第一章　基础知识介绍

§1.1 偏差分及其表示形式

本书作者提出的偏差分方法是建立在偏差分基础之上的。为此先介绍偏差分。

定义 1.1.1 设存在多元函数 $f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$，$h_k$ 是 x_k 方向上的步长，r 是一个正实数，$\left(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\ldots,x_n^{(i)}\right)$，$\left(i=0,1,2,\ldots,n\right)$ 是 n 维变量 $\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$ 上的一个差分点，称：

$$\partial_{x_k}^{(+r)} f\left(x_1^{(i)},\ldots,x_k^{(i)},\ldots,x_n^{(i)}\right)=f\left(x_1^{(i)},\ldots,x_k^{(i+rh_k)},\ldots,x_n^{(i)}\right)-f\left(x_1^{(i)},\ldots,x_k^{(i)},\ldots,x_n^{(i)}\right)$$

是 $f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$ 关于 x_i 在点 $\left(x_1^{(i)},\ldots,x_k^{(i)},\ldots,x_n^{(i)}\right)$ 的一阶向前偏差分。称：

$$\partial_{x_k}^{(-r)} f\left(x_1^{(i)},\ldots,x_k^{(i)},\ldots,x_n^{(i)}\right)=f\left(x_1^{(i)},\ldots,x_k^{(i)},\ldots,x_n^{(i)}\right)-f\left(x_1^{(i)},\ldots,x_k^{(i-rh_k)},\ldots,x_n^{(i)}\right)$$

是 $f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$ 关于 x_i 在点 $\left(x_1^{(i)},\ldots,x_k^{(i)},\ldots,x_n^{(i)}\right)$ 的一阶向后偏差分，称：

$$\partial_{x}^{(\pm r)} f\left(x_1^{(i)},\ldots,x_k^{(i)},\ldots,x_n^{(i)}\right)=f\left(x_1^{(i)},\ldots,x_k^{(i+rh_k)},\ldots,x_n^{(i)}\right)-f\left(x_1^{(i)},\ldots,x_k^{(i-rh_k)},\ldots,x_n^{(i)}\right)$$

是 $f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$ 关于 x_k 在点 $\left(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\ldots,x_n^{(i)}\right)$ 的一阶对称中心偏差分。

r 称为步长系数，当 r 为正整数时相应的偏差分称为节点偏差分，反之称为非节点偏差分。当 $r=1$ 时，也称为一步或单步偏差分。

在下面的表述中，为了简化符号，$\partial_{x_k}^{(+r)} f\left(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\ldots,x_n^{(i)}\right)$ 和 $\partial_{x_k}^{(-r)} f\left(x_1^{(i)},x_k^{(i)},\ldots,x_n^{(i)}\right)$ 统一写作 $\partial_{x_k}^{(r)} f\left(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\ldots,x_n^{(i)}\right)$。

现在对一些符号做一个说明，符号 ∂_{x_k} 表示关于 x_k 的一阶偏差分，$\partial_{x_k}^{(r)}$ 表示关于 ∂_{x_k} 的、步长系数为 r 的一阶偏差分，当 r 为整数时，表示一阶节点偏差分，当 $r=1$ 时表示一步一阶节点偏差分，$\partial_{x_k}^{(+r)}$ 表示关于 ∂_{x_k} 的、步长系数为 r 的一阶向前偏差分，当 $r=1$ 时，$\partial_{x_k}^{(+r)}$ 简写成 $\partial_{x_k}^{(+)}$，$\partial_{x_k}^{(-r)}$ 表示关于 ∂_{x_k} 的、步长系数为 r 的一阶向后偏差分，当 $r=1$ 时，$\partial_{x_k}^{(-r)}$ 简写成 $\partial_{x_k}^{(-)}$。

定义 1.1.2 设存在多元函数 $f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$，$h_k$ 是 x_k 方向上的步长，r_1,r_2 是正实数，$\left(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\ldots,x_n^{(i)}\right)$，$\left(i=0,1,2,\ldots,n\right)$ 是 n 维变量 $\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$ 上的一个差分点，称：

$$\partial_{x_{k_1}}^{(r_1)}\partial_{x_{k_2}}^{(r_2)} f\left(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\ldots,x_n^{(i)}\right)=\partial_{x_{k_2}}^{(r_2)}\partial_{x_{k_1}}^{(r_1)} f\left(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\ldots,x_n^{(i)}\right)$$

是 $f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ 在 $\left(x_1^{(i)},x_2^{(i)},...,x_n^{(i)}\right)$ 的二阶偏差分。r_1,r_2 称为步长系数，当 r_1,r_2 为正整数时，相应的二阶偏差分称为二阶节点偏差分，反之称为二阶非节点偏差分。$r_1=1,r_2=1$ 称为一步二阶节点偏差分。

