

数学核心素养下函数的单调性的教学设计

周 雪, 陈余喜

湖南科技大学, 湖南 湘潭

收稿日期: 2022年4月9日; 录用日期: 2022年5月23日; 发布日期: 2022年5月31日

摘 要

数学学科核心素养是为建立核心素养与课程教学间的内在联系,基于数学学科的本质凝练出的核心素养。它包括数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析。本文以“函数单调性”为例,立足于在课堂教学中渗透数学核心素养的培养,给出了一个完整的教学设计。

关键词

数学核心素养, 单调性, 教学设计

Pedagogical Design of Monotonicity of Functions under Mathematics Core Literacy

Xun Zhou, Shexi Chen

Hunan University of Science and Technology, Xiangtan Hunan

Received: Apr. 9th, 2022; accepted: May 23rd, 2022; published: May 31st, 2022

Abstract

Mathematics discipline core accomplishment is the core accomplishment condensed based on the essence of mathematics subject in order to establish the inner connection between core accomplishment and curriculum teaching. It includes mathematical abstraction, logical reasoning, mathematical modeling, visual imagination, mathematical operation and data analysis. Taking “functional monotonicity” as an example, this paper presents a complete teaching design based on the cultivation of mathematics core literacy in classroom teaching.

Keywords

Mathematics Core Literacy, Monotonicity, The Teaching Design

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

数学核心素养是指会用数学的眼光观察现实世界、会用数学的思维思考现实世界和会用数学的语言表达现实世界,在高中阶段包括数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析等六个方面。《高中数学课程标准》(2017年版2020年修订)明确学生发展核心素养是党的教育方针的具体化、细化。课标围绕核心素养的落实,明确函数的单调性这一节的教学要求为:引导学生正确使用符号语言刻画函数的性质,发展学生的数学抽象、逻辑推理和数学运算素养[1]。本文主要是基于培养和发展学生以上的这三种核心素养,给出了一个完整的有关函数单调性的教学设计案例。

函数的单调性是函数的重要性质之一,具有其基础性与发展性。一方面,函数的单调性是学生学习其他初等函数单调性的基础;另一方面,函数单调性的学习有利于学生对直线的斜切公式、导数的概念等的快速理解[2]。函数的单调性的学习过程中蕴含着数形结合、分类讨论等思想方法,是培养学生数学核心素养的良好素材。

教学设计是以现代学习论与教学论为基础,根据课程培养目标和学生的认知发展水平,确定具体的教学目标、选择教学内容、设计教学过程的各个环节的过程。本文以函数单调性为例,聚焦发展学生的数学核心素养,详细给出了本节内容的教学分析和教学过程的设计,希望能给相关内容的教学提供一些有益的参考。

2. 函数的单调性的教学分析

本节以高中必修一人教版教材中第三章第二节“函数的单调性”为例,从教材、学情、教学目标等方面做一个简单的教学分析。通过函数单调性的教学分析,在知识方面对教学内容进行整体把握,了解本节内容的地位与作用;学生方面,清楚学生的认知水平和所具备的数学能力,以便基于学生水平和已有知识结构进行教学设计,将数学核心素养的培养渗透到各个教学环节。结合对教材、学情以及课标中本节内容的教学要求,从知识技能、过程方法和情感态度价值观这三个方面给出具体的教学目标,对内容进行重难点分析,从而可以更好的把握重点,化解难点,使课堂结构更具条理性。

2.1. 教材分析

《函数的单调性》是高中数学必修一中第三章第二节的内容,是后续研究指数函数等初等函数单调性的基础。作为继函数的概念之后,学生学习的第一个基本性质,函数的单调性的学习中渗透着许多思想方法,借助图象研究性质的数形结合的思想,从特殊函数到一般函数的归纳思想,以及在例题中体现出的分类讨论的思想方法等,感受并学习上述思想方法是本节课的难点之一;而本节重点是学会用符号语言表述函数的单调性,为后续函数的值域问题、最值问题及实际问题的解决打下基础。

2.2. 学情分析

初中阶段,学生学习了一次函数、二次函数、反比例函数等具体函数,掌握了有关函数的基本知识;学习了借助函数图象来研究函数的单调性,能够用自然语言描述自变量变化时函数值的变化情况,对函数的单调性有了直观的认识[3];在本节之前学习了函数概念的知识,具备一定的数学抽象及逻辑推理能

