前言

光滑映射的奇点理论研究内容丰富, 与许多数学的其它分支, 如微分几何、微分拓扑、分歧理论、动力系统、微分方程、几何光学等互相影响并在这些领域有许多应用. 近几十年来一直是数学研究领域中的一个非常活跃的研究方向. 奇点理论与微分几何的关系尤为密切, 一方面, 奇点理论在微分几何学中的运用使得那些曾经令数学工作者感觉迷茫的一大类包含奇点的子流形的研究成为了可能; 另一方面, 从微分几何的角度研究子流形在奇点临近的几何性质和识别奇点也进一步地促进了奇点理论自身的完善和发展, 这两者的结合取得了丰硕的成果[1−3,9−22,25−28,30−32,36,38−54,60,65−75,77−79,82−89,92−96]. 典型的工作是对欧氏空间中的下列几何对象的奇点的系统研究和刻画: 平面曲线的渐屈线、对偶、垂足曲线、平行曲线和闭曲线的对称集; 曲面的高斯映射、对偶曲面、垂足曲面、焦曲面、平行曲面和波阵面等. 我们知道, Gauss首先引进了空间中定向曲面的球面像, 即高斯映射的概念, 并系统的研究了曲面的内蕴微分几何学. 他一直想研究曲面上高斯曲率为零的点的临近处的高斯映射的几何性质, 但受到当时数学理论发展的局限, 无果而终. Hilbert 和 Cohn-Vossen 也仅仅讨论了个别特殊曲面的高斯映射在抛物点临近的几何性质[10]. 随着数学理论的发展, 出现了专门研究奇点的数学理论即奇点理论. 奇点理论作为微分学的继承者, 成为了研究子流形的奇异性质的有效工具, 它在一定程度上促进了数学、物理、工程等与几何学密切相关的多个学科的发展, 渐渐地成为了这些学科中的一盏指路明灯[22]. 奇点理论在几何学领域的充分应用所取得的突破性成果是五十年前的数学家很难想象得到的. 就好比电子计算机在过去数十年中已经把很魔幻的梦想变为现实, 计算机与应用数学的结合使我们的世界变成了一个数字化世界, 解决了现实世界的许多复杂问题. 同样, 在奇点理论的帮助下, 高斯映射在奇点临近的神秘面纱终于在许多数学家的努力下被揭开. 他们是 Zakalukin、Romero-Fuster、Bruce、Arnold、Looijenga、Bleeker、Wilson、Kergosien 和 Thom 等[10]. 1982 年, Banchoff、Gaffeney 和 Mccrory[10] 总结和发展了这些成果. 他们利用奇点理论对曲面的高斯映射在奇点临近的几何性质给出了系统的刻画, 并通过一些典型例子实现了它们的可视化. 大量的研究成果表明, 对于研究那些复杂的奇异子流形, 奇点理论几乎总是可以提供一些线索, 显示出了非凡的威力. 本书是应用奇点理论研究子流形的几何性质的进一步发展.

最初推动数学家们重新审视古典微分几何的正是法国数学家, Fields 奖获得者 Thom. 他是突变论的开创者, 他选择了三维欧氏空间中的二维曲面在脐点处所对应的焦曲面的奇点来描述突变论中的D_4^+、 D_4^- 和 D_5 等突变模型. 正是由于这三类模型的分歧集合与曲面的椭圆型脐点、双曲型脐点和抛物型脐点临近的焦曲面之间存在微分同胚关系, Thom 给它们取了非常形象的名字. 除此之外, 根据分歧集对应的子流形的形状, 称 A_2为折叠、A_3 为尖点、A_4 为燕尾、A_5 为蝴蝶. 这七种模型与 Arnold 得到的关于单纯型奇点的完整分类(除了 A_k, $k>5$, $D_k^{\pm}$, $k>5$, $E_6^{\pm}$, E_7, E_8) 中的部分代表元完全相同. 同样, 单纯型奇点的发现是经过许多数学家的努力之后才最终形成的. 它们出