由于连续函数的高阶偏微分与顺序无关，所以本书作者认为高阶偏差分也与顺序无关。

关于二阶的偏差分的记号，现做以下说明。

当 $k_1\neq k_2$ 时，$\partial_{x_{k_1}}\partial_{x_2}$ 表示关于 x_{k_1}，x_{k_2} 的二阶偏差分，$\partial_{x_{k_1}}^{(r_1)}\partial_{x_{k_2}}^{(r_2)}$ 表示关于 x_{k_1} 和 x_{k_2} 的、步长系数分别为 r_1 和 r_2 的二阶偏差分，当 $r_1=r_2=r$ 表示关于 x_{k_1} 和 x_{k_2} 的、等步长系数的二阶偏差分，当 r_1,r_2 为整数时，称为二阶节点偏差分反之称为二阶非节点偏差分。当 $r_1=r_2=1$ 时称为一步二阶节点偏差分。设 r_1,r_2 为正数。$\partial_{x_{k_1}}^{(+r_1)}\partial_{x_{k_2}}^{(+r_2)}$ 表示关于 x_{k_1} 和 x_{k_2} 的步长系数分别为 r_1 和 r_2 的二阶向前偏差分，当 r_1,r_2 为正整数时，称为二阶节点向前偏差分，反之称为二阶非节点向前偏差分。当 $r_1=r_2=1$ 时称为一步二阶节点向前偏差分，$\partial_{x_{k_1}}^{(+r_1)}\partial_{x_{k_2}}^{(-r_2)}$ 表示关于 x_{k_1} 和 x_{k_2} 的、步长系数分别 r_1 和 r_2 的二阶 x_{k_1} 向前、x_{k_2} 向后偏差分，当 r_1,r_2 为正整数时，称为二阶节点 x_{k_1} 向前、x_{k_2} 向后偏差分，反之称为二阶非节点 x_{k_1} 向前、x_{k_2} 向后偏差分，当 $r_1=r_2=1$ 时称为一步二阶节点 x_{k_1} 向前、x_{k_2} 向后偏差分，$\partial_{x_{k_1}}^{(-r_1)}\partial_{x_{k_2}}^{(+r_2)}$ 表示表示关于 x_{k_1} 和 x_{k_2} 的、步长系数分别为 r_1 和 r_2 的二阶 x_{k_1} 向后、x_{k_2} 向前偏差分，当 r_1,r_2 为正整数时，称为二阶节点 x_{k_1} 向后、x_{k_2} 向前偏差分，反之称为二阶非节点 x_{k_1} 向后、x_{k_2} 向前偏差分。当 $r_1=r_2=1$ 时，称为一步二阶节点 x_{k_1} 向后、x_{k_2} 向前偏差分。$\partial_{x_{k_1}}^{(-r_1)}\partial_{x_{k_2}}^{(-r_2)}$ 表示关于 x_{k_1} 和 x_{k_2} 的、步长系数分别为 r_1 和 r_2 的二阶向后偏差分，当 r_1,r_2 为正整数时，称为二阶节点向后偏差分，反之称为二阶非节点向后偏差分。当 $r_1=r_2=1$ 时称为二阶节点向后偏差分。

如果 $k_1=k_2=k$，以上符号也可以简写成以下形式。

$\partial_{x_{k_1}}\partial_{x_{k_2}}$ 简写成 $\partial_{x_k^2}^2$；$\partial_{x_{k_1}}^{(r_1)}\partial_{x_{k_2}}^{(r_2)}$ 简写成 $\partial_{x_k^2}^{(r_1)(r_2)}$，当 $r_1=r_2=r$ 时简写成 $\partial_{x_k^2}^{(2r)}$，当 $r=1$ 时，$\partial_{x_k^2}^{(2r)}$ 记作 $\partial_{x_k^2}^{(2)}$；$\partial_{x_{k_1}}^{(+r_1)}\partial_{x_{k_2}}^{(+r_2)}$ 简写成 $\partial_{x_k^2}^{(+r_1)(+r_2)}$，当 $r_1=r_2=r$ 时 $\partial_{x_k^2}^{(+r_1)(+r_2)}$ 简写成 $\partial_{x_k^2}^{(+2r)}$，其中当 $r=1$ 时，$\partial_{x_k^2}^{(+2r)}$ 记作 $\partial_{x_k^2}^{(+2)}$；$\partial_{x_k^2}^{(+r_1)(-r_2)}$ 简写成 $\partial_{x_k^2}^{(+r_1)(-r_2)}$，当 $r_1=r_2=r$ 时 $\partial_{x_k^2}^{(+r_1)(-r_2)}$ 简写成 $\partial_{x_k^2}^{(+r)(-r)}$，其中当 $r=1$ 时，$\partial_{x_k^2}^{(+r)(-r)}$ 记作 $\partial_{x_k^2}^{(+-)}$；$\partial_{x_k^2}^{(-r_1)(+r_2)}$ 简写成 $\partial_{x_k^2}^{(-r_1)(+r_2)}$，当 $r_1=r_2=r$ 时 $\partial_{x_k^2}^{(-r_1)(+r_2)}$ 简写成 $\partial_{x_k^2}^{(-r)(+r)}$，其中当 $r=1$ 时，$\partial_{x_k^2}^{(-r)(+r)}$ 记作 $\partial_{x_k^2}^{(-+)}$；$\partial_{x_{k_1}}^{(-r_1)}\partial_{x_{k_2}}^{(-r_2)}$ 简写成 $\partial_{x_k^2}^{(-r_1)(-r_2)}$，当 $r_1=r_2=r$ 时 $\partial_{x_k^2}^{(-r_1)(-r_2)}$ 简写成 $\partial_{x_k^2}^{(-2r)}$，其中当 $r=1$ 时，$\partial_{x_k^2}^{(-r)(-r)}$ 记作 $\partial_{x_k^2}^{(-2)}$。