力, 这都对本节知识的学习起到了铺垫作用。

2.3. 教学目标

知识与技能: 理解函数单调性的概念, 能够用符号语言对性质进行描述, 用定义证明函数的单调性。

过程与方法: 借助具体函数图象, 通过引导学生观察、思考进而用符号语言进行描述, 经历函数单调性概念的生成过程, 培养学生数形结合、分类讨论的思想, 提升学生的抽象概括能力。

情感态度价值观: 引导学生感受抽象的数学语言及直观的数学图象这两种形式的数学美, 提升学生的课堂参与意识, 激发学习兴趣, 培养数学核心素养。

2.4. 教学重点与难点

重点: 借助符号语言描述函数的单调性, 掌握函数单调性概念的应用;

难点: 感悟函数单调性的探究过程, 借助定义证明函数的单调性。

3. 教学过程设计

教学过程设计是教学设计中最为重要的环节, 直接关系到课堂教学质量。教师依据教学分析, 给出具体、详尽的过程设计, 教学过程通常是包括引入、探究新知、知识讲授、巩固、练习、小节及布置作业这几个方面, 教师课后也要适当进行教学反思, 扬长避短, 以便达到更好的教学效果。

3.1. 以旧引新

教师引导学生回忆并思考在初中阶段学习过的有关函数的某种性质, 即借助函数图象来研究函数值随自变量增大而增大(或减小), 学生思考后答出该性质是函数的单调性。由于在初中阶段只是学习了用自然语言描述, 教师引出本节所要探究的是, 如何借助符号语言来刻画函数的这一性质。

【设计意图】引导学生回忆旧知, 进而引出本节所要研究的新知, 加强了新旧知识间的联系, 有利于帮助学生形成系统的知识体系。

3.2. 探索新知

由于函数的单调性是抽象的知识, 教师引导学生可以从学习过的具体函数入手, 也就是先研究具体二次函数 $f(x) = x^2$ 的单调性。

师: 请同学们回忆画函数图象的步骤, 在草稿本上画出二次函数 $f(x) = x^2$ 的函数图象, 并观察图象有什么样的变化规律, 教师借助多媒体展示图象(见图 1)。

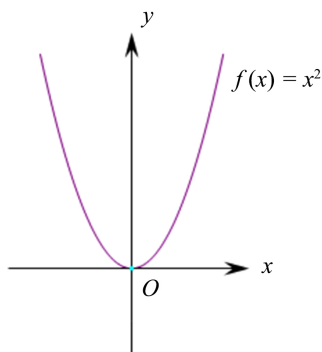


Figure 1. The appended drawings

图 1. 附图

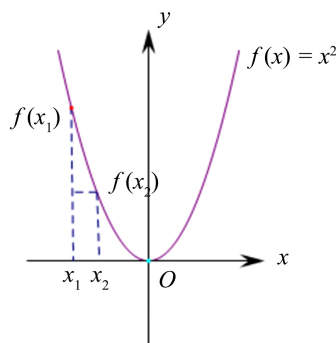


Figure 2. The appended drawings
图 2. 附图

生: 画出图象, 答出函数的变化规律为: y 轴左侧图象从左到右是下降的, y 轴右侧图象从左到右是上升的。

师: 我们知道函数是指自变量 x 与函数值 y 间的某种联系, 函数图象是点 (x, y) 的集合, 同学们能否借助自变量 x 与函数值 y 的变化规律, 来描述出函数图象的变化规律?

生: 函数 $f(x) = x^2$ 图象的变化规律是: 当 $x < 0$ 时, y 随 x 的增大而减小; 当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大。

【设计意图】从自变量与函数值的关系入手, 引导学生用自然语言对图象的变化进行描述, 通过画图象、观察图象, 借助直观的图象分析变化规律这一数学问题, 在领悟数形结合思想的同时, 也发展了学生的数学抽象和直观想象素养。