现在许多伟大的数学工作者的工作之中, 诸如 Klein、Duval 、Kirby、Artin、Brieskorn、Tjurina 和 Arnold 等[22]. 然而, 将这些函数视作没有模的函数的观点当属 Arnold, 他在这一领域发表了许多深奥的工作. 奇点理论与函数极值理论密切相关, 与之相关的早期研究成果有起源于 20 世纪三十年代的 Morse 理论[74], 在该理论中 Morse 利用曲面上的实值高度函数刻画了曲面的拓扑性质, 和 Whitney 的微分流形的浸入和嵌入理论. 直到1955年, Whitney[93] 的研究表明平面到平面之间的稳定映射的奇点仅包含折叠和尖点两种类型, 而其它更复杂的奇点在某些小的扰动之后都会变为这两种类型的奇点. 这两种奇点在我们周围随处可见, 比如在人的面部轮廓中总可以看见折叠和尖点. 事实上, 我们总是在无意识的应用奇点来区别不同人或者物, 这恰恰是因为子流形的特征被它的奇点所刻画和区分. Whitney 的这篇文章被认为是奇点理论作为一个独立的研究方向的标志性文章. 而 Thom 正是在这一研究工作的启迪之下, 搭建了奇点理论研究的理论框架, 进一步发展和完善了奇点理论. 他提出了描述稳定性的横截性定理, 并将其当成研究奇点的系统工具; 他还引进了在奇点理论研究中极为重要的开折的概念. 包含函数 $f(x)$ 的函数族 $F(x,\mathbf{u})$ 被称为开折, 与 $f(x)$ 的所有开折都稳定的 $\mathcal{R}^+$-等价的开折被称为 $\mathcal{R}^+$-通有开折; 借助于参数变化, 通有开折能刻画出所有与函数 $f(x)$ 临近的函数们的性态变化. 从另外一个角度谈开折则更为形象, 开折可以把函数 $f(x)$ 的那些重叠的临界点用扰动的方式分离开来, 这种被分离出来的临界点具体出现在与 $f(x)$ 临近的函数中, 从而发现比原来显示的要丰富得多的类型范围. 这就好比让花蕾慢慢绽放, 从而显露出漂亮的花朵. 比如, 在原点临近定义的具有 A_k-型奇点的单变量函数 $f(x)=x^{k+1}$. 容易知道, 零点是它的 k 个相互重合的不稳定的临界点. 我们可以借助它的 $k-1$ 个参数的扰动 $F(x,u_1,\cdots u_{k-1})=x^{k+1}+u_1x^{k-1}+u_2x^{k-2}+\cdots+u_{k-1}x$ 把它们完全分离出来. 这个扰动获得的函数的临界点是稳定的并且与该函数的临界点的类型相同. 这样, 便将这个具有不稳定的临界点的函数嵌入到了具有稳定临界点的函数族中. 这种具有稳定奇点的函数族正是通有开折, 而参数最少的通有开折称为万有开折. 可以证明, 具有相同奇点的万有开折是等价的, 它们的判别式集合或者分歧集合彼此微分同胚. 这便是对光滑映射的奇点和通有子流形的奇点进行分类的理论根源之所在. 1968 年到 1971 年, Mather 在 Thom 关于奇点理论研究的框架之下, 系统的利用万有开折作为工具奠定了奇点理论的基础. Mather 的论文中包含了他本人关于稳定性定理、有限决定性以及光滑映射在五种等价群下的分类等重要成果. 与此同时, 1967年, Arnold 在奇点理论和 Lagrange、Hamilton 关于动力系统的研究工作的启发下, 利用辛几何和切触几何这对互补的理论引入了分别与之对应的 Lagrangian 流形和 Legendrian 流形的概念. 后来在以他为首的苏联学派的努力下分别发展成了现在的 Lagrangian 奇点理论和 Legendrian 奇点理论并在奇点分类和应用方面取得了许多辉煌的成就[1−3]. 通常情况下, Lagrangian 奇点理论被视作研究焦散面和欧氏空间中超曲面的高斯映射的通有奇点的有力工具, 而 Legendrian 奇点理论则被视为处理波前或者平行曲面的通有奇点的数学工具. 这两种奇点理论都可以从生成族的角度进行刻画, 而典型的生成族恰恰是单纯型奇点的万有开折. 现在, 它们已经被广泛的应用到 Minkowski 空间、双曲空间、de Sitter 空间、光锥及 Anti de Sitter 空间中的子流形的通有奇点的刻画和研究之中[25−28,32,36,38−54,60,77,94−96].