当 $k_1 \neq k_2$ 时，二阶偏差分包括四种类型，即：

$$\partial_{x_{k_1}}^{(+r_1)}\partial_{x_{k_2}}^{(+r_2)} f\left(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\dots,x_n^{(i)}\right) \quad \partial_{x_{k_1}}^{(+r_1)}\partial_{x_{k_2}}^{(-r_2)} f\left(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\dots,x_n^{(i)}\right)$$

$$\partial_{x_{k_1}}^{(-r_1)}\partial_{x_{k_2}}^{(+r_2)} f\left(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\dots,x_n^{(i)}\right) \quad \partial_{x_{k_1}}^{(-r_1)}\partial_{x_{k_2}}^{(-r_2)} f\left(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\dots,x_n^{(i)}\right)$$

当 $k_1 = k_2 = k$ 时，通常取 $r_1 = r_2 = r$，这时二阶偏差分的形式为：

$$\partial_{x_k}^{(+r)}\partial_{x_k}^{(+r)} f\left(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\dots,x_n^{(i)}\right) \quad \partial_{x_k}^{(+r)}\partial_{x_k}^{(-r)} f\left(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\dots,x_n^{(i)}\right)$$

$$\partial_{x_k}^{(-r)}\partial_{x_k}^{(+r)} f\left(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\dots,x_n^{(i)}\right) \quad \partial_{x_k}^{(-r)}\partial_{x_k}^{(-r)} f\left(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\dots,x_n^{(i)}\right)$$

由于二阶偏差分与顺序无关，所以 $k_1 = k_2 = k, r_1 = r_2 = r$ 时，偏差分只有三种形式。

在下面的表述中，为了简化符号，不管是二阶节点偏差分还是二阶非节点偏差分统一写成 $\partial_{x_{k_1}}\partial_{x_{k_2}} f\left(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\dots,x_n^{(i)}\right)$，当 $k_1 = k_2 = k$ 时写成 $\partial_{x_k}^2 f\left(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\dots,x_n^{(i)}\right)$。

定义 1.1.3 设存在多元函数 $f\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)$，其中 $\left(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\dots,x_n^{(i)}\right)$ 是 $f\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)$ 第 i 次差分的节点，记 $\partial_{x_1}^{(j_1)}\partial_{x_2}^{(j_2)}\dots\partial_{x_n}^{(j_n)} f\left(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\dots,x_n^{(i)}\right)$ 是 $f\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)$ 在点 $\left(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\dots,x_n^{(i)}\right)$ 处的 m 阶偏差分，$j_1 + j_2 + \dots + j_n = m$。则称：

$$\partial_{x_k}\left[\partial_{x_1}^{(j_1)}\partial_{x_2}^{(j_2)}\dots\partial_{x_k}^{(j_k)}\dots\partial_{x_n}^{(j_n)} f\left(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\dots,x_k^{(i)},\dots,x_n^{(i)}\right)\right]$$

$$\left[\partial_{x_1}^{(j_1)}\partial_{x_2}^{(j_2)}\dots\partial_{x_k}^{(j_k+1)}\dots\partial_{x_n}^{(j_n)} f\left(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\dots,x_k^{(i)},\dots,x_n^{(i)}\right)\right]$$

是 $f\left(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\dots,x_n^{(i)}\right)$ 在点 $\left(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\dots,x_n^{(i)}\right)$ 的 $m+1$ 阶偏差分。