师: 刚刚用自然语言对图象的变化进行了描述, 由于符号语言是数学中的一种专门语言, 那我们能否用符号语言对图象进行描述呢? 不难发现变化规律是分为 $x < 0$ 和 $x > 0$ 两种情况的, 这也就说明图象具有分段性; 接下来就是自变量的增大应该如何表示, 借助符号语言, 即在区间任取 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$; 在表示完自变量增大的基础上, 函数值 $f(x)$ 随自变量 x 的增大而减小(或增大)也就很容易表示了, 即 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$) [3]。(借助多媒体展示图 2。)

生: 在教师的引导下, 用符号语言概括出图象的变化规律为: 任取 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$, 有 $f(x_1) = x_1^2$, $f(x_2) = x_2^2$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) > f(x_2)$; 任取 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, 有 $f(x_1) = x_1^2$, $f(x_2) = x_2^2$, 当 $x_1 < x_2$, 有 $f(x_1) < f(x_2)$ 。

师: 从图象到数学表达式, 我们知道函数的变化规律是函数随自变量变化而变化的规律, 反映在图象上, 就是图象上点的纵坐标随横坐标变化的变化规律, 而单调性, 就是指图象上升或下降的趋势。结合学生上述的回答, 给出函数 $f(x) = x^2$ 的单调性: 函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上是单调递减的, 在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调递增的。

【设计意图】引导学生经历从具体到抽象、从图形语言到自然语言到符号语言的过程, 符合高中课标对单调性的教学要求; 通过具体函数, 帮助学生经历其单调性的探究过程, 循序渐进, 符合学生的认知发展规律, 利于学生运用数学抽象的思维方式思考、解决问题, 发展数学抽象素养[1]。

师: 请学生参考函数 $f(x) = x^2$ 单调性的探究过程, 思考函数 $f(x) = |x|$ 有怎样的单调性。

生: 画出图象, 答出函数 $f(x) = |x|$ 的单调性: 任取 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) > f(x_2)$, 函数 $f(x) = |x|$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减; 任取 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, 当 $x_1 < x_2$, 有 $f(x_1) < f(x_2)$, 函数 $f(x) = |x|$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增。

【设计意图】借助具体函数 $f(x) = |x|$, 帮助学生从自然语言到数学语言的转化有进一步的理解,

促进数学语言内化, 引导学生感受数学语言的魅力。逻辑推理主要分为: 特殊到一般的推理和一般到特殊的推理这两类, 其中特殊到一般的推理中, 推理形式又可以分为归纳和类比。参考函数 $f(x) = x^2$ 的单调性, 进而研究 $f(x) = |x|$ 的单调性, 是从特殊到特殊的推理, 也就是类比推理, 因此通过这一环节学生的逻辑推理素养可以得到发展。

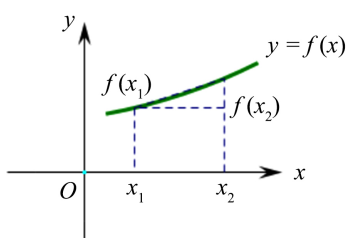
3.3. 归纳概念

师: 在学生感受两个具体函数单调性的表示之后, 借助多媒体, 给出函数单调性的定义(见表 1)。

Table 1. Definition of function monotonicity

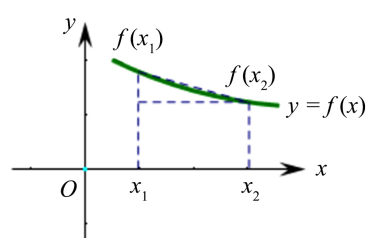
表 1. 函数单调性的定义

一般地, 设函数 $f(x)$ 的定义域为 I , 区间 $D \subset I$:



如果 $\forall x_1, x_2 \in D$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 就称函数 $f(x)$ 在区间 D 上单调递增。

特别地, 当函数 $f(x)$ 在它的定义域上单调递增时, 我们就称它是增函数。



如果 $\forall x_1, x_2 \in D$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 就称函数 $f(x)$ 在区间 D 上单调递减。

特别地, 当函数 $f(x)$ 在它的定义域上单调递减时, 我们就称它是减函数。

如果函数 $y = f(x)$ 在区间 D 上单调递增或单调递减, 那么就说函数 $y = f(x)$ 在这一区间具有(严格的)单调性, 区间 D 叫做 $y = f(x)$ 的单调区间。

