Advances in Social Sciences 社会科学前沿, 2024, 13(2), 1100-1108
Published Online February 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ass
https://doi.org/10.12677/ass.2024.132148

Hans汉斯

秦九韶正负开方术在中学数学教学中的应用研究

李凤仙，李凤清，赵东辰，毕　骞*

内蒙古鸿德文理学院，教育系，内蒙古　呼和浩特

收稿日期：2023年12月19日；录用日期：2024年2月23日；发布日期：2024年2月29日

摘　要

本文旨在介绍秦九韶正负开方术在中学数学中的应用。通过对中国古代数学家对正负开方术的研究历史进行梳理，展示了该算法的重要性。详细介绍了秦九韶正负开方术的算理和运算程序，并结合案例研究了其在中学数学教学中的实际应用。强调了秦九韶正负开方术对于培养学生数学思维和提升数学素养的重要性。通过本文的阐述，读者可以更全面地了解秦九韶正负开方术在中学数学教学中的价值和意义。

关键词

秦九韶，正负开方术，中学数学教学

Application and Enlightenment of Qin Jiushao's Positive and Negative Square Root Method in Mathematics Teaching of Middle School

Fengxian Li, Fengqing Li, Dongchen Zhao, Qian Bi*

Department of Education, Inner Mongolia Honder College of Arts and Sciences, Hohhot Inner Mongolia

Received: Dec. 19th, 2023; accepted: Feb. 23rd, 2024; published: Feb. 29th, 2024

Abstract

This article aims to introduce the application of Qin Jiushao's positive and negative square open-

*通讯作者。

文章引用: 李凤仙, 李凤清, 赵东辰, 毕骞. 秦九韶正负开方术在中学数学教学中的应用研究[J]. 社会科学前沿, 2024, 13(2): 1100-1108. DOI: 10.12677/ass.2024.132148

ing technique in middle school mathematics. By sorting out the research history of ancient Chinese mathematicians on positive and negative square opening, the importance of this algorithm was demonstrated. This article provides a detailed introduction to the calculation theory and program of Qin Jiushao's positive and negative square opening technique, and combines it with case studies to study its practical application in middle school mathematics teaching. Emphasis was placed on the importance of Qin Jiushao's positive and negative square opening techniques in cultivating students' mathematical thinking and enhancing their mathematical literacy. Through the explanation in this article, readers can have a more comprehensive understanding of the value and significance of Qin Jiushao's positive and negative square opening techniques in mathematics teaching of middle school.

Keywords

Qin Jiushao, Positive and Negative Square Root Method, Mathematics Teaching of Middle School

1. 引言

寻求对高次方程问题的求解一直以来都是中世纪数学的中心课题和难题。秦九韶关于高次方程的数值解法，是中国传统数学取得优异成绩的突出表现。早在汉代的《九章算术》[1]里面就有了对开方术系统和完整的探讨，并成功运用开方法求解了二次方程问题。早在 11 世纪初期，贾宪通过对刘益的正负开方算术[2]的推广成为一般高次方程的数值解法，其优点是可以随乘随加，方法非常简单，且还可以推广到对高次方程求正根的问题上去。秦九韶在九章算术的开方术、贾宪的增乘开方法以及刘益的正负开方术的基础上，创造了高次方程的数值解法，即秦九韶的正负开方术，也称秦九韶程序。秦九韶的《数书九章》[3]汇集了汉以来开方术的大成，通过运用"增乘开方"法的思想成功解决了高次方程有理数根和无理数根近似值的计算问题[4]，他所设计的演算程序就是世人称道的"秦九韶方法"。

秦九韶对于数学一直秉承着"大则可以通神明，顺性命；小则可以经世务，类万物"的想法[5]。也就是从大的方面来说，数学可以认识自然，同时，数学可以使我们理解人生，陶冶情操。从小的方面来说，数学可以经营事物，分类万物。秦九韶还认为"数术之传，以实为体"[6]，研究数学理论，应从实际出发。寓德育于数学教育之中，是数学教育一直提倡的观点。现如今课程思政成为教育领域的热门词汇，如何将数学史和数学文化融入数学课堂教学，一直是数学教师思考的问题。秦九韶的《数书九章》把道德规范和数学教育有机结合起来的形式，值得我们借鉴。

2. 高次方程的解法——开方术

《九章算术》"少广"章中的"开方术"特指开平方运算，其算法与教科书中介绍的开平方笔算方法基本相同。九章算术的开方术包括开平方和开立方两种开方法，这两种方法仅限于系数是正数的方程。