下面给出一些具体的偏差分的构造方法以及具体的偏差分表达式。

设存在函数 $f\left(x,y\right)$ 为了方便 $f\left(x_i,y_j\right)$ 也写成 f_{ij} 或 $f_{(i,j)}$，当 $i = j$ 时，也写成 f_i，符号 $\partial_x f\left(x_i,y_i\right) = \partial_x f_{ii} = \partial_x f_i$，$\partial_y f\left(x_i,y_i\right) = \partial_y f_{ii} = \partial_y f_i$ 分别表示 $f\left(x,y\right)$ 在点 $\left(x_i,y_i\right)$ 处的一阶偏差分，向前向后的一阶偏差分的形式如下：

$$\partial_y^{(+r)} y_i = \partial^{(+r)} y_i = y_{i+r} - y_i \tag{1.1.1}$$

$$\partial_y^{(-r)} y_i = \partial^{(-r)} y_i = y_i - y_{i-r} \tag{1.1.2}$$

$$\partial_y^{(\pm r)} y_i = \partial^{(\pm r)} y_i = y_{i+r} - y_{i-r} \tag{1.1.3}$$

$$\partial_x^{(+r)} f(x_i, y_i) = f(x_{i+r}, y_i) - f(x_i, y_i) \tag{1.1.4}$$

$$\partial_x^{(-r)} f(x_i, y_i) = f(x_i, y_i) - f(x_{i-r}, y_i) \tag{1.1.5}$$

$$\partial_x^{(\pm r)} f(x_i, y_i) = f(x_{i+r}, y_i) - f(x_{i-r}, y_i) \tag{1.1.6}$$

$$\partial_y^{(+r)} f(x_i, y_i) = f(x_i, y_{i+r}) - f(x_i, y_i) \tag{1.1.7}$$

$$\partial_y^{(-r)} f(x_i, y_i) = f(x_i, y_i) - f(x_i, y_{i-r}) \tag{1.1.8}$$

$$\partial_y^{(\pm r)} f(x_i, y_i) = f(x_i, y_{i+r}) - f(x_i, y_{i-r}) \tag{1.1.9}$$

(1.1.1)，(1.1.4)，(1.1.7)是向前偏差分，(1.1.2)，(1.1.5)，(1.1.8)是向后偏差分。(1.1.3)，(1.1.6)，(1.1.9)是中心偏差分。当 r 为正整数时是节点偏差分。关于高阶偏差分的构造，以下给出一阶二阶偏差分的形式。

设存在函数 $f(x,y)$，则 $f(x,y)$ 在点 (x_i,y_i) 处的二阶偏差分 $\partial_{x^2}^{(2)} f(x_i,y_i)$，$\partial_x^{(1)}\partial_y^{(1)} f(x_i,y_i)$，$\partial_{y^2}^{(2)} f(x_i,y_i)$ 分别有以下形式。

$$\begin{aligned}\partial_{x^2}^{(2+)} f(x_i, y_i) &= \partial_x^{(+)}\left[f(x_{i+1}, y_i) - f(x_i, y_i)\right] \\ &= f(x_{i+2}, y_i) - 2f(x_{i+1}, y_i) + f(x_i, y_i)\end{aligned} \tag{1.1.10}$$

$$\begin{aligned}\partial_{x^2}^{(+-)} f(x_i, y_i) &= \partial_x^{(+)}\left[f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_i)\right] \\ &= f(x_{i+1}, y_i) - 2f(x_i, y_i) + f(x_{i-1}, y_i)\end{aligned} \tag{1.1.11}$$

$$\begin{aligned}\partial_{x^2}^{(-+)} f(x_i, y_i) &= \partial_x^{(-)}\left[f(x_{i+1}, y_i) - f(x_i, y_i)\right] \\ &= f(x_{i+1}, y_i) - 2f(x_i, y_i) + f(x_{i-1}, y_i)\end{aligned} \tag{1.1.12}$$

$$\begin{aligned}\partial_{x^2}^{(2-)} f(x_i, y_i) &= \partial_x^{(-)}\left[f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_i)\right] \\ &= f(x_i, y_i) - 2f(x_{i-1}, y_i) + f(x_{i-2}, y_i)\end{aligned} \tag{1.1.13}$$

$$\begin{aligned}\partial_{xy}^{(++)} f(x_i, y_i) &= \partial_x^{(+)}\left[f(x_i, y_{i+1}) - f(x_i, y_i)\right] \\ &= f(x_{i+1}, y_{i+1}) - f(x_{i+1}, y_i) - f(x_i, y_{i+1}) + f(x_i, y_i)\end{aligned} \tag{1.1.14}$$

$$\begin{aligned}\partial_{xy}^{(-+)} f(x_i, y_i) &= \partial_x^{(-)}\left[f(x_i, y_{i+1}) - f(x_i, y_i)\right] \\ &= f(x_i, y_{i+1}) - f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i+1}) + f(x_{i-1}, y_i)\end{aligned} \tag{1.1.15}$$

$$\begin{aligned}\partial_{xy}^{(+-)} f\left(x_i,y_i\right)&=\partial_x^{(+)}\left[f\left(x_i,y_i\right)-f\left(x_i,y_{i-1}\right)\right]\\&=f\left(x_{i+1},y_i\right)-f\left(x_{i+1},y_{i-1}\right)-f\left(x_i,y_i\right)+f\left(x_i,y_{i-1}\right)\end{aligned}\tag{1.1.16}$$