【设计意图】从特殊到一般, 让学生经历概念的探究过程, 培养逻辑推理素养; 学习抽象概念时借助直观的图象, 渗透数形结合思想的同时, 发展直观想象素养; 借助图象和具体函数, 抽象出函数单调性的一般概念, 积累从具体到抽象的活动经验, 发展数学抽象素养。

师: 引导学生深入理解概念, 强调函数的单调性是对定义域内的某个区间而言的, 并举出一些特殊的例子来帮助学生把握概念。

3.4. 知识巩固

例 1. 根据定义, 研究函数 $f(x) = kx + b (k \neq 0)$ 的单调性。

分析: 根据定义来研究函数的单调性, 也就是研究当 $x_1 < x_2$ 时, $f(x_1) > f(x_2)$ 还是 $f(x_1) < f(x_2)$, 而在具体题目的处理上, 只需要确定 $f(x_1) - f(x_2)$ 是大于 0 还是小于 0 即可。

师: 题目要求我们研究函数 $f(x) = kx + b (k \neq 0)$ 的单调性, 先来看这个函数的定义域, 定义域是 R , 在定义域内任取 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 下面就是要判断 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小关系, 根据实数大小关系的基本事实, 只需要确定 $f(x_1) - f(x_2)$ 与 0 的大小关系即可。那么请同学们计算一下 $f(x_1) - f(x_2)$ 的值。

生: 在老师的引导下, 回答出函数 $f(x) = kx + b (k \neq 0)$ 的定义域为 R , 计算并回答出:

$$f(x_1) - f(x_2) = (kx_1 + b) - (kx_2 + b) = k(x_1 - x_2)。$$

师：因为 $x_1 < x_2$ ，所以 $x_1 - x_2 < 0$ ，这个时候只需要去看 k 的值。

生：回答出 $k \neq 0$ ，所以要分 $k > 0$ 和 $k < 0$ 两种情况讨论。

师：当 $k > 0$ 时，由于 $x_1 - x_2 < 0$ ，所以 $k(x_1 - x_2) < 0$ ，于是 $f(x_1) - f(x_2) < 0$ ，即： $f(x_1) < f(x_2)$ ，这时， $f(x) = kx + b$ 是增函数。上述是 $k > 0$ 时函数单调性的判断，请同学们思考回答出 $k < 0$ 时的情况。

生：参考老师讲述的第一种情况，回答出当 $k < 0$ 时，由于 $x_1 - x_2 < 0$ ，所以 $k(x_1 - x_2) > 0$ ，于是 $f(x_1) - f(x_2) > 0$ ，即： $f(x_1) > f(x_2)$ ，这时， $f(x) = kx + b$ 是减函数。

师：借助多媒体展示完整的解题步骤。

【设计意图】例 1 借助定义研究函数的单调性，可加深学生对新知的理解，同时题目中分两种情况讨论 k 的值，可以培养学生分类讨论的数学思想；在比较函数值的大小关系上，将问题转化为确定 $f(x_1) - f(x_2)$ 与 0 的大小关系，不仅利于学生借助运算方法解决问题，提升数学运算，也可以发展学生转化的数学思想；学生通过有逻辑的思考问题，理解问题，有条理、合乎逻辑的思考解决问题，其逻辑推理素养可得到发展。

例 2. 物理学中的波意耳定律 $p = \frac{k}{V}$ (k 为正常数) 告诉我们，对于一定量的气体，当其体积 V 减小时，压强 p 将增大。试对此用函数的单调性证明。

【设计意图】用单调性证明 V 减小时， p 将增大，也就是证函数 $p = \frac{k}{V}$ (自变量为 V ，函数值是 p) 在 $V \in (0, +\infty)$ 上单调递减。题目给出的是物理学中的公式，这就需要学生对问题进行数学抽象，用数学语言表达问题，用数学方法构建模型，进而解决问题。通过例 2，不仅可以帮助学生掌握证明函数单调性的步骤，同时可以引导学生感悟数学与物理学科之间的关联，积累数学实践的经验，认识数学模型在其他学科中的作用，发展数学建模这一素养。

例 3. 根据定义证明函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增。

【设计意图】在新知探究过程中借助了函数图象来研究单调性，但对于一些难以画出图象的函数，教师也要注意引导学生从定义出发作出证明。参考类似题目的解决，可以发展学生的逻辑推理素养；教师向学生进行解题示范，不仅可以帮助学生掌握证明单调性的大概步骤，使学生的解题过程更加规范，而且可以帮助学生发散思维，培养严谨的学习精神，提升数学运算素养。

