# 第一章　绪论

## 1.1 引言

图论是离散数学的一个重要分支. 1736 年, 年仅 29 岁的瑞典数学家欧拉解决了著名的柯尼斯堡七桥问题, 自此拉开了图论研究的序幕. 由于当时数学界并未对欧拉解决柯尼斯堡七桥问题的意义给予重视, 因此导致图论诞生后未能得到及时发展. 1936 年, 匈牙利数学家柯尼希整理了近 200 年的图论成果, 出版了第一部图论专著《有限图与无限图理论》, 这成为图论发展史上第一座里程碑. 此后的几十年图论得到了迅速发展, 目前已经成为数学学科的一个重要分支. 图论有很多分支, 如: 代数图论、随机图论、算法图论和超图论等. 此外, 图论在其它学科也有广泛应用, 如: 地理、天文、生物、物理、数学、化学以及社会等学科的许多问题可借助图论的理论和方法解决.

代数图论是组合数学的一个重要分支, 主要使用代数的理论和方法解决图论问题. 代数图论中常用的研究方法有三种: 群论方法、线性代数方法和图不变量方法.

利用群论研究图论可追溯至上世纪 30 年代. 1938 年德国图论学家 Robert Frucht 指出: 任一抽象群都是某个图的自同构群, 自此拉开了用群论方法去研究图论的序幕. 1960

年以后这个领域的研究得到迅速的发展, 用群论的方法研究图的优越性也日渐突出, 如对图的(局部)点传递性、边传递性、(局部)弧传递性、(局部)有向路传递性、(局部)测地线传递性、(局部)距离传递性、局部本原性、半弧传递性以及地图等的研究. 此外, Cayley 图和陪集图也是运用群论的方法研究图论的成功例子. 正因为这种优越性才使得群与图成为代数图论庞大的分支, 并且日益受到学者们的重视.

## 1.2 无立方因子阶(半)弧传递图的研究背景和现状

如果图 $\Gamma$ 的全自同构群在它的边集上传递, 或者在点集和边集上传递但在弧集上不传递, 则称 $\Gamma$ 是边传递的或者半弧传递的. 根据全自同构群在点集上是否传递, 边传递图可分类三类: 弧传递图、半弧传递图和二部边传递图.

对半弧传递图的研究可追溯到 1966 年, Tutte 在文献 [1] 中首先研究了半弧传递图, 并且证明了奇数度的点传递且边传递图一定是弧传递的. 1970 年, Bouwer 在文献 [2] 中第一次构造出了半弧传递图, 随后越来越多的半弧传递图被构造出来. 从那时起, 尤其近 20 年半弧传递图受到了许多学者的广泛关注 (参阅文献 [3–5]). 半弧传递图研究的问题之一就是分类某些阶数的半弧传递图. 下面列举一些已被刻

画或者分类的半弧传递图, 其中 $p,q,r$ 均为奇素数.

(1) $p$, $p^2$, $2p$ 和 $2p^2$ 阶四度半弧传递图:

- 1971 年、1987 年和 2010 年, 文献 [6–8] 分别证明了不存在 $p$, $p^2$, $2p$ 和 $2p^2$ 阶四度半弧传递图.

(2) $3p$, $4p$ 和 $4p^2$ 阶半弧传递图:

- 1992 年, 文献 [9] 分类了 $3p$ 阶半弧传递图.

- 2013 年和 2016 年, 文献 [10, 11] 分别分类了 $4p$ 和 $4p^2$ 阶半弧传递图.

(3) $2pq$ 和 $pqr$ 阶四度半弧传递图:

- 2011 年, Y.Q. Feng, J.X. Zhou 等分类了 $2pq$ 阶四度半弧传递图, 见文献 [12].

- 2016 年, X.Y. Wang, Y.Q. Feng 等分类了 $pqr$ 阶四度半弧传递图, 见文献 [13].

(4) $pq$ 和 $p^2q$ 阶四度半弧传递图:

- 1994 年, R.J. Wang 分类了 $pq$ 四度半弧传递图, 见文献 [14].

- 2014 年, J.M. Pan, Y. Liu 等分类了 $p^2q$ 阶四度半弧传递图, 见文献 [15].