$$\begin{aligned}\partial_{xy}^{(--)} f\left(x_i, y_i\right)&=\partial_x^{(-)}\left[f\left(x_i, y_i\right)-f\left(x_i,y_{i-1}\right)\right]\\&=f\left(x_i, y_i\right)-f\left(x_i,y_{i-1}\right)-f\left(x_{i-1},y_i\right)+f\left(x_{i-1},y_{i-1}\right)\end{aligned}\tag{1.1.17}$$

$$\begin{aligned}\partial_{y^2}^{(2+)} f\left(x_i, y_i\right)&=\partial_y^{(+)}\left[f\left(x_i,y_{i+1}\right)-f\left(x_i, y_i\right)\right]\\&=f\left(x_i,y_{i+2}\right)-2f\left(x_i,y_{i+1}\right)+f\left(x_i, y_i\right)\end{aligned}\tag{1.1.18}$$

$$\begin{aligned}\partial_{y^2}^{(+-)} f\left(x_i, y_i\right)&=\partial_x^{(+)}\left[f\left(x_i, y_i\right)-f\left(x_i,y_{i-1}\right)\right]\\&=f\left(x_i,y_{i+1}\right)-2f\left(x_i, y_i\right)+f\left(x_i,y_{i-1}\right)\end{aligned}\tag{1.1.19}$$

$$\begin{aligned}\partial_{x^2}^{(-+)} f\left(x_i,y_i\right)&=\partial_x^{(-)}\left[f\left(x_i,y_{i+1}\right)-f\left(x_i,y_i\right)\right]\\&=f\left(x_i,y_{i+1}\right)-2f\left(x_i,y_i\right)+f\left(x_i,y_{i-1}\right)\end{aligned}\tag{1.1.20}$$

$$\begin{aligned}\partial_{x^2}^{(2-)} f\left(x_i,y_i\right)&=\partial_x^{(-)}\left[f\left(x_i,y_i\right)-f\left(x_i,y_{i-1}\right)\right]\\&=f\left(x_i,y_i\right)-2f\left(x_i,y_{i-1}\right)+f\left(x_i,y_{i-2}\right)\end{aligned}\tag{1.1.21}$$

以上是一阶二阶偏差分的构建方法与形式，仿以上做法可以得到更高阶的偏差分表达式。

下面约定几个记号。

$$\begin{aligned}\partial f_{(i,j)}^{[-r+r]}&=\left(\partial_x^{(-r)}+\partial_y^{(-r)}\right)f_i-\left(\partial_x^{(+r)}+\partial_y^{(+r)}\right)f_j\\&=\left[f\left(x_i,y_i\right)-f\left(x_{i-r},y_i\right)+f\left(x_i,y_i\right)+f\left(x_i,y_{i-r}\right)\right]\\&\quad-\left[f\left(x_{j+r},y_j\right)-f\left(x_j,y_j\right)+f\left(x_j,y_{j+r}\right)+f\left(x_j,y_j\right)\right]\end{aligned}\tag{1.1.22}$$

按照(1.1.18)的定义，下面是一些常用的符号。

$$\partial f_{(i,i-1)}^{[-r+r]}=\left(\partial_x^{(-r)}+\partial_y^{(-r)}\right)f_i-\left(\partial_x^{(+r)}+\partial_y^{(+r)}\right)f_{i-1}\tag{1.1.23}$$

$$\partial f_{(i,i-1)}^{[-1+1]}=\partial f_{(i,i-1)}^{[-+]}=\left(\partial_x^{(-)}+\partial_y^{(-)}\right)f_i-\left(\partial_x^{(+)}+\partial_y^{(+)}\right)f_{i-1}\tag{1.1.24}$$

设 $f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=f_i$，符号 $f_i^*\left(x_{j_1}\parallel y_{k_1},x_{j_2}\parallel y_{k_2},...,x_{j_m}\parallel y_{k_m}\right)$ 表示在 $f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ 中，x_{j_1} 变成 y_{k_1}，…，x_{j_m} 变成 y_{k_m}，除此之外其他变量跟 f_i 相同。符号“□”表示“从…变成…”。

定义 $f_i^*\left(x_{j_1}\parallel y_{k_1},x_{j_2}\parallel y_{k_2},...,x_{j_m}\parallel y_{k_m}\right)$ 是为了简化符号，可以使得一些表达式看起来更加简洁。