3.5. 课堂小结

师：本节知识我们学习完了，同学们回忆一下，这节课主要学习了哪些内容？

生：学习了函数的单调性的概念，还学习了怎样借助函数的单调性的概念去证明函数的单调性。

师：除了上述知识的学习之外，本节课在知识的探究过程中，主要体现出的一种数学思想方法是什么？

生：借助图象研究性质，体现了数形结合的思想。

师：除了数形结合之外，我们可以发现在例题 1 的处理中，还可以体现出什么思想方法？

生：例 1 中分为 $k > 0$ 和 $k < 0$ 两种情况讨论，这体现了分类讨论的思想方法。

【设计意图】课堂小结是教学活动中不可缺少的环节，对本节课的主要概念、数学思想方法和解题方法进行回顾，利于学生对重点内容进行把握，也利于学生形成系统的知识框架。

3.6. 布置作业

师：请同学们完成 P79 课后练习中的 4 个题目。

【设计意图】布置作业是为了课后及时巩固新学的知识和思想方法,了解学生知识掌握情况的同时,相应的数学核心素养也可以得到发展。题目设置由易到难,题1是考察学生运用自然语言描述所给出图象的变化规律,是对旧知的巩固;题2依据定义证明已知函数为增函数,题3证明函数在某区间上是单调递增的,这两个题目可以帮助学生回顾证明的完整步骤,区分增函数与单调递增,同时培养他们的数学运算、逻辑推理能力;题4画出图象,通过观察图象,猜想函数具有某种性质,然后通过逻辑推理,证明猜想的正确性,这是研究函数性质的一种常用方法,该题目可帮助学生学习这种研究方法,提升直观想象、逻辑推理等素养。

4. 教学反思

在当下课程教学中,新课改的不断推进,就是要求教师在实际教学中,要做到以发展学生的核心素养为主,提高课堂教学的有效性[4]。基于上述对核心素养培育的要求,本文这节课的教学设计是在学生认知水平的基础上,采用探究、引导、提问的师生互动教学方法来进行的。尊重学生在学习过程中的主体性,教师积极营造课堂氛围,提升学生的问题探究意识、合作意识;课堂教学中联系初中学习过的知识,加强知识间的内在联系,更加符合学生的逻辑顺序,使得学生的数学知识体系更强[5]。

在函数的单调性的概念教学时,注重引导学生经历概念的探究过程,避免了学生对知识的死记硬背,同时可以培养学生的逻辑思维能力、抽象概括能力。考虑到学生学习抽象知识的困难,教师在教学设计中多次借助直观的函数图象,来帮助学生借助图形直观理解新知,培养学生数形结合能力。在新知讲授之后,教师带领学生进行理论知识的巩固练习,使得每个学生可以掌握函数的单调性的证明步骤,不仅可以使得学生的解题更加规范、严谨,他们的数学运算这一核心素养也可以得到发展。

5. 结语

本文以“函数的单调性”的教学设计为例,详细介绍了基于数学核心素养培养目标下的教学设计。在学生已有知识水平的基础上,实际教学中注重引导,让学生经历概念的探究过程,注重从特殊到一般、从具体到抽象的思想方法的渗透,帮助学生从数学的角度思考问题,运用数学方法解决问题,培养感悟数学抽象、逻辑推理和数学运算等素养。

基金项目

湖南省学位与研究生教育改革研究项目(2020JGYB191)。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[M]. 北京:人民教育出版社,2020.
- [2] 张悦,李璧镜. 从三维目标到核心素养看数学教学设计的发展——以“函数的单调性”教学设计为例[J]. 数学教学通讯,2021(18):6-9.
- [3] 孙浩.“函数的单调性”教学设计中如何体现数学素养的培养[J]. 河北理科教学研究,2019(4):20-22+32.
- [4] 范晓芳. 试论数学核心素养在“函数的单调性”教学中的显现[J]. 读写算,2020(12):175.
- [5] 王逸楠. 基于数学抽象素养的大单元教学设计——以“函数的单调性”为例[J]. 数学之友,2021(1):33-35+38.