一个图称作是无平方因子阶或无立方因子阶的, 如果其阶不能被任意一个素数的 2 次幂或 3 次幂整除. 由定义可知无平方因子阶图是无立方因子阶图的子类.

事实上存在半弧传递图的最小度数是四. 注意到含有一个素数因子和含有两个素因子并且其中一个是偶素因子的无立方因子阶四度半弧传递图已经被分类. 此外, 含有两个奇数素因子 $p, q$ 的 $pq$、$p^2q$ 阶四度半弧传递图也已被分类. 因此本文的第一个工作是解决含有两个奇素因子的无立方因子阶四度半弧传递图. 我们考虑了下面的问题:

**问题1.** *刻画或者分类 $p^2q^2$ 阶四度半弧传递图.*

针对问题 1, 本文在第三章研究了此类图, 并且给出了刻画, 具体结果见定理 3.1.1.

近年来, 小素数度弧传递图受到了代数图论学者们的广泛关注. 下面列举出一些具有代表性的工作, 其中 $p, q$ 均为奇素数.

(1) *无平方因子阶三度、五度和七度弧传递图:*

- 2014 年, C.H. Li, Z.P. Lu 等分类了无平方因子阶三度弧传递图, 见文献 [16].

- 2016 年, S.Y. Ding, B. Ling 等分类了无平方因子阶五度弧传递图, 见文献 [17].

- 2017 年, J.M. Pan, B. Ling 等分类了无平方因子阶七度弧传递图, 见文献 [18].

(2) 无立方因子阶三度弧传递图:

- 2017 年, C.H. Li 和 B.G. Lou 分类了无立方因子阶三度弧传递图, 见文献 [19].

(3) $2pq$ 和 $4pq$ 阶五度弧传递图:

- 2011 年, X.H. Hua, Y.Q. Feng 等分类了 $2pq$ 阶五度弧传递图, 见文献 [20].
- 2013 年, J.M. Pan, B.G. Lou 等分类了 $4pq$ 阶五度弧传递图, 见文献 [21].

(4) $2p$、$2p^2$、$4p$ 和 $4p^2$ 阶五度弧传递图:

- 2016 年, 文献 [22, 23] 分类了 $2p$、$2p^2$、$4p$ 和 $4p^2$ 阶五度弧传递图.

注意到无平方因子阶三度、五度和七度弧传递图已被分类, 并且三度无立方因子阶弧传递图也已经分类完成. 因此自然地本文考虑五度无立方因子阶弧传递图. 注意到对于阶含两个素因子的情形: $2p$、$2p^2$、$4p$ 和 $4p^2$ 阶已被解决, 且对于含三个因子的情形: $2pq$、$4pq$ 阶也完成了分类. 事实上, $4pq$ 阶的情形可以看作是对 $2pq$ 阶情形在偶素因子上的一个

推广. 从而本文的第二个工作是从奇素因子上对 $2pq$ 阶的情形进行推广, 于是考虑了下面的问题:

**问题2.** *刻画或者分类 $2p^2q$ 阶五度弧传递图.*

针对问题 2, 本文在第四章研究了此类图, 并且给出了完全分类, 具体结果见定理 4.1.1.

无立方因子阶素数度对称图也是代数图论近年来研究的热点. 因此本文考虑了此类图.

2007 年, Y.Q. Feng 和 J.H. Kwak 在文献 [24] 中分类了$4p$ 和 $4p^2$ 阶三度弧传递图. 紧接着 2011 年, S.T. Guo, J.T. Shi 等分类了 $4p$ 阶七度弧传递图, 见文献 [25]. 2016 年, J.M. Pan 和 Z.H. Huang 在文献 [23] 中分类了 $4p$ 和 $4p^2$ 阶五度弧传递图. 因此本文的第三个工作是把这些结果推广到任意素数度的情形, 于是考虑了下面的问题:

**问题3.** *刻画或者分类 $4p$ 和 $4p^2$ 阶素数度弧传递图.*

2017 年, J.M. Pan 和 S.Y. Ding 在文献 [26] 中分类了 $2p$ 和 $2p^2$ 阶素数度弧传递图. 因此问题 3 也可以视为对 $2p$ 和 $2p^2$ 阶的情形在偶素因子上的推广. 针对问题 3, 本文第五章对这类图中基图的情形进行了完全分类. 从而部分完成了问题 3. 问题 3 的完全解决, 还需要对 $4p$ 和 $4p^2$ 阶素数度弧传递非基图进行完全分类或者刻画. 对这一工作, 我们正在解决中.