§1.2 一些计算公式介绍

下面介绍一下本书需要的一些计算公式。

本书的推导过程中需要用到 Taylor 公式，所以把 Taylor 公式介绍一下。单变量向前和向后的 Taylor 公式为

$$y(x_i+h)=y(x_i)+hy'(x_i)+\frac{h^2}{2!}y''(x_i)+\ldots+\frac{h^n}{n!}y^{(n)}(x_i)+O(h^{n+1}) \tag{1.2.1}$$

$$y(x_i-h)=y(x_i)-hy'(x_i)+\frac{h^2}{2!}y''(x_i)+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{h^n}{n!}y^{(n)}(x_i)+O(h^{n+1}) \tag{1.2.2}$$

(1.2.2)还可以写成以下形式。

$$y(x_i+h)=y(x_i)+hy'(x_i+h)-\frac{h^2}{2!}y''(x_i+h)+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{h^n}{n!}y'^{(n)}(x_i+h)+O(h^{n+1}) \tag{1.2.3}$$

(1.2.1)和(1.2.3)还可以写成以下形式

$$y_{i+1}=y_i+hy_i'+\frac{h^2}{2!}y_i''+\ldots+\frac{h^n}{n!}y_i^{(n)}+O(h^{n+1}) \tag{1.2.4}$$

$$y_{i+1}=y_i+hy_{i+1}'-\frac{h^2}{2!}y_{i+1}''+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{h^n}{n!}y_{i+1}^{(n)}+O(h^{n+1}) \tag{1.2.5}$$

多变量向前和向后的 Taylor 公式为

$$\begin{aligned}u\left(x_1^{(i)}+h_1,\ldots,x_m^{(i)}+h_m\right)&=u\left(x_1^{(i)},\ldots,x_m^{(i)}\right)\\&+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+h_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^k u\left(x_1^{(i)},\ldots,x_m^{(i)}\right)+O(h^{n+1})\end{aligned} \tag{1.2.6}$$

$$\begin{aligned}u\left(x_1^{(i)}+h_1,\ldots,x_m^{(i)}+h_m\right)&=u\left(x_1^{(i)},\ldots,x_m^{(i)}\right)\\&+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+h_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^k u\left(x_1^{(i+1)},\ldots,x_m^{(i+1)}\right)+O(h^{n+1})\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

本书介绍的新方法的计算涉及插值，所以下面介绍一下需要的插值方法。

设存在 $n+1$ 个节点 $x_0,x_1,\ldots,x_n$，其对应的值为 $y_0,y_1,\ldots,y_n$ 则 Lagrange 插值多项式的一般形式为：

$$y_n(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_0)\dots(x_1-x_n)}y_1+\dots+\frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})}y_n \tag{1.2.8}$$

当$n=2$时，采用x_i，x_{i+1}作为插值点进行计算，(1.2.8)的一般形式为：

$$y(x)=\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}y_i+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}y_{i+1}=\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}y_{i+1}+\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}y_i \tag{1.2.9}$$

设，$x_{i+1}-x_i=h$，(1.2.9)有以下几种形式。

(1) 两点向前外插公式

当$x>x_{i+1}$时，且满足$x-x_{i+1}=rh$，这时插值公式为：

$$y=-\frac{x-x_{i+1}}{h}y_i+\frac{x-x_i}{h}y_{i+1}=-\frac{x-x_{i+1}}{h}y_i+\left(1+\frac{x-x_{i+1}}{h}\right)y_{i+1}=(1+r)y_{i+1}-ry_i \tag{1.2.10}$$

(2) 两点内差公式

当$x_i<x<x_{i+1}$时，且满足$x-x_i=rh$这时插值公式为：

$$y=-\frac{x-x_{i+1}}{h}y_i+\frac{x-x_i}{h}y_{i+1}=(1-r)y_i+ry_{i+1} \tag{1.2.11}$$

(3) 两点向后外插公式

当$x<x_i$时，且满足$x-x_{i-1}=rh$，则插值公式为：

$$y=-\frac{x-x_{i+1}}{h}y_i+\frac{x-x_i}{h}y_{i+1}=\left(1+\frac{x_i-x}{h}\right)y_i-\frac{x_i-x}{h}y_{i+1}=(2-r)y_i-(1-r)y_{i+1} \tag{1.2.12}$$

如果$x_i-x=rh$，这时插值公式为：

$$y=-\frac{x-x_{i+1}}{h}y_i+\frac{x-x_i}{h}y_{i+1}=\left(1+\frac{x_i-x}{h}\right)y_i-\frac{x_i-x}{h}y_{i+1}=(1+r)y_i-ry_{i+1} \tag{1.2.13}$$

当$n=3$时，采用x_{i-1}，x_i，x_{i+1}作为插值点进行计算，(1.2.8)的一般形式为：

$$y(x)=\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}y_{i-1}+\frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}y_i+\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}y_{i+1} \tag{1.2.14}$$