1) 开平方算法：置积为实。借一算，步之，超一等。议所得，以一乘所借一算为法，而以除。除已，倍法为定法。其复除，折法而下。复置借算，步之如初。以复议一乘之。所得副，以加定法，以除。以所得副从定法，复除，折下如前。

2) 开立方算法：置积为实。借一算，步之，超二等。议所得，以再乘所借一算为法，而除之。除已，

三之为定法。复除，折而下。以三乘所得，置中行。复借一算，置下行。步之，中超一，下超二等。复置议。以一乘中，再乘下。皆副以加定法。以定除。除已，倍下，并中从定法。复除，折下如前。

刘益将前世数学家创造的“开方术”发展成一般数学二次方程的求解方法，即“二次方程求根法”。刘益在增乘开方法的基础上，先后攻克系数可为负数的方程的解法和方程首项系数必须为 1 的限制。即也可以解系数是小数的方程。找到了能够适用于系数是正数、负数、整数、小数的所有方程的解法。这一方法被称为“正负开方术”[7]。如果用语言描述就是：“用估根法，边乘边加，边变换原方程的系数，边接近结果，直到求解完成”。他把传统的开带从平法(系数为负数的开平方法)从平方法推广到“负方”和“益隅”。刘益在《论古根源》中讨论了分别含有“负方”和“益隅”的两类方程，并且创造了“减从开方”和“益积开方”两种开方方法。刘益在推演中将各量表示成一段条形面积，通过平面图形的割补法寻找等量关系，这是我国历史上最早用“正负开方术”求任何数字方程的正根，其研究成果遥遥领先于世界。

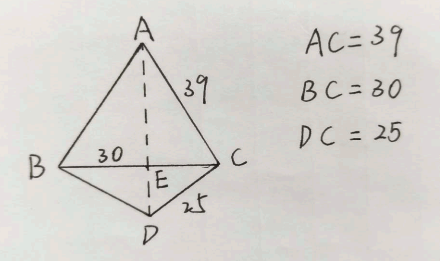
贾宪的“增乘开方法”[8]在本质上是开方中“求廉方”归属为“九章开方术”的程序(乘加的减根模式)中的算法，“边乘边加”的算法程序特征是开方和增乘开方的核心。贾宪研究归纳立成释锁及开方法后，规范开方算法为“增乘开方法”，从而提出一种连续“乘加”的巧妙算法。增乘方求廉法可以直接推广到开方程序中，这就是“增乘开方法”，标志着贾宪把中国古代数学的程序化思想推进到一个新的阶段。

秦九韶在九章算术的开方术、贾宪的增乘开方法以及刘益的正负开方术的基础上，创造出了一套完整的利用“随乘随加”逐步求出高次方程正根的程序，即秦九韶的正负开方术。计算机发明以后，秦九韶的高次方程的数值解法，可以毫不困难地转化为计算机程序。比英国数学家霍纳在 1819 年创立的同样方法，早了五百多年。

