Advances in Social Sciences 社会科学前沿, 2021, 10(3), 672-677
Published Online March 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ass
https://doi.org/10.12677/ass.2021.103096

高中数学圆锥曲线难点问题研究

李少雄，王历容*

湖南人文科技学院数学与金融学院，湖南 娄底
Email: *1454517207@qq.com

收稿日期：2021年2月9日；录用日期：2021年3月22日；发布日期：2021年3月29日

摘 要

圆锥曲线一直是高中数学的重难点内容，也是学生认为高度抽象的知识点之一，它的考法灵活多变，题型综合了代数思想与几何图形知识，注重考察学生如何将抽象问题具体化，复杂问题简单化的思维能力。因此如何灵活运用圆锥曲线的相关知识进行技巧性的解题一直是研究热点。文章将针对圆锥曲线中离心率求解、最值求解、焦点三角形、焦点弦等难点问题展开探讨，为圆锥曲线问题的巧妙求解提供一些解题思路。

关键词

高中数学，圆锥曲线，难点研究

Research on Difficult Problems of Conic Curve in High School Mathematics

Shaoxiong Li, Lirong Wang*

School of Mathematics and Finance, Hunan University of Humanities and Technology, Loudi Hunan
Email: *1454517207@qq.com

Received: Feb. 9th, 2021; accepted: Mar. 22nd, 2021; published: Mar. 29th, 2021

Abstract

The conic curve has always been the important and difficult content of high school mathematics, and it is also one of the highly abstract knowledge points for students. Its examination method is flexible and changeable. The question type integrates algebra thought and geometry knowledge, and pays attention to the students' thinking ability of how to concretize abstract problems and

*通讯作者。

文章引用: 李少雄, 王历容. 高中数学圆锥曲线难点问题研究[J]. 社会科学前沿, 2021, 10(3): 672-677.
DOI: 10.12677/ass.2021.103096

simplify complex problems. Therefore, how to flexibly use the relevant knowledge of conic curve to solve problems skillfully has always been a research hotspot. In this paper, we will discuss some difficult problems in conic curve, such as the solution of eccentricity, the solution of the maximum value, the focus triangle, the focus chord and so on.

Keywords

High School Mathematics, Conic Curve, Difficult Research

1. 引言

圆锥曲线对于很多学生来说是一个很抽象的难点，题目理解不了，计算难度太大，知识点混乱，这些导致圆锥曲线在考试时得分率不高。圆锥曲线的常考题型包括：离心率的求解，直线与曲线位置关系，动点轨迹方程求解，最值问题，焦点三角形，焦点弦问题等，题型涉及范围之广，题型多变，导致学生在解题时出现无从下手的现象，但很多时候圆锥曲线学不好，并不是因为题目太难，而是学生基础不牢，定义的内涵没有理解透彻，一些重要结论没有理解识记，知识点掌握不完整，计算能力差。事实上，在圆锥曲线中基本性质定理很重要，补充或者推出的结论同样重要，同样要求理解记忆。很多看似繁琐，计算复杂题，只需利用恰当的知识和灵活的解题技巧，就能够轻而易举做出解答[1] [2]。

2. 灵活应用圆锥曲线第二定义求离心率

圆锥曲线第二定义：到定点的距离与到定直线的距离比 e 是常数的点的轨迹。

第二定义在应用时存在许多不变的结论，接下来将其结论进行推导总结[3]。

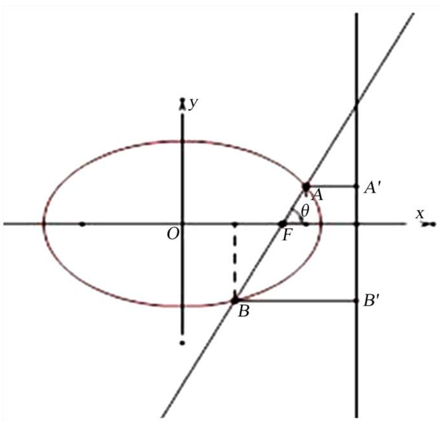

Figure 1. Chord diagram of ellipse focus
图 1. 椭圆焦点弦图

如图 1 所示，A，B 为椭圆上两点，直线 A，B 通过点 F，A'，B'是准线上的两点，θ 为直线 AB 与 x 轴的夹角，根据椭圆的第二定义有 $e=\frac{AF}{AA'}=\frac{BF}{BB'}$，由于焦点 F 到准线的距离是不变的有：