利用奇点理论研究子流形的几何性质的思想始于 20 世纪六十年代. Thom[90] 在他的著作中首先提出了将突变理论的模型应用于欧氏空间中曲线和曲面的几何性质的研究中. 他指出, 研究子流形的奇异性质或者几何性质, 可以考虑作用在它上面的群或者映射的奇异性, 这与子流形的性质之间存在着一些对应. 在这一思想的指引下, Porteous[78] 在 1971 年发表的一篇文章中, 对曲面在脐点临近的几何性质给出了深刻的研究. 众所周知, 正则曲面在脐点临近的几何性质是最为丰富和令数学家们着迷的. 脐点是那些满足两个主曲率相等的点, 这意味着在脐点临近, 曲面的形状最接近球面和平面. 正是在对曲面的脐点的研究中, Porteous 提出了曲面的峰点和峰线等被微分几何学家所忽视的重要概念. 然而, 这些对象对于构造地质学家并不陌生, 曾经被 Ramsay 在 1967 年视作

褶皱岩层的铰链线, 另一个应用出现在诺贝尔生理学奖获得者 Gullstrand 关于眼球晶状体的调节功能的研究工作中. 为此, 他不得不开发四阶微分几何去解释所遇到的一些光学现象. 另外, 它们还被应用到了人脸识别和解释大脑表面的核磁共振扫描获得的图像[79]. 1974 年, Looijenga[71]证明了横截性定理. 1976 年, Wall 在一篇综述性文章中介绍了奇点理论在几何学中的某些应用, 之后涌现出了许多可喜成果, 尤其是 Arnold、Bruce、Giblin、Banchoff、Gaffeney 和 Mccrory 的工作, 并出现了系统的介绍奇点理论及其应用的著作, 如[1−3,22,34,79]等. 从此, 关于奇点的研究有了迅速的发展. 到目前为止, 奇点理论已经应用于分歧理论、动力系统、微分几何、微分方程、几何光学等学科的研究, 取得了大量的优秀成果. 关于子流形的奇点的研究当属这些成果中最为丰富和重要的内容之一. 代表性的工作有 Porteous、Bruce 和 Giblin 等从奇点理论的视角对欧氏空间的中的子流形的系统研究[10−22,72−73,78−79,]. 他们讨论了奇点的稳定性和奇点与子流形的几何不变量之间的关系. 裴东河教授和 Izumiya 教授开创性的应用奇点理论对非欧氏几何中子流形的几何性质的研究[25−28,32,36,38−54,60,77,94−96]. 他们应用 Lagrangian 和 Legendrian 奇点理论广泛的研究了 Minkowski 空间及其子空间的子流形的奇点分类, 并取得了丰硕的成果. 最近, 裴东河教授和王志刚博士解决了一些类光子流形的奇点分类问题, 该问题属于奇点理论应用研究中一直回避的难题之一.

半欧氏空间中子流形的奇点的探索和研究正在成为奇点理论应用研究中的一个热点问题, 这项研究与 Legendrian 对偶定理密切相关. Izumiya 首先发表了他关于 de Sitter 空间中的类时超曲面及 Minkowski 空间中伪球之间的 Legendrian 对偶定理的研究工作[38−39]. 2009 年, 陈亮等证明了广义半欧氏空间中的 Legendrian 对偶定理并利用它对 Anti de Sitter 空间中子流形的微分几何性质做了系统研究[25−28]. 2012 年, Izumiya 等建立了 Lorentzian-Minkowski 空间中的单参数族伪球之间的 Legendrian 对偶定理并利用它们研究了伪球上的浸入子流形的斜几何[53−54]. 相关研究表明, Legendrian 对偶在研究伪欧氏空间中子流形的外在微分几何性质中起着核心作用. 我们[64]曾经利用 Legendrian 对偶定理对 n 维 Anti de Sitter 空间中类空超曲面的外在微分几何性质进行了研究, 这项成果发表在《中国科学：数学》上. 最近, Legendrian 对偶定理被很好地应用于某些子流形的几何性质的研究中, 尤其是球面子流形的光锥对偶和光锥中的类空超曲面及双曲空间中某些子流形的相关研究[41−43]. 本书中, 我们要解决的第一个问题就是证明广义半欧氏空间中的单参数族伪球之间的 Legendrian 对偶定理. 为此, 我们构造了对应的二重纤维丛之间的全部微分同胚映射. 我们还应用 Legendrian 对偶定理和 Legendrian 奇点理论研究了 n 维 Anti de Sitter 空间中的 Lorentzian 超曲面, 伪球 S_2^n 中 Lorentzian 超曲面及 nullcone 中 Lorentzian 超曲面的外在微分几何性质. 这些几何对象的法空间在局部上同构于二维 Lorentzain 平面, 我们可以利用 Legendrian 对偶定理证明它们都存在 nullcone 高斯映射和 φ-伪球高斯映射. 对于指标为 2 的伪欧氏空间中的三维 Lorentzian 超曲面, 我们应用 Lagrangian 奇点理论解决了它的 Anti de Sitter 高斯映射的奇点分类问题.