3. 秦九韶正负开方术

下面我们以《数书九章》卷 5“尖田求积”[9]题为例详细讲解秦九韶正负开方术的运算过程。

题目：问有两尖田一段，其尖长不等。两大斜三十九步，两小斜二十五步，中广三十步，欲知其积几何？



如果用我们现代的算法求解：

$$AE=\sqrt{39^2-15^2}=36$$

$$DE=\sqrt{25^2-15^2}=20$$

$$S_{ABDE}=\frac{1}{2}\times(36+20)\times30=840$$

对于高次方程：$-x^4+763,200x^2-40,642,560,000=0$，秦九韶的算法如下图 1：

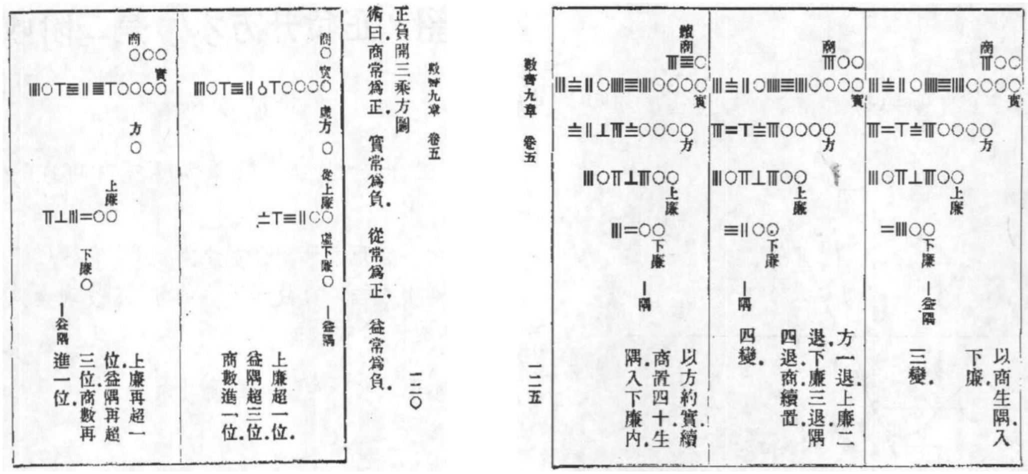


Figure 1. Qin Jiushao's positive and negative prescription calculus
图 1. 秦九韶正负开方术演算图

为了理解的方便，我们用阿拉伯数字来演示运算过程(说明：“商”就是指方程的根，“实”就是指常数项，“方”就是指一次项系数，“上廉”指二次项系数，“下廉”指三次项系数，“益隅”指最高次项系数，此方程中指四次项系数。“生”指的是乘，“从”指的是加)。

① 列开方式：开玲珑三乘方(因这个方程的奇次项的系数都为负数，所以称为开玲珑)。

0	商
−40,642,560,000	实
0	方
763,200	上廉
0	下廉
−1	益隅

得方程 1：$-x^4 + 763,200x^2 - 40,642,560,000 = 0$。

② 上廉超一位，益隅超三位，商数进一位。上廉再超一位，益隅再超三位，商数再进一位，上商八百为定(这里超一位就是进两位，800 是试商。方每次移一位，隅每次移四位；上廉每次移一位，下廉每次移三位) [10]。

800	商
−40,642,560,000	实
0	方
7,632,000,000	上廉
0	下廉
−100,000,000	益隅

得方程 2：$-10^8x_1^4+76.32\times10^8x_1^2-406.4256\times10^8=0$。

观察方程 1 和方程 2，可以看出根减小了，$x=100x_1$。做减根变换 $x_1=8+y$。

③ 以商生隅，入益下廉，以商生下廉，消从上廉，以商生上廉，入方，以商生方，得正积，乃与实相消。以负实消正积，其积乃有余，为正实，谓之“换骨”(用商 8 乘益隅−100,000,000，所得之数加下廉 0，得新的下廉−800,000,000，再用商 8 乘下廉−800,000,000，所得之数加上廉 7,632,000,000，得新的上廉 1,232,000,000，再用商 8 乘新的上廉 1,232,000,000，所得之数加方 0，得新的方 9,856,000,000，再用商 8 乘新的方 9,856,000,000，所得之数加实−40,642,560,000，得新的实 38,205,440,000)。

800	商
38,205,440,000	实
9,856,000,000	方
1,232,000,000	上廉
−800,000,000	下廉
−100,000,000	益隅

④ 以商生隅，入下廉。以商生下廉，入上廉内，相消。以正负上廉相消。以商生上廉，入方内，相消。以正负方相消(用商 8 乘益隅−100,000,000，所得之数加下廉−800,000,000，得新的下廉−1,600,000,000，再用商 8 乘下廉−1,600,000,000，所得之数加上廉 1,232,000,000，得新的上廉−11,568,000,000，再用商 8 乘新的上廉−11,568,000,000，所得之数加方 9,856,000,000，得新的方−82,688,000,000)。

800	商
38,205,440,000	实
−82,688,000,000	方
−11,568,000,000	上廉
−1,600,000,000	下廉
−100,000,000	益隅

⑤ 以商生隅，入下廉；以商生下廉，入上廉(用商 8 乘益隅−100,000,000，所得之数加下廉−1,600,000,000，得新的下廉−2,400,000,000，再用商 8 乘下廉−2,400,000,000，所得之数加上廉−11,568,000,000，得新的上廉 30,768,000,000)。

800	商
38,205,440,000	实
−82,688,000,000	方
30,768,000,000	上廉
−2,400,000,000	下廉
−100,000,000	益隅

⑥ 以商生隅，入下廉(用商 8 乘益隅−100,000,000，所得之数加下廉−2,400,000,000，得新的下廉−3,200,000,000)。

800	商
38,205,440,000	实
−82,688,000,000	方
−30,768,000,000	上廉
−3,200,000,000	下廉
−100,000,000	益隅