$$\frac{a^2}{c}-c=AF\cos\theta+\frac{AF}{e}$$

$$\frac{a^2}{c}-c=\frac{BF}{e}-BF\cos\theta$$

上述式子化简整理得：

$$AF=\frac{b^2}{a+c\cos\theta}$$

$$BF=\frac{b^2}{a-c\cos\theta}$$

又由 $AB=AF+BF$，将 AF，BF 带入得：

$$AB=\frac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\theta}$$

由 AB 的表达式可知当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$AB=\frac{2b^2}{a}$，也就是通径长。

若 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}$，还可以得出 $|e\cos\theta|=\left|\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right|$。其次，双曲线也可以用类似的方法推出相关的结论。在一些题目中由以上得出的结论去做题会大大降低题目的计算难度。

[例 1]已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，过右焦点 F 且斜率为 $k(k>0)$ 的直线与 C 交于 A，B 两点，若 $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，则 k=__。

A. 1　B. $\sqrt{2}$　C. $\sqrt{3}$　D. 2

解：方法一：

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，因为 $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{BF}$，所以 $y_1=-3y_2$，由题意得离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，即可以设 $a=2t$，$c=\sqrt{3}t$，则 $b=t$，将其带入椭圆方程得：$x^2+4y^2-4t^2=0$，设直线 AB 的方程为 $x=my+\sqrt{3}t$，带入椭圆方程消去 x 得：

$$\left(m^2+4\right)y^2+2\sqrt{3}mty-t^2=0$$

由韦达定理得 $y_1+y_2=\frac{-2\sqrt{3}mt}{m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-t^2}{m^2+4}$，即 $-2y_2=\frac{-2\sqrt{3}mt}{m^2+4}$，$-3y_2^2=\frac{-t^2}{m^2+4}$ 解得：$m^2=\frac{1}{2}$，$k=\sqrt{2}$。

方法二：由上面椭圆曲线的相关分析结论有：$|e\cos\theta|=\left|\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right|=\frac{1}{2}$，即 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $\tan\theta=\sqrt{2}$。

分析：

比较上述两种方法发现第一种方法的思想是学生的惯性思想，遇见这种题目学生会习惯性去设点带入方程，但当学生对一些相关的结论很熟悉的时候，就会发现用方法二其实容易很多，大大减少了因计算出错的概率。

3. 圆锥曲线中最值问题的解题分析

[例 2]动点 A 在抛物线 $y^2=4x$ 上，定点 $B(2015,0)$，抛物线的焦点为 F，求 $|AF|+|AB|$ 的最小值__(图 2)。

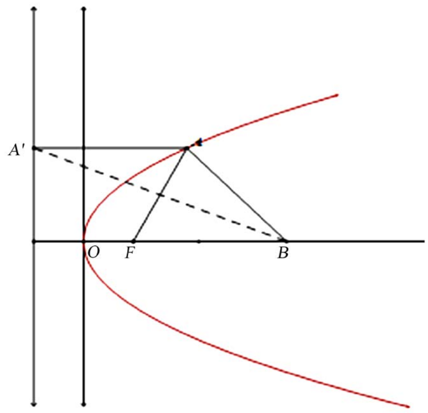

Figure 2. Minimization graph
图 2. 求最小值图

解析：首先已知 A 点是抛物线上的任意一点，可以过点 A 做准线 $x=-1$ 的垂线，垂足设为 A' 点，所求就变为 $|AA'|+|AB|$ 的最小值，通过画图看出 $|AA'|+|AB|$ 的最小值为 $|A'B|$ 的长，所以题目转化为求 $|A'B|$ 的长，A' 是抛物线准线上的点，即 A' 为 $(-1,0)$ 时，$A'B$ 取得最小值，最小值为 $|-1|+2015=2016$。

