

# 浅谈勾股定理习题教学

刘星伶

湖南科技大学数学与计算科学学院研究生院, 湖南 湘潭

收稿日期: 2022年4月6日; 录用日期: 2022年5月11日; 发布日期: 2022年5月18日

## 摘要

新课程改革中强调一切为了学生的发展, 不仅是在知识性学习上发展, 更是要发展能力。而习题作为教学中不可或缺的一环, 对培养学生能力至关重要。对勾股定理的研究多为新课的教学设计, 本文主要是研究勾股定理这一章节的习题教学, 论述了如何在勾股定理及习题教学中渗透数学文化、培养方程思想和数形结合思想, 期盼能对勾股定理这一章节的习题教学起到指导意义。

## 关键词

勾股定理, 习题教学, 核心素养

# On the Teaching of Pythagorean Theorem Exercises

Xingling Liu

Graduate School of Mathematics and Computational Sciences, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan Hunan

Received: Apr. 6<sup>th</sup>, 2022; accepted: May 11<sup>th</sup>, 2022; published: May 18<sup>th</sup>, 2022

## Abstract

The new curriculum reform emphasizes that everything is for the development of students, not only in the development of knowledge-based learning, but also in the development of ability. As an indispensable part of teaching, exercise is very important to cultivate students' ability. Most of the research on Pythagorean theorem is the teaching design of new courses. This paper mainly studies the exercise teaching of this chapter of Pythagorean theorem, discusses how to infiltrate mathematical culture, cultivate equation thought and combination of number and shape thought in the teaching of Pythagorean theorem and exercise, and looks forward to guiding the exercise teaching of this chapter of Pythagorean theorem.

## Keywords

### Pythagorean Theorem, Exercise Teaching, Core Literacy

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

自教育改革以来, 我们便强调要培养学生的能力而不是单纯进行知识教学。我们只是将知识灌输给学生是没有意义的, 学生无法在别的学科融会贯通, 也不能在生活中应用所学的数学知识, 形成了普遍的高分低能。教师在勾股定理习题教学之时, 要通过渗透数学文化帮助学生提升数学抽象、数学建模、数据分析、逻辑推理、数学运算和直观想象能力, 学习数形结合与整体代入的数学思想[1]。

## 2. 在勾股定理中渗透数学文化

八年级学生觉得解答证明题时用逻辑语言来书写很枯燥。为了减轻学生的心理障碍、让学生对学习产生更多的兴趣, 我们可以将数学文化加入课堂。尤其是在勾股定理这一章节, 有关勾股定理的数学文化丰富多彩, 单是它的证明方法就早已超过 500 种, 这些顺着时间长河不断积累的数学证明方法足以说明勾股定理的数学历史悠久[2]。

### 2.1. 勾股定理中的数学文化

我们国家对勾股形的应用早在从大禹治水时期, 还没有提出勾股形时, 我国已经率先应用此原理。再到商高用一根较长直尺和一根较短直尺, 两根直尺一端相接呈直角, 将此道具叫做“矩”, 提出此道具的各种用途, 若要测定是否呈铅直状态或者测水平距离就将“矩”放平; 要测量高度就把“矩”竖立起来等, 后人称之为“商高论矩”。再到赵爽弦图, 它丰厚了勾股定理的数学历史, 也增添了有趣的数学文化。勾股定理不仅仅是在国内拥有众多狂热爱好者, 它在国外也一度引起各个时间段的数学家的研究热潮。

### 2.2. 习题中渗透数学文化

由此有这样一道经典题, 我国古代数学著作《九章算术》中有这样一个问题: “今有池方一丈, 葭生其中央, 出水一尺, 引葭赴岸, 适与岸齐, 问水几何?” (注: 丈、尺是长度单位, 1 丈 = 10 尺) 这段话翻译成现代汉语为: 有一个水池是边长为 1 丈的正方形, 在水池中央有一根芦苇, 它顶端高出水面 1 尺, 如果把这根芦苇拉向水池一边的中点, 它的顶端恰好到达池边的水面, 则水池里水的深度为多少? 在给出题目之前先铺垫数学文化, 这样的问题能够调动学生的兴趣。芦苇代表的是一个恒定的量, 此题要想把题目做出来必须要明白无论芦苇拉扯到什么位置, 其长度都是不变的, 利用好这个条件就能快速解答此题。此题有利于学生培养数学抽象能力和数学建模能力, 提示将水池和芦苇抽象成正方形和直角三角形。此类题目容易出现的问题有三类。第一类问题, 学生无法将冗长的文字中抽象出数学问题。那么一定要注意的就是结合实际情况进行说明, 从而培养学生从勾股定理的学习中提升数学抽象能力。在做完题后还可以对题目进行变式, 将芦苇拉到不同的位置, 考察学生是否真的掌握了。第二类问题, 学生将题目抽象成数学问题后, 而少数学生因为找不到等量关系无法正确解答此题。大部分的学生在看到