得方程 3：$-10^8 y^4 - 32\times10^8 y^3 - 307.68\times10^8 y^2 - 826.88\times10^8 y + 382.0544\times10^8 = 0$。

⑦ 方一退，上廉二退，下廉三退，隅四退；商续置(方向后退一位，上廉向后退两位，下廉向后退三位，益隅向后退四位，商继续放置)。

800	商
38,205,440,000	实
−8,268,800,000	方
−307,680,000	上廉
−3,200,000	下廉
−10,000	益隅

上述步骤中根变大了 $y = 0.1z$。

得方程 4：$-10^4 z^4 - 32\times10^5 z^3 - 307.68\times10^6 z^2 - 826.88\times10^7 z + 382.0544\times10^8 = 0$。

⑧ 以方约实，续商置四十，生隅入下廉内。以商生下廉，入上廉内。以商生上廉，入方内。以续商四十命方法，除实，适尽。所得商数八百四十步，为田积(用方 826,880,000 除实 38,205,440,000，得续商 4，置之于十位。续商指的是根的下一位有效数字。用商 4 乘益隅−10,000，所得之数加下廉−3,200,000，得新的下廉−3,240,000。用商 4 乘下廉−3,240,000，所得之数加上廉−307,680,000，得新的上廉−320,640,000，用商 4 乘上廉−320,640,000，所得之数加方−8,268,800,000，得新的方−9,551,360,000，用商 4 乘方−951,360,000，所得之数加实 38,205,440,000，得新的实为 0。故最终所得商数为 840，田积为 840 步)。

$382.0544\times10^8 \div 826.88\times10^7 = 4.62043344$，故 8 的续商为 4，继续做减根变换 $z = 4 + u$，增乘程序如下：

实	38,205,440,000	0
方	−8,268,800,000	−9,551,360,000
上廉	−307,680,000	−320,640,000
下廉	−3,200,000	−3,240,000
隅	−10,000	−10,000

得：

840	商
0	实
−9,551,360,000	方
−320,640,000	上廉
−3,240,000	下廉
−10,000	益隅

4. 秦九韶正负开方术在中学数学教学中的应用

《普通高中数学课程标准(2017 年版)》中着重强调“教师应有意识地将数学文化渗透到日常教学中，引导学生了解数学的发展历程，感悟数学的价值”[11]。秦九韶的正负开方术对于中学高次方程的求解有重大作用，蕴含着丰富的学科价值、应用价值、人文价值和课堂实践意义，是典型的数学文化[12]。所以我们以具体问题为例来展示秦九韶正负开方术在中学数学教学中的应用。

案例：求方程 $x^3-x-1=0$，在 $x=1.5$ 附近的实根。

Step 1：置首商“1”，做减根变换 $x=1+y$，用增乘程序

实	−1	−1			
方	−1	0	2		
廉	0	1	2	3	
隅	1	1	1	1	1

得新方程 1：$y^3+3y^2+2y-1=0$。

首先估根，以方约实，也就是 $1\div 2=0.5$，然后将 0.5 带入新方程 1，算出结果为正数，换 0.4 代入方程 1，算出结果仍为负数，换 0.3 代入新方程 1，结果为负数，所以续商 0.3。

Step 2：续商“0.3”，做减根变换 $y=0.3+z$，用增乘程序

实	−1	−0.103			
方	2	2.99	4.07		
廉	3	3.3	3.6	3.9	
隅	1	1	1	1	1

得新方程 2：$z^3+3.9z^2+4.07z-0.103=0$。

首先估根，以方约实，也就是 $0.103\div 4.07=0.02530713$，然后将 0.02 带入新方程 2，算出结果为负数，所以续商 0.02。

Step 3：续商“0.02”，做减根变换 $z=0.02+u$，用增乘程序

实	−0.103	−0.020032			
方	4.07	4.1484	4.2272		
廉	3.9	3.92	3.968	3.96	
隅	1	1	1	1	1

得新方程 3： $u^3+3.96u^2+4.2272u-0.020032=0$ 。

首先估根，以方约实，也就是 $0.020032\div 4.2272=0.00473883$ ，然后将 0.004 带入新方程 3，算出结果为负数，所以续商 $0.004+v$ 。

