mu\text{m}$ 时椭球形液滴所产生的彩虹条纹依旧几乎重合。此时双曲脐条纹的开口程度也变得更大, 开口方向沿着偏转角逐渐增大的方向, 也就是后向散射方向。

通过图 4 的模拟结果可以看出, 随着倾斜椭球形液滴的椭球度不断变化, 彩虹条纹的曲率以及彩虹角的位置也会不同, 因此接下来主要计算了当倾斜椭球形液滴粒径大小不同时, 不同椭球度的液滴所产生的光学焦散结构特性(主要指彩虹条纹的曲率以及彩虹角的位置)。

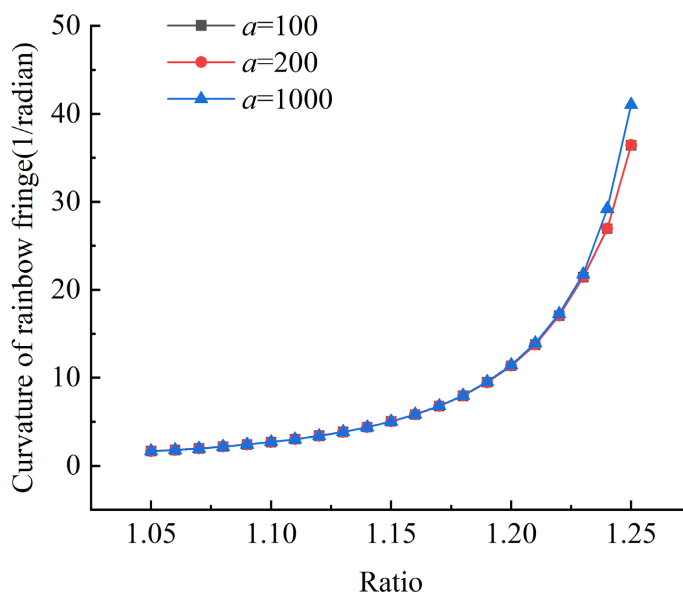


Figure 5. The curvature of rainbow fringes of tilted ellipsoidal droplet with different sizes varies with the evolution of ellipsoid

图 5. 不同粒径大小的倾斜椭球形液滴所产生的彩虹条纹的曲率随椭球度的演变过程

图 5 为不同粒径的倾斜椭球形液滴在同等照射条件下所产生的彩虹条纹曲率随着椭球度的演变过程。为了方便比较, 同样只计算了彩虹条纹顶点处(即彩虹角)的曲率。由图可知, 倾斜椭球形液滴椭球度不同时, 彩虹条纹的曲率也不同。当椭球形液滴的椭球度逐渐增大时, 彩虹条纹的曲率呈现增大的趋势。粒径为 $100\ \mu\text{m}$ 与粒径为 $200\ \mu\text{m}$ 时椭球形液滴的彩虹条纹的曲率十分一致。当椭球形液滴粒径为 $1000\ \mu\text{m}$ 时, 彩虹条纹的曲率与另外两种情况下的差异随着液滴的椭球度的增大, 逐渐变得明显。因此可以通过建立彩虹条纹曲率与椭球度的物理关联来获得液滴的信息。

图 6 为粒径大小为 $100\ \mu\text{m}$ 、 $200\ \mu\text{m}$ 、 $1000\ \mu\text{m}$ 时, 不同椭球度的倾斜椭球形液滴所形成的彩虹角位置随着液滴椭球度的变化情况。从图中可以看出, 在水平方向上(即偏转角方向), 彩虹角的偏转角随着椭球度的增加逐渐减小(即彩虹角逐渐向前移动), 在垂直方向上(即仰角方向), 彩虹角的仰角随着椭球度的增加逐渐增大, 也就是说彩虹角向上偏移。