De Sitter 空间是一种具有正的常截面曲率的 Lorentzian 空间, 是广义相对论中的重要时空模型. 这使得研究这一空间中的子流形的几何性质变得更具有理论意义. 在这样的背景下, 我们结合 Legendrian 对偶, 研究了三维 de Sitter 空间中类空曲线的对偶曲面的奇点分类问题. 有意思的是, 从该类空曲线出发, 可以构造两个不同的嵌入到三维光锥中的类空曲面, 我们分别称为第一光锥对偶曲面和第二光锥对偶曲面. 我们的研究表明, 第一光锥对偶曲面是包含奇点的曲面, 而第二光锥对偶曲面则是一个正则曲面. 为了刻画第一光锥对偶曲面的奇点, 我们构造了与之对应的光锥高度函数族并找到了它具有 A_k-型奇点的条件, 其中 $k=1,2,3$. 事实上, 这些条件等价于第一光锥对偶曲面与某个模型曲面(抛物伪球面)具有 A_k-型切触. 同时, 第一光锥对偶曲面恰好为这个光锥高度函数的判别式集合. 这样, 在满足通有条件的情况下, 利用 Bruce 奇点分类定理便证明了第一光锥对偶曲面的奇点类型为尖点棱或者燕尾. 我们还研究了该类空曲线的第一双曲对偶曲面和第二双曲对偶曲面的性质. 在 Legendrian 对偶定理的帮助下, 我们揭示了类空曲线和这些曲面之间的对偶关系. 通过对光

锥高度函数和类时高度函数的研究, 我们发现了刻画第一光锥对偶曲面和第一双曲对偶曲面的奇点的几何不变量. 最后, 我们给出了一个具体的例子.

1975 年, 英国数学家 Bishop[23] 提出了空间曲线的相对平行标架场, 也称为 Bishop 标架. 后来该标架被广泛的应用到了计算机工程制图和 DNA 形状模拟的相关问题的研究之中. 例如, 可以用 Bishop 标架场定义的曲线来模拟 DNA 序列组成的形状信息[29]. Bishop 标架场也可以提供一种新的方式来控制计算机动画的虚拟摄像头[37,81]. 也有很多学者试图利用相对平行标架场来刻画曲线和曲面的若干古典微分几何性质[6−8,55−59,61,76,89,91,97−100]. 他们分别在欧氏空间[6−7,23,57−59,91,99−100], Minkowski 空间[8,56,76,89,97−98], 对偶空间[55]以及 Heisenberg 群[61]中研究了与这类标架场相关的几何对象的微分几何性质. 在 Bishop的研究工作的启发下, Yilmaz 和 Turgut[99] 将空间曲线的副法向量作为两个标架场的公共向量, 引进了另外的一种新的标架场并称之为二型 Bishop 标架. 同时, 他们也引进了两种新的球面像并称之为二型 Bishop 球面像. 我们知道, 几何对象的性质不依赖于坐标系的选取. 但是, 引入了 Bishop 标架之后, 使得一些非常重要的几何对象的研究成为了可能, 如 Bishop 球面像、Bishop Darboux 像和二型 Bishop 球面像等. 尽管从古典微分几何的角度来看, 研究人员已经对 Bishop 球面像和二型 Bishop 球面像的几何性质进行了很系统的研究. 但是, 对于它们包含奇点的情形却没有给出很好的解释和研究. 事实上, 从他们的研究[99]中看, Bishop 球面像和二型 Bishop 球面像是存在奇点的. 两个自然的问题是, 它们的奇点类型是什么和如何判断这些类型的奇点, 这是我们主要想解决的部分问题. 另一方面, 这些几何对象的参数方程的表达形式非常复杂, 采用通常的方式去计算它们的奇点很困难. 受 Bishop[23]、Yilmaz 和 Turgut[99]以及 Pei 与 Wang[95]等人的研究工作的启发, 我们利用三维欧氏空间中的球面 Legendrian 对偶[75]和奇点理论刻画了这些奇点存在的充分条件. 在 Legendrian 对偶的帮助下, 我们发现曲线的两个第一型 Bishop 球面像是彼此对偶的, 两个第二型 Bishop 球面像也是彼此对偶的. 而对于 Frenet 曲线而言, 它的切球面像和副法向量构成的球面像是彼此对偶的. 应用奇点理论, 我们将 Bishop 球面像和二型 Bishop 球面像解释成了某些函数的开折对应的判别式集合. 我们发现它们的奇点与 Bishop 曲率和二型 Bishop 曲率密切相关. 具体的, Bishop 球面像的奇点与 Bishop 曲率等于零而一阶微商不为零的点相对应. 利用类似的研究方法, 经过复杂的计算, 我们还研究了 Bishop球面 Darboux像、Bishop 对偶曲面和 Bishop 直纹曲面的奇点分类问题. 为此, 我们构造了另外一些函数族, 这些函数族的分歧集或判别式集合恰好对应于 Bishop 球面 Darboux 像、 Bishop 对偶曲面或者 Bishop直纹曲面. 同时, 我们还得到了 Bishop 斜螺线的一些几何性质. 最后, 我们给出了两个具体的例子, 并利用Maple实现这些几何对象的可视化. 2008 年, Özdemir 和 Ergin[76] 在裴东河教授[77] 关于非类光曲线的研究工作的基础上, 将相对平行标架场推广到 Minkowski 空间中的非类光曲线上. 此后, 出现了许多关于相对平行向量场下与非类光曲线相关的曲线和曲面的几何性质的研究工作. 比较典型的工作有 Karacan 与 Bükcü[56] 关于类时曲线的管状曲面的研究工作和 Yüksel[100]关于三维 Minkowski 空间中由 Bishop 标架构造的直纹曲面的微分几何性质的研究工作.