实	−0.020032	−0.003059776			
方	4.2272	4.243056	4.258928		
廉	3.96	3.964	3.968	3.972	
隅	1	1	1	1	1

得新方程 4： $v^3+3.972v^2+4.258928v-0.003059776=0$ 。

以此类推。

由上述过程，我们可看到续商越来越接近 0。最终算出方程 $x^3-x-1=0$ ，在 $x=1.5$ 附近的实根约为 1.324717957545。

5. 秦九韶数学观对中学数学教学的启示

秦九韶正负开方术对中学数学教与学有着重要的启示，包括简化问题、拓展思维方式、丰富解题方法，加强实践应用等方面。这些启示有助于优化中学数学教师的课程组织方式和授课策略，提高学生的数学素养和解决问题的能力，促进中学数学教育的蓬勃发展。

1) 简化复杂问题。秦九韶正负开方术通过将高次方根的计算转化为一系列简单的步骤，使原本复杂的计算问题变得更加简单。这启示我们，在中学数学教学中，可以通过引入适当的方法和策略，将看似复杂的问题转化为易于理解和解决的简单问题，帮助学生建立自信并提高解题能力。

2) 拓展思维方式。秦九韶正负开方术要求学生思考如何将一个复杂的问题转化为一系列简单的计算步骤，这培养了学生的拓展思维方式。在中学数学教学中，我们可以通过引导学生思考问题的不同角度和解决路径，激发学生的创造力和解决问题的能力。

3) 丰富解题方法。秦九韶正负开方术作为求多项式根的一种工具，帮助学生更好地理解多项式的性质和求根方法。在中学数学教学中，我们可以通过秦九韶正负开方术的引入，帮助学生深入理解多项式的特点，并有助于学生掌握更多求根方法，提高解决多项式相关问题的能力。

4) 加强实践应用。秦九韶正负开方术是一个实用的算法，在实际应用中具有广泛的应用前景。通过介绍该算法，可以让学生认识到数学不仅仅是一门理论学科，还有着广泛的实际应用。在中学数学教学中，我们可以通过引入实际应用案例，让学生了解数学在现实生活中的重要性和应用场景，培养学生的应用数学思维。

综上所述，在中学数学教学中，教师可以借鉴秦九韶的思想，将抽象的数学知识与实际问题相结合，通过创设丰富的现实生活情境，学生能够更好地理解和应用数学，让学生体会到数学对于现实生活的广

泛应用性，拓展学生的基本活动经验。教师还要注重基础知识的打牢，确保学生对基础概念和方法的掌握，为后续的学习打下良好的基础，为学生数学知识体系的构建起到添砖加瓦的作用。在教学的过程中，教师要鼓励学生勇于探索、创新思维，勇敢地提出自己的问题和解决方法，组织学生合作交流自己的想法，要将举一反三的思想贯彻到数学课堂中，加强对于学生数学思维的培养，增强学生的数学基本技能和基本思想方法。

参考文献

[1] 九章算术[M]. 刘徽, 注. 李淳风, 注释. 北京: 中华书局, 1985.
[2] 陈敏, 陶会强. 宋元时期高次方程的发展[J]. 科协论坛(下半月), 2010(1): 94-95.
[3] 魏思玫, 胡砾艺, 李娜. 秦九韶算法与牛顿迭代法的比较[J]. 高等数学研究, 2022, 25(4): 28-32.
[4] 付春娟. 南宋秦九韶的数学成就[J]. 兰台世界: 上旬, 2012(19): 68-69.
[5] 汤慧龙. 试论秦九韶《数书九章》的数学教育价值[J]. 绍兴文理学院学报(自然科学), 2004(9): 96-98.
[6] 杨合俊. 秦九韶"正负开方术"是二阶收敛的[J]. 数学的实践与认识, 2011, 41(1): 229-236.
[7] 王荣彬. 对刘益正负开方术的新研究[J]. 自然科学史研究, 1999(1): 28-35.
[8] 海红. 增乘开方算法的由来[J]. 武警学院学报, 2006(2): 92-94.
[9] 秦九韶与《数书九章》[J]. 语数外学习(高中版下旬), 2020(2): 62-63.
[10] 钱宝琮. 秦九韶与高次方程的数值解法[J]. 语数外学习(高中版下旬), 2022(4): 57-59.
[11] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2018.
[12] 晁丰成. 立足数学文化 生长学科素养——以海伦-秦九韶公式教学为例[J]. 中国数学教育, 2021(22): 51-54.