通过举一反三，可以解决一系列最值求解问题：

1) 上题中若 B 点不在 x 轴上，B 点在抛物线里面时可求 $|AF|+|AB|$ 的最小值，也就是求 $A'B$ 的最小值，即过 B 点做准线的垂线，垂足即为 A' 点。

2) 若 B 点在抛物线外面时，所求的 $|AF|+|AB|$ 的最小值就是 $|FB|$ 的长度，直接两点间的距离公式就可算出。

3) 同样，若在椭圆中求解最值问题：F_1,F_2 是椭圆的两焦点，P 是椭圆上一点，M 是椭圆外一点让我们求 $\|PM|-|PF_2\|$ 的最小值，$|PF_2|=2a-|PF_1|$，即 $|PM|-|PF_2|=|PM|+|PF_1|-2a>|MF_1|-2a$。

4) 双曲线中求最值问题若 M 点不在双曲线上，P 点是双曲线上任意一点，F_1,F_2 是双曲线的两焦点，求解 $|PM|+|PF_1|$ 的最小值跟我们求椭圆最值问题思路一致。

4. 焦点三角形面积公式的灵活应用

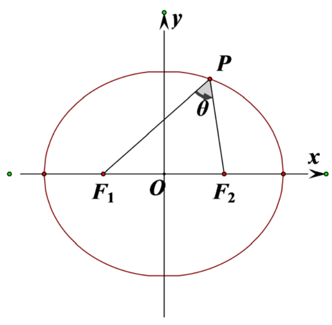

Figure 3. Focal triangles of an ellipse
图 3. 椭圆焦点三角形图

如图 3 所示，P 点为椭圆上一点，F_1,F_2 为椭圆的焦点，$\angle F_1PF_2=\theta$，现证 $S_{PF_1F_2}=b^2\tan\frac{\theta}{2}$。

设 $PF_1=m,PF_2=n$，则 $S=\frac{1}{2}mn\sin\theta$，由余弦定理有：

$$4c^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos\theta = (m+n)^2 - 2mn - 2mn\cos\theta = 4a^2 - 2mn(1+\cos\theta)$$

即 $mn = \dfrac{2b^2}{1+\cos\theta}$， $S = \dfrac{1}{2} * \dfrac{2b^2}{1+\cos\theta} * \sin\theta = b^2 * \dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = b^2\tan\dfrac{\theta}{2}$，得证。

双曲线焦点三角形面积可类似求证 $S = b^2\cot\dfrac{\theta}{2}$。当焦点三角形为直角时，已知其另一个角就能求出离心率。以上的求证过程需要理解并会求证，识记重要结论对于解决高考数学中的小题有很大帮助。

[例 3]已知椭圆 C 方程为：$\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$，$F_1, F_2$ 为其左右焦点，P 为 C 上一点，且 ΔF_1PF_2 的面积为 $\sqrt{3}$，则 ΔF_1PF_2 外接圆的面积为__。

A. $\dfrac{4}{3}\pi$　B. $\dfrac{16}{3}\pi$　C. $\dfrac{4}{\sqrt{3}}\pi$　D. 4π

解析：直接运用焦点三角形面积公式 $S = b^2\tan\dfrac{\theta}{2} = 3\tan\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{3}$，所以 $\theta = \dfrac{\pi}{3}$，由正弦定理 $\dfrac{2c}{\sin\frac{\pi}{3}} = 2R$，得 $R = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，外接圆的面积为 $\dfrac{4}{3}\pi$。

整个答题过程只需识记结论，直接运用到小题解答中，能减少计算量，提高答题效率，并降低运算出错几率。

5. 抛物线焦点弦性质的灵活应用

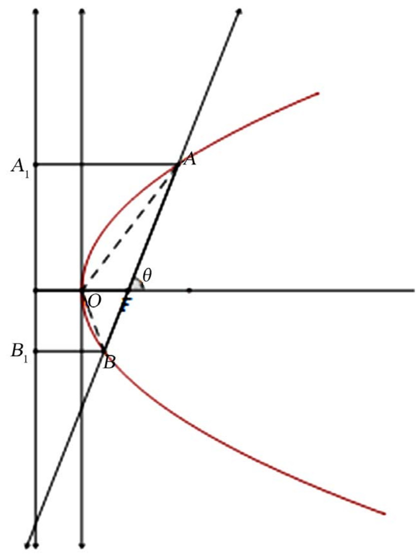

Figure 4. Parabola focal chord diagram
图 4. 抛物线焦点弦图

如图 4 所示，直线 AB 经过抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点 F，根据抛物线的性质 $AF = AA_1, BF = BB_1$ 来将探究焦点弦 AB 的相关性质。