通过上述分析可知, 可以通过运用彩虹条纹曲率、彩虹角的位置与椭球形液滴的形状之间的物理关联获得液滴的椭球度, 可以为后续实验测量液滴信息打下理论基础。

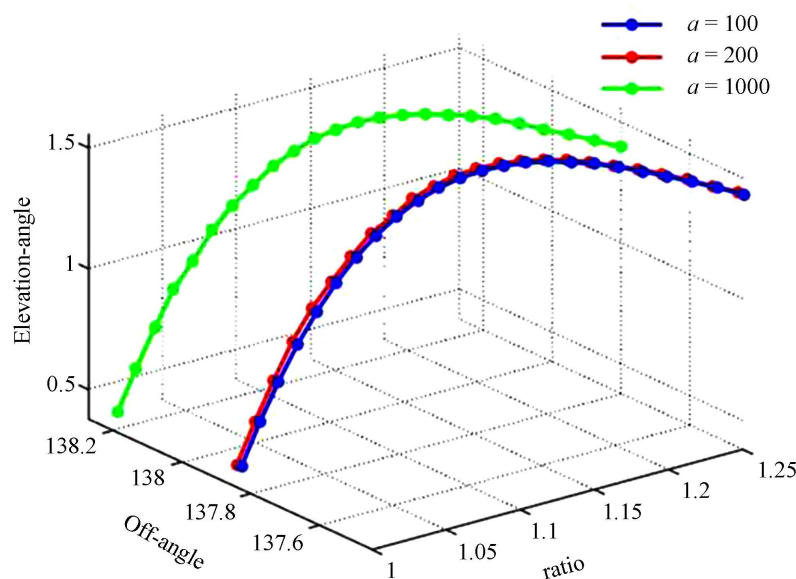


Figure 6. The position of rainbow angle of tilted ellipsoidal droplet with different size varies with the evolution of ellipsoid

图 6. 不同粒径大小的倾斜椭球形液滴所产生彩虹角的位置随椭球度的演变过程

4. 结论

根据矢量光线追踪原理计算了高斯光束照射不同粒径大小的倾斜椭球形液滴时在一阶彩虹区域内形成的光学焦散结构,其中椭球形液滴的折射率为 1.333,椭球度分别为 1.05、1.12、1.18 和 1.24 (即 $a/c = 1.05$, $a/c = 1.12$, $a/c = 1.18$ 和 $a/c = 1.24$), 倾斜角度 5 度, 并将椭球度相同但粒径大小不同的液滴所产生的光学焦散结构进行了对比分析。结果表明, 同等条件照射下, 当同一椭球度的椭球形液滴粒径大小不同时, 会对光学焦散结构产生一定影响, 主要表现在彩虹条纹的曲率和彩虹角的位置不同。随后, 分别计算了不同粒径大小的倾斜椭球形液滴彩虹条纹的曲率和彩虹角的位置, 建立了光学焦散特性与液滴信息的物理关联, 为后续的实验测量提供理论支持。

参考文献

- [1] Roth, N., Anders, K. and Frohn, A. (1990) Simultaneous Measurement of Temperature and Size of Droplets in the Micrometer Range. *Journal of Laser Applications*, **2**, 37-42. <https://doi.org/10.2351/1.4745251>
- [2] Roth, N., Anders, K. and Frohn, A. (1996) Size Insensitive Rainbow Refractometry: Theoretical.
- [3] Van Beeck, J. and Riethmuller, M.L. (1995) Nonintrusive Measurements of Temperature and Size of Single Falling Raindrops. *Applied Optics*, **34**, 1633-1639. <https://doi.org/10.1364/AO.34.001633>
- [4] van Beeck, J., Giannoulis, D. and Zimmer, L. (1999) Global Rainbow Thermometry for Droplet-Temperature Measurement. *Optics Letters*, **24**, 1696-1698. <https://doi.org/10.1364/OL.24.001696>
- [5] van Beeck, J., Zimmer, L. and Riethmuller, M.L. (2001) Global Rainbow Thermometry for Mean Temperature and Size Measurement of Spray Droplets. *Particle & Particle Systems Characterization*, **18**, 196-204. [https://doi.org/10.1002/1521-4117\(200112\)18:4<196::AID-PPSC196>3.0.CO;2-H](https://doi.org/10.1002/1521-4117(200112)18:4<196::AID-PPSC196>3.0.CO;2-H)
- [6] Vetrano, M.R. and Riethmuller, M.L. (2005) Assessment of Refractive Index Gradients by Standard Rainbow Thermometry. *Applied Optics*, **44**, 7275-7281. <https://doi.org/10.1364/AO.44.007275>
- [7] Vetrano, M.R., Gauthier, S. and Beeck, J.V. (2006) Characterization of a Non-Isothermal Water Spray by Global Rainbow Thermometry. *Experiments in Fluids*, **40**, 15-22. <https://doi.org/10.1007/s00348-005-0042-4>
- [8] Song, F.H., Xu, C.L. and Wang, X.S. (2013) Rainbow Technique for Multi-Parameter Measurement of Absorbing Cy-