题设条件较少时都会想到方程思想, 要用勾股定理列出方程, 却也会因为数学建模能力弱或找错等量关系导致解题失败。第三类错误, 把方程正确地列出来后因为计算能力弱导致解方程错误。

在勾股定理的习题中渗透数学文化好处颇多。首先, 能在冗长的题目中培养学生的数学抽象能力; 其次, 培养学生数学建模的能力; 最后, 在解方程时培养学生的计算能力。

### 3. 勾股定理中培养方程思想

在学习中, 仅仅掌握知识是远远不够的, 我们更重要的是要掌握思想。方程思想是我们在知之甚少时常采用的一种数学思想方法。我们在勾股定理中教学方程思想既可以培养学生的数学思想又可以检验数学运算的能力。在数学核心素养中数学运算能力是许多能力的基础, 解方程是一种考验计算能力的题型[3]。

#### 3.1. 勾股定理中的方程思想

在勾股定理中我们常有两种情况运用方程思想。第一种, 已知一边及另外两边的关系, 我们通过设未知数来列出有关勾股定理的方程。这种题型主要是考察学生数学方程思想和数学计算的能力。第一类错误, 有一些学生会因为未完全掌握方程思想列不出方程; 第二类错误, 有学生会因为数学计算能力差解错方程; 第三类错误, 学生对于此类问题还有一个问题就是审题不清, 解得的结果并非题目所要求的。

第二种, 在翻折问题中我们常常采用设未知数的方式来求解。翻折会产生许多的边角相等, 我们通过找到一个直角三角形构造有关勾股定理的方程。有关勾股定理的翻折的类型常考的有两种, 其一为在三角形上翻折, 另一为在矩形上翻折。这样的翻折问题教师可以先通过纸片生动演示, 先通过直观的翻折操作, 再进行抽象的题目讲授。纸片的翻折能有效引起学生的注意, 调动对数学学习的热情。我们通过翻折让学生发现对应边对应角相等。在做题时立刻就能画记出对应边和对应角相等[4]。在翻折题中给定的条件总是较少, 首先, 我们必须对这些对应边和对应角相等做出快速反应, 立即在所给图上标出边角。其次, 在条件很少不足以解题时, 善于设未知数, 通过未知数标明每一条边, 找到可用的直角三角形, 用勾股定理构造方程。最后, 正确地解方程。在这三步中都有容易出现的错误, 在第一步学生常因为对翻折不够了解或者想当然, 标错对应相等的边, 导致后面列出的方程错误, 解得错误答案。其实一方面也是说明学生在直观想象和数学抽象能力方面的能力还不够。在第二步中, 学生常会因为找不到斜边, 导致直角边和斜边混乱, 列出来有关勾股定理的方程是错误的。也有学生因为方程思想还未完全掌握列不出方程。在第三步中, 学生出现了完全平方公式展开和移项不变号方面的错误, 最后解得错误答案。在教授方程思想之时也要关注计算能力, 数学计算能力是所有能力的基础。

#### 3.2. 习题中培养方程思想

例如这样一题, 在直角三角形  $ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AB = 10$ ,  $BC:AC = 3:4$ , 求出  $BC$  和  $AC$  的长度。在此题中, 首先要提醒学生, 只知道一边及另两边的关系时, 立刻想到方程思想。其次, 提示学生按比例设未知数。学生往往会设  $BC$  为  $3t$ , 设  $AC$  为  $4t$ 。最后, 提醒学生要求的值是什么, 列完方程解出设定的  $t$  值, 却误以为就是正确答案, 完全忘记本题所求的是边长而不是  $t$  值。

再例如有这样一道翻折题, 有一张直角三角形的彩纸, 如图 1, 直角边  $AC$  为  $6\text{ cm}$ ,  $CB$  为  $8\text{ cm}$ , 将彩纸沿  $AD$  折叠, 直角边  $AC$  恰好落在斜边上, 且与  $AE$  重合, 求  $\triangle BDE$  的面积。