由 $AF = AA_1$ 得 $p + AF\cos\theta = AF$，整理得 $AF = \dfrac{p}{1-\cos\theta}$；同理可得 $BF = \dfrac{p}{1+\cos\theta}$； $AB = AF + BF$

所以 $AB=\frac{p}{1-\cos\theta}+\frac{p}{1+\cos\theta}$，化简整理得 $AB=\frac{2P}{\sin^2\theta}$；$\frac{1}{AF}+\frac{1}{BF}=\frac{1-\cos\theta}{P}+\frac{1+\cos\theta}{P}=\frac{2}{P}$。

$$S_{\Delta AOB}=S_{\Delta AOF}+S_{BOF}=\frac{|OF|}{2}|AB|\sin\theta=\frac{p}{4}*\frac{2p}{\sin^2\theta}*\sin\theta=\frac{p^2}{2\sin\theta}$$

若 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}$，则 $|\cos\theta|=\left|\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right|$。

若学生能充分理解上述结论并能加以灵活应用，对于求解相关考题有很大帮助

[例 4]已知 F 是抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点，过点 F 且斜率为 1 的直线交 C 于 A,B 两点，设 $|FA|>|FB|$，则 $|FA|$ 与 $|FB|$ 的比值等于__。

解析：由以上推导出的公式可，当焦点弦斜率为 1，即 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，有 $\frac{p}{1-\cos\theta}>\frac{p}{1+\cos\theta}$，所以

$$|FA|=\frac{p}{1-\cos\theta},|FB|=\frac{p}{1+\cos\theta},\frac{|FA|}{|FB|}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=3+2\sqrt{2}$$

这道题如果熟悉抛物线中焦点弦长度公式，则得到结果并不难。

6. 圆锥曲线问题求解几点说明

1) 识记每条性质包括推出的一些重要结论，并能进行理解。对于基本性质要牢记，形成条件反射，做题时，题目涉及到某些性质定理的应用能迅速用公式去运算。圆锥曲线中有许多需要理解记忆的点，学生常常因为记不住知识点而在做题时卡壳，这要求学生不仅要知其然，还要知其所以然，即时忘记某些结论时也能进行推导。

2) 数形结合很重要，要善于挖掘几何关系。圆锥曲线画图解题很关键，高考中圆锥曲线大多数小题需要通过画图，去寻找对解题有益的几何关系，若无法找到关键的几何关系，直接进行计算，往往计算难度会在很大程度上的加大，甚至无法求解，费时又费力。

3) 有关斜率跟中点问题的解题中，设出的点坐标在联立方程后通常会用到韦达定理进行求解。

4) 学会总结题型。看似千变万化的题型可能只是起点高，落点低，不否认题海战术不重要，但更多的要学会去归纳总结。

总之，从目前高中教学改革和近年来高考的命题趋势来看，圆锥曲线的命题没有固定范围，问题的综合程度必然会有所提升，因此学生在圆锥曲线的学习中必须全面掌握相关内容，并且在解决圆锥曲线问题时要学会综合运用多种数学解题方法，多注重练习，进行数形结合，总结解题思路，才能灵活应答[4] [5]。

参考文献

[1] 万菁菁. 圆锥曲线相关问题思考[J]. 科技与教育, 2018(1): 52.
[2] 陈传璐. 圆锥曲线经典问题透析[J]. 中学生数理化, 2018(2): 32-34.
[3] 梁洪星. 品味圆锥曲线中的创新问题[J]. 中学数理化, 2020(4): 15-18.
[4] 薛得印. 圆锥曲线解答题的“破与立”[J]. 新教育时代, 2020(1): 226-228.
[5] 张兴力. 高中数学圆锥曲线解题技巧研究[J]. 数学学习与研究, 2020(5): 140.