假设$x_{i+1}-x_i=x_i-x_{i-1}=h$，(1.2.14)有以下几种形式。

(1) 三点向前外插公式

当 $x > x_{i+1}$ 时，设 $x - x_{i+1} = rh$，这时插值公式为：

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}y_{i-1} + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}y_i + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}y_{i+1} \\
&= \frac{(1+r)h(rh)}{(-h)(-2h)}y_{i-1} + \frac{(2+r)h(rh)}{h(-h)}y_i + \frac{(2+r)h(1+r)h}{(2h)(h)}y_{i+1} \\
&= \frac{1}{2}r(1+r)y_{i-1} - r(2+r)y_i + \frac{1}{2}(1+r)(2+r)y_{i+1}
\end{aligned}
\tag{1.2.15}
$$

(2) 三点内插公式(一)

当 $x_i < x < x_{i+1}$ 时，称为向前内插，设 $x - x_i = rh$，则有 $x_{i+1} - x = (1-r)h$，这时插值公式为：

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}y_{i-1} + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}y_i + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}y_{i+1} \\
&= \frac{rh(-(1-r)h)}{-h(-2h)}y_{i-1} + \frac{(1+r)h(-(1-r)h)}{h(-h)}y_i + \frac{(1+r)h(rh)}{2h(h)}y_{i+1} \\
&= -\frac{1}{2}r(1-r)y_{i-1} + (1+r)(1-r)y_i + \frac{1}{2}r(1+r)y_{i+1}
\end{aligned}
\tag{1.2.16}
$$

(3) 三点内插公式(二)

当 $x_{i-1} < x < x_i$ 时，称为向后内插，设 $x - x_{i-1} = rh$，则有 $x_i - x = (1-r)h$，这时插值公式为：

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}y_{i-1} + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}y_i + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}y_{i+1} \\
&= \frac{(1-r)h(-(2-r)h)}{-h(-2h)}y_{i-1} + \frac{rh(-(2-r)h)}{h(-h)}y_i + \frac{rh(-(1-r)h)}{2h(-h)}y_{i+1} \\
&= \frac{1}{2}(1-r)(2-r)y_{i-1} + r(2-r)y_i - \frac{1}{2}r(1-r)y_{i+1}
\end{aligned}
\tag{1.2.17}
$$

(4) 三点向后外插公式

当 $x_{i-2} < x < x_{i-1}$ 时，设 $x - x_{i-2} = rh$，这时插值公式为：

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}y_{i-1} + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}y_i + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}y_{i+1} \\
&= \frac{-(2-r)h(-(3-r)h)}{(-h)(-2h)}y_{i-1} + \frac{-(1-r)h(-(3-r)h)}{h(-h)}y_i + \frac{-(1-r)h(-(2-r)h)}{2hh}y_{i+1} \\
&= \frac{1}{2}(2-r)(3-r)y_{i-1} - (1-r)(3-r)y_i + \frac{1}{2}(1-r)(2-r)y_{i+1}
\end{aligned}
\tag{1.2.18}
$$

当 $n=4$ 时，采用 $x_{i-1},x_i,x_{i+1},x_{i+2}$ 作为插值点进行计算，(1.2.8)的一般形式为：

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})(x_{i-1}-x_{i+2})}y_{i-1} + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+2})}y_i \\
&+ \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+2})}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i+2})}y_{i+1} + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+2}-x_{i-1})(x_{i+2}-x_i)(x_{i+2}-x_{i+1})}y_{i+2}
\end{aligned}
\tag{1.2.19}
$$

(1.2.19)有以下具体形式。

(1) 四点向前外插公式

当 $x_{i+2}<x<x_{i+3}$ 时，设 $x-x_{i+2}=rh$，这时插值公式为：

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})(x_{i-1}-x_{i+2})}y_{i-1} + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+2})}y_i \\
&+ \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+2})}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i+2})}y_{i+1} + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+2}-x_{i-1})(x_{i+2}-x_i)(x_{i+2}-x_{i+1})}y_{i+2} \\
&= \frac{(2+r)h(1+r)h(rh)}{(-h)(-2h)(-3h)}y_{i-1} + \frac{(3+r)h(1+r)h(rh)}{(h)(-h)(-2h)}y_i \\
&+ \frac{(3+r)h(2+r)h(rh)}{(2h)(h)(-h)}y_{i+1} + \frac{(3+r)h(2+r)h(1+r)h}{(3h)(2h)(h)}y_{i+2} \\
&= -\frac{(2+r)(1+r)r}{6}y_{i-1} + \frac{(3+r)(1+r)r}{2}y_i \\
&- \frac{(3+r)(2+r)r}{2}y_{i+1} + \frac{(3+r)(2+r)(1+r)}{6}y_{i+2}
\end{aligned}
\tag{1.2.20}
$$

(2) 四点内插公式(向前内插公式)