- linder. *Particology*, **11**, 184-188. <https://doi.org/10.1016/j.partic.2012.07.004>
- [9] Saengkaew, S., Bodoc, V. and Lavergne, G. (2013) Application of Global Rainbow Technique in Sprays with a Dependence of the Refractive Index on Droplet Size. *Optics Communications*, **286**, 295-303. <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2012.09.024>
- [10] Zhou, J., Fang, Y. and Wang, J. (2019) Rainbow Pattern Analysis of a Multilayered Sphere for Optical Diagnostic of a Heating Droplet. *Optics Communications*, **441**, 113-120. <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2019.02.061>
- [11] Wu, Y.C., Promvongsa, J. and Wu, X.C. (2015) One-Dimensional Rainbow Technique Using Fourier Domain Filtering. *Optics Express*, **23**, 30545-30556. <https://doi.org/10.1364/OE.23.030545>
- [12] Green, A.W. (1975) An Approximation for the Shapes of Large Raindrops. *Journal of Applied Meteorology*, **14**, 1578-1583. [https://doi.org/10.1175/1520-0450\(1975\)014<1578:AAFTSO>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0450(1975)014<1578:AAFTSO>2.0.CO;2)
- [13] Guck, J., Ananthakrishnan, R. and Moon, T.J. (2000) Optical Deformability of Soft Biological Dielectrics. *Physical Review Letters*, **84**, 5451-5454. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.84.5451>
- [14] Marston, P.L. and Trinh, E.H. (1984) Hyperbolic Umbilic Diffraction Catastrophe and Rainbow Scattering from Spheroidal Drops. *Nature*, **312**, 529-531. <https://doi.org/10.1038/312529a0>
- [15] Nye, F. (1984) Rainbow Scattering from Spheroidal Drops—An Explanation of the Hyperbolic Umbilic Foci. *Nature*, **312**, 531-532. <https://doi.org/10.1038/312531a0>
- [16] Marston, P.L. (1985) Cusp Diffraction Catastrophe from Spheroids: Generalized Rainbows and Inverse Scattering. *Optics Letters*, **10**, 588-590. <https://doi.org/10.1364/OL.10.000588>
- [17] Simpson, H.J. and Marston, P.L. (1991) Scattering of White Light from Levitated Oblate Water Drops near Rainbows and Other Diffraction Catastrophes. *Applied Optics*, **30**, 3468-3473. <https://doi.org/10.1364/AO.30.003468>
- [18] Kaduchak, G., Marston, P.L. and Simpson, H.J. (1994) E_6 Diffraction Catastrophe of the Primary Rainbow of Oblate Water Drops: Observations with White-Light and Laser Illumination. *Applied Optics*, **33**, 4691. <https://doi.org/10.1364/AO.33.004691>
- [19] Kaduchak, G. and Marston, P.L. (1994) Hyperbolic Umbilic and E_6 Diffraction Catastrophes Associated with the Secondary Rainbow of Oblate Water Drops: Observations with Laser Illumination. *Applied Optics*, **33**, 4697-4701. <https://doi.org/10.1364/AO.33.004697>
- [20] Lock, J.A. and Xu, F. (2010) Optical Caustic Observed in Light Scattered by an Oblate Spheroid. *Applied Optics*, **49**, 1288. <https://doi.org/10.1364/AO.49.001288>
- [21] Yu, H.T., Xu, F. and Tropea, C. (2013) Optical Caustic Associated with the Primary Rainbow of Oblate Droplets: Simulation and Application in Non-Sphericity Measurement. *Optics Express*, **21**, 25761-25771. <https://doi.org/10.1364/OE.21.025761>
- [22] Yu, H.T., Xu, F. and Tropea, C. (2013) Simulation of Optical Caustic Associated with the Secondary Rainbow of Oblate Droplets. *Optics Letters*, **38**, 4469-4472. <https://doi.org/10.1364/OL.38.004469>
- [23] Yu, H.T., Shen, J.Q., Tropea, C. and Xu, F. (2019) Model for Computing Optical Caustic Partitions for the Primary Rainbow from Tilted Spheroidal Drops. *Optics Letters*, **44**, 823-826. <https://doi.org/10.1364/OL.44.000823>
- [24] Siegman, A.E. (1986) *Lasers*. University Science Books, Sausalito.