## 1.3 弧传递 Cayley 图的研究背景和现状

如果一个图的全自同构群包含一个正则子群, 则这个图是此正则子群上的 Cayley 图. 由于 Cayley 图的点集是群的元素所构成的集合, 因此 Cayley 图与群联系很紧密.

自从用群作为工具研究图以来, 刻画或者分类 Cayley 图一直是代数图论中的热点问题. Cayley 图是点传递的但未必是弧传递的, 因此许多学者对弧传递 Cayley 图进行了研究. 下面列举一些代表性的工作.

(1) 二面体群上的三度弧传递 Cayley 图:

- 2004 年, S.F. Du, Y.Q. Feng 等分类了二面体群上的三度弧传递 Cayley 图, 见文献 [27].

(2) 交换群上的局部本原弧传递 Cayley 图:

- 2011 年, C.H. Li, B.G. Lou 等分类了交换群上的局部本原弧传递 Cayley 图, 见文献 [28].

(3) $pq$ 阶 Frobenius 群上正规弧传递 Cayley 图:

- 2014 年, B.P. Corr 和 C.E. Praeger 刻画了 $pq$ 阶 Frobenius 上正规弧传递 Cayley 图, 见文献 [29].

(4) 非交换单群上的三度弧传递 Cayley 图:

- 2005 年和 2007 年, S.J. Xu, X.G. Fang 等研究了非交换单群上的三度 $s$-弧传递 Cayley 图, 见文献 [30, 31].

- 2005 年, S.F. Du 和 F.R. Wang 分类了非交换单群 $\mathrm{PSL}(2, p)$ 上的三度弧传递 Cayley 图, 见文献 [32].

- 2016 年, J.Y. Chen, B.Z Xia 等给出了非交换单群 $\mathrm{A}_n$ 上三度非正规弧传递 Cayley 图的一个无限族, 见文献 [33].

(5) 非交换单群上的五度弧传递 Cayley 图:

- 2016 年, B. Ling 和 B.G. Lou 构造出了非交换单群 $\mathrm{A}_{39}$ 上五度非正规 2-弧传递 Cayley 图, 见文献 [34].

- 2016 年, B. Ling, J.J. Li 等刻画了五度 1 传递 Cayley 图, 见文献 [35].

- 2017 年, B. Ling 和 B.G. Lou 分类了非交换单群上具有可解点稳定子群的五度弧传递 Cayley 图, 见文献 [36].

(6) 非交换单群上的七度弧传递 Cayley 图:

- 2017 年, J.M Pan, F.G. Yin 等分类了非交换单群上具有可解点稳定子群的七度弧传递 Cayley 图, 见文献 [37].

群 $G$ 称为 Frobenius 群如果 $G = W{:}H$, 并且 $xy \neq yx$, 其中 $x \in W \setminus \{1\}$, $y \in H \setminus \{1\}$. 特别地, $G$ 称作是本原 Frobenius 群如果 $H$ 不可约的作用在 $W$ 上.

注意到关于 Frobenius 群上弧传递 Cayley 图的结果不多, 并且受非交换单群上弧传递 Cayley 图的启发. 因此本文的第四个工作是研究 Frobenius 群上弧传递 Cayley 图. 我们考虑了以下问题:

**问题4.** *刻画或者分类 Frobenius 群上的三度、五度和七度弧传递 Cayley 图.*

针对问题 4, 本文第六章至第八章研究了本原 Frobenius 群 $G \cong \mathbb{Z}_p^d{:}\mathbb{Z}_n$ 上的三度、五度和七度弧传递 Cayley 图. 特别地, 对三度的情形给出了完全分类, 对五度和七度具有可解点稳定子群的情形进行了刻画, 具体结果见定理 6.1.1、定理 7.1.1 和定理 8.1.1.