本书共分为八章.

第一章主要介绍 Legendrian 奇点理论和 Lagrangian 奇点理论的一些基本概念和结论.

第二章证明了伪欧氏空间中单参数族伪球之间的 Legendrian 对偶定理, 并应用它和 Legendrian 奇点理论研究了三种伪球上的 Lorentzian 超曲面的几何性质. 最后, 解决了半四维欧氏空间中的 Lorentzian 超曲面的 Anti de Sitter 高斯映射的奇点分类问题.

第三章主要利用 Minkowski 空间中伪球之间的 Legendrian 对偶定理和奇点理论, 解决了三维 de Sitter 空间中的类空曲线的光锥对偶曲面和双曲对偶曲面的奇点分类问题.

第四章主要利用外微分和奇点理论, 解决了四维Anti de Sitter空间中类空曲面的null超曲面的奇

点分类问题.

第五章主要利用三维欧氏空间中的球面 Legendrian 对偶刻画了正则曲线的球面指标线之间的对偶关系. 依据相对平行标架场和奇点理论, 解决了 Bishop 球面 Darboux 像、Bishop 球面指标线、Bishop 对偶曲面及 Bishop 直纹曲面的奇点分类问题. 我们还得到了 Bishop 斜螺线的一些性质. 最后, 我们给出了两个具体例子.

第六章主要利用奇点理论研究了n维Anti de Sitter空间中的类空超曲面,介绍了类空超曲面的局部微分几何,定义了类时Anti de Sitter高斯像及Anti de Sitter高度函数,并进一步的利用Anti de Sitter高度函数族和流形间的切触理论研究了类时Anti de Sitter高斯像的几何意义及类空超曲面的通有性.最后研究了类空超曲面的AdS-Monge型.

第七章介绍了四维Minkowski空间中类空超曲面的局部理论,定义了类空超曲面上的双曲高斯映射,双曲高度函数及距离平方函数,并应用Arnold等建立的Lagrange奇点理论对类空超曲面的双曲高斯映射的奇点进行了分类.

第八章主要介绍四维Minkowski空间中类空曲面的LS_r高斯映射的基本概念, 定义了LS_r高度函数族并刻画了它的性质,从切触理论和Lagrangian奇点理论的视角研究了类空曲面的性质.

本书得到了黑龙江省自然科学基金(No. LH2021A020)和中央财政支持地方人才培养项目(No. ZYQN2019071) 的部分资助,作者借此机会表示感谢.

刘海明

haiming0626@126.com

2023年04月