在此题中, 学生必须先要掌握翻折中存在的对应边和对应角相等。在此题中通过翻折可发现  $AC = AE = 6\text{ cm}$ ,  $CD = DE$ 。其次, 找到翻折的边设未知数, 表示出各边。在此题中可以设  $CD$  为未知数  $x$ , 则  $DE = x$ ,  $DB = 8 - x$ , 由勾股定理算出  $AB$  等于  $10\text{ cm}$ , 所以  $BE = 4\text{ cm}$ 。再次, 找到一个所有边都能用数或未知数表示出来的直角三角形列出有关勾股定理的方程。在  $\triangle DEB$  中,  $\angle DEB = 90^\circ$ , 由勾股定理得  $DE^2 + EB^2 = DB^2$ , 于是  $x^2 + 4^2 = (8 - x)^2$ 。最后, 正确解答方程就完成此题。

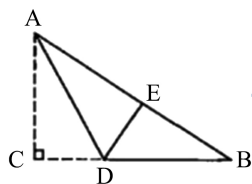


Figure 1. Right triangle ABC  
图 1. 直角三角形 ABC

#### 4. 勾股定理中培养数形结合思想

恩格斯曾说“数学是研究数量关系和空间形式的科学”[5]。勾股定理就是数形结合的典范，不仅从直角三角形中发现了边长之间的关系，还从直角三角形的边关系发现了无理数。

##### 4.1. 勾股定理中的数形结合思想

在勾股定理中一般有两种考察学生数形结合能力的题型，第一种就是利用勾股定理作图，例如说在数轴上画出某一个数，我们利用勾股定理在数轴上画出一些表示无理数的点，将数字与图形相结合，数形结合思想不仅增加了数学的趣味性也让学生体会到了勾股定理的重要。又比如说在坐标系中计算两点间的距离。我们通过作直角三角形算出两点间的距离，将坐标和边长进行转化再结合图像计算。提前为两点间的距离公式铺垫，也从直观的角度理解两点间的距离公式，培养学生数形结合思想和直观想象的能力。

第二种是计算立体图形中的最短路径问题，主要是在圆柱体和长方体中。我们结合实物将圆柱体和长方体展开，让学生先观察直观的图形，再结合所给数字做题。首先要学生观察后画出展开图。其次在展开图上标出立体图上相应的点，标明长度。最后利用勾股定理进行计算得出最短路径。

##### 4.2. 习题中培养数形结合思想

在第一种题型中，学生在数轴上描点完成度高，但是在坐标轴中求两点距离时不能转化为结合直角三角形求线段，所以完成的较差。例如这样一题，在直角坐标系中，求出点  $G(3, 4)$  与点  $H(1, 1)$  之间的距离。首先，说明数形结合的思路，我们要求两点间的距离则先在直角坐标系中连接两点。其次，说明这条线段也可以是三角形的边长，放在直角三角形这样就能求出线段的长度了，引导学生做出能求这条边的直角三角形。最后，利用坐标来标明边长并用勾股定理来计算斜边。这样的一套思路能将数字和图像紧密连接，从而培养学生的数形结合思想。

在第二种题型中，更需要将数形结合思想和空间想象能力结合起来。例如这样一题，如图 2，牛奶盒高为 7 cm，底面长 8 cm，宽为 4 cm。若一只蚂蚁要从  $A_2$  爬到  $C_1$  那么爬行的最短路径是多少？

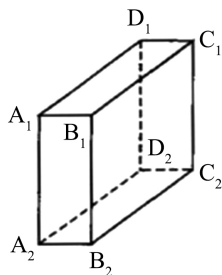


Figure 2. Milk box  
图 2. 牛奶盒

在这样一题中,如果不给学生进行直观图演示,那么很难让学生知道要计算的三种情况是不一样的,学生想当然地以为只有两种。我们通过让学生经历生动的立体图展开来画出展开图,使学生记忆深刻也更察觉到数学的趣味性,自己动手操作并且画出展开图符合素质教育让学生成为学习的主人。

## 基金项目

湖南省学位与研究生教育改革项目(2020JGYB191)。

## 参考文献

- [1] 李霞. 基于核心素养的初中数学教学的几点思考[J]. 河南教育(教师教育), 2022(2): 57-58.  
<https://doi.org/10.16586/j.cnki.41-1033/g4.2022.02.039>
- [2] 李婉侨. 初中数学教学中数学史素材的选取与呈现研究[D]: [硕士学位论文]. 沈阳: 沈阳师范大学, 2021.  
<https://doi.org/10.27328/d.cnki.gshsc.2021.000009>
- [3] 泮西星, 吴旦利. 浅谈初中数学核心素养的培养[J]. 新课程, 2021(50): 33.
- [4] 王荣鑫. 细审题 多联想 重反思——谈初中数学习题教学[J]. 数理化解题研究, 2022(11): 2-4.
- [5] 陈建忠. 试析初中数学教学中数形结合思想的应用[J]. 新课程, 2022(19): 211.