当 $x_{i+1}<x<x_{i+2}$ 时，设 $x-x_{i+1}=rh$，这时插值公式为：

$$
\begin{aligned}
y(x)=&\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})(x_{i-1}-x_{i+2})}y_{i-1}+\frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+1})}y_i\\
&+\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+2})}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i+2})}y_{i+1}+\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+2}-x_{i-1})(x_{i+2}-x_i)(x_{i+2}-x_{i+1})}y_{i+2}\\
=&\frac{(1+r)h(rh)(-(1-r)h)}{(-h)(-2h)(-3h)}y_{i-1}+\frac{(2+r)h(rh)(-(1-r)h)}{(h)(-h)(-2h)}y_i\\
&+\frac{(2+r)h(1+r)h(-(1-r)h)}{(2h)(h)(-h)}y_{i+1}+\frac{(2+r)h(1+r)h(rh)}{(3h)(2h)(h)}y_{i+2}\\
=&\frac{(1+r)r(1-r)}{6}y_{i-1}-\frac{(2+r)r(1-r)}{2}y_i\\
&+\frac{(2+r)(1+r)(1-r)}{2}y_{i+1}+\frac{(2+r)(1+r)r}{6}y_{i+2}
\end{aligned}
\tag{1.2.21}
$$

(3) 四点内插公式(中间内插公式)

当 $x_i<x<x_{i+1}$ 时，设 $x-x_i=rh$，这时插值公式为：

$$
\begin{aligned}
y(x)=&\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})(x_{i-1}-x_{i+2})}y_{i-1}+\frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+1})}y_i\\
&+\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+2})}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i+2})}y_{i+1}+\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+2}-x_{i-1})(x_{i+2}-x_i)(x_{i+2}-x_{i+1})}y_{i+2}\\
=&\frac{(rh)(-(1-r)h)(-(2-r)h)}{(-h)(-2h)(-3h)}y_{i-1}+\frac{(1+r)h(-(1-r)h)(-(2-r)h)}{(h)(-h)(-2h)}y_i\\
&+\frac{(1+r)h(rh)(-(2-r)h)}{(2h)(h)(-h)}y_{i+1}+\frac{(1+r)h(rh)(-(1-r)h)}{(3h)(2h)(h)}y_{i+2}\\
=&-\frac{r(1-r)(2-r)}{6}y_{i-1}+\frac{(1+r)(1-r)(2-r)}{2}y_i\\
&+\frac{(1+r)r(2-r)}{2}y_{i+1}-\frac{(1+r)r(1-r)}{6}y_{i+2}
\end{aligned}
\tag{1.2.22}
$$

最后介绍 Hermite 插值。设存在 $n+1$ 个节点，其对应的值及其导数的值为：

$$y_1,y_2,\dots,y_n\quad y_0',y_1',\dots,y_n'$$

则 Hermite 插值公式的一般形式为：

$$y=\sum_{i=0}^{n}h_i(x)y_i+\sum_{i=0}^{n}g_i(x)y_i'(x) \tag{1.2.23}$$

其中：

$$h_i(x)=\left[1-2(x-x_i)\sum_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{n}\frac{1}{x_i-x_j}\right]\prod_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{n}\left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right)^2,\quad g_i(x)=(x-x_i)\prod_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{n}\left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right)^2$$

§1.3 一些定理介绍

下面介绍几个本书需要的定理。

定理 1.3.1 设存在实系数一元二次方程：

$$ax^2+bx+c=0 \tag{1.3.1}$$

则有以下结论：当$a>0$时，(1.3.1)根的模小于等于的 1 充要条件有以下两种写法：

(1) $a-c\geq 0$； $a+c\geq 0$； $a+b+c\geq 0$； $a-b+c\geq 0$。

(2) $|c|\leq a(-a\leq c\leq a)$； $|b|\leq a+c(-a-c\leq b\leq a+c)$。

以上两个条件的写法等价，如果要求根的模小于 1，只要把小于等于号和大于等于号改成小于号和大于号即可。当$a=1$时，以上条件可以写成：

(1) $1-c\geq 0$； $1+c\geq 0$； $1+b+c\geq 0$； $1-b+c\geq 0$。

(2) $|c|\leq 1(-1\leq c\leq 1)$； $|b|\leq 1+c(-1-c\leq 1+c)$。

定理 1.3.2 设存在实系数一元三次方程：

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \tag{1.3.2}$$

设$a>0$，则(1.3.2)根的模小于等于 1 的充要条件为：

(1) $a+d\geq 0$； (2) $a-d\geq 0$； (3) $a+b+c+d\geq 0$；

(4) $a-b+c-d\geq 0$； (5) $a^2-ac+bc-d^2\geq 0$。

如果要求根的模小于 1，只要把大于等于号改成大于号即可。

当$a=1$时，以上条件可以写成：

(1) $1+d\geq 0$；(2) $1-d\geq 0$；(3) $1+b+c+d\geq 0$；

(4) $1-b+c-d\geq 0$；(5) $1-c+bd-d^2\geq 0$。