# 前 言

根号是解整式方程所要用的数学符号。根据阿贝尔的证明和 Galois 的群论，一般五次及五次以上代数方程没有公式解，即用根式去求解一般五次及五次以上方程的公式解的道路是不存在的[1]。作者究其原因有二：一是正整数次方根的局限；二是公式解的限制。

随着计算机的应用，多项式代数的研究由建立存在性理论和方法开始向构造性和算法化方向转变，它的各种有效算法相继出现[2]，多项式求根的各种算法更是层出不穷[3]，但至今未能形成系统的多项式代数求根理论，高次方程求根问题还远未解决。

数学符号是数学的语言。既然原根号存在局限，那么可设立新根号，计算方法依据求根算法确立，用新根号代替原根号作为解整式方程所要用的数学符号，从新根号这一新的数学语言出发构建方程解法基础理论。

作者探明的方向：一是建立适合整式方程的新根号体系。首先设立方程总根号，建立以总根号为原型的允许有重元集合的新集合论，用于证明方程总根号的相关运算性质和指导方程解法基础理论研究，再利用施图姆定理设立实根号，利用卢斯判别法设立方程分根号等，并确立相应的计算方法。二是创建统一解法原理。新根号体系的建立需要满足各种特定条件，将它们作为代数课题纳入到统一解法理论研究中，结合多项式相关知识创建代数学意义上构造性的统一解法原理。

作者在这二个方面进行了长期不懈的探索和尝试，不断改进数学符号和表述方式，经长期积累沉淀终于成功，形成了相对完整、系统的整式代数方程统一解法原理。这一原理的形成是作者以新根号体系为媒介和工具将施图姆、卢斯等数学家的求根思想转化为代数课题进行全面系统研究并逐步理论化的产物。

全文研究整式代数方程在复数域里的求根问题，由三个部分组成：

预章 整式代数方程总根号的设立与新集合论的形成；

第一篇 实系数代数方程统一解法原理；

第二篇 复系数代数方程统一解法原理。

下面简略介绍各部分内容以及篇章分工：

预章首先设立方程总根号，作为由方程所有复根(含重根)组成的集合，其元素(复根)允许有重元，元的重数须与根的重数相等，要证其相关运算性质，Cantor 集合论已不适用。于是建立了以总根号为原型的允许有重元集合的新集合论，重新定义子集、集合相等、并集、差集、交集、全集等概念，研究了有限集合的运算律，并和交运算的交换律、结合律均成立，分配律、幂等律、吸收律各两个等式一个成立，另一个不成立(有条件成立)。有关结论表明：新集合论可在方程解法基础理论研究中发挥重要作用。其次研究了复平面的平移变换对方程根及其总根号的影响，并对总根号与正整数次方根的有效融合和转换进行了初步研究。此外，预章各节还穿插研讨其它诸多知识点，以方便之后各篇章使用。

第一篇实系数代数方程统一解法原理，第一章方程实根统一解法原理。首先，根据施图姆定理设立方程实根号，并确立计算方法，随后探讨实根号的基本性质和根的重数计算。方程的重实根可在施图姆序列扩展型内部进行实根号运算，根的重数就等于该扩展型在该实根隔离区间两个端点的变号数之差，统一解法随之完成：每个实根用一个实根号就可表达，根的重数可简单计算并用符号表示，于是实系数多项式的实根因式(包括重数)也能简洁表达。最后探讨实根号的一般性质，为之后的理论研究做准备，在探讨中新集合论和 Cantor 集合论相辅相成取得良好成效。解决了任意次方程求实根问题，就为解决共轭复根问题打下坚实基础。

第二章方程复根的求解路径之一。首先通过 $f(\mathrm{z})=f(x+iy)=i^n[f_0(x,y)-if_1(x,y)]$ 将原方程( $n$ 次)与实系数二元多项式方程组相联系( $f_0(x,y)$ 和 $f_1(x,y)$ 分别为 $y$ 的奇偶函数)，又将二元方程组转化成恒定元为 $x=x_0$ 的一元方程组，引入最大公因式方程。探讨方程根和方程组解的性质，研究原方程根与方程组解和最大公因式方程根的关系，据此定义本篇重点数学概念：一对复根、一对复数解，方程组一对复数解 $(x_0,y_0)$ ， $(x_0,-y_0)$ 与原方程一对复根 $z_1=x_0+iy_0$ ， $z_2=x_0-iy_0$ 对应，其中 $x_0$ 称为 $z_1$ ， $z_2$ 的中点，从而使研究获得并进入了更广泛的领域。最后将二元方程组的解与结式方程的根相联系，结式方程( $n^2$ 次)是以原方程的所有复根以及所有成对复根的中点为根的方程，它是实系数代数方程。本章彻底理清了原方程根与二元方程组解及结式方程根这三者之间的关系，最大公因

式方程的次数与结式方程根的重数关系，在研究中新集合论起到了关键作用。

第三章施图姆序列之一。简写恒定元为实数$a$的方程组，作施图姆序列，再将第二章研究成果引入并作提升，为前三节内容，还依据序列最后多项式的次数定义原方程的互素点与非互素点概念，重要结论：**在复平面实轴上任意取一点，若它是结式方程的实根，则该点是原方程的非互素点，代表原方程的实系数多项式在非互素点可以分解成两个实系数多项式的乘积；否则就是原方程的互素点，原方程在通过互素点并且与虚轴平行的直线上没有根。**随后几节为原方程量身定制了在复平面上关于点$a$严格对称的根全集(及非$a$根全集)、单层对称的根全集、普通对称的根全集的概念。在对这些根全集的研究中，新集合论展现了神奇的魔力，形成了相应的性质，并得到了很多重要的结论，使它们成为统一解法原理不可或缺的重要组成部分。

第四章方程复根的求解路径之二。$f_0(x,y)$或$f_1(x,y)$提取并消去一个$y$因子变成实系数二元多项式$f_0^*(x,y^2)$, $f_1^*(x,y^2)$，本章方程组一个复数解$(x_0,y_0^2)$与原方程一对复根$z_1=x_0+iy_0$， $z_2=x_0-iy_0$对应，又将二元方程组转化成恒定元为$x=x_0$的一元方程组，引入最大公因式方程。最后将二元方程组的解与结式方程的根相联系，本章结式方程($\frac{n(n-1)}{2}$次)是以原方程所有成对复根的中点为根的方程。本章彻底理清了原方程成对复根与二元方程组解及结式方程根这三者之间的关系，最大公因式方程的次数与结式方程根的重数关系，在研究中新集合论也起到了关键作用。

第五章施图姆序列之二。简写恒定元为实数$a$的方程组，作施图姆序列，再将第四章研究成果引入并作提升，为前三节内容，重要结论：**在复平面实轴上任意取一点，若它是第四章结式方程的实根，代表原方程的实系数多项式在该点也可以分解成两个实系数多项式的乘积。**随后几节为原方程量身定制了在复平面上关于点$a$成对严格对称的根全集(及非$a$根全集)、成对单层对称的根全集、成对普通对称的根全集的概念。新集合论在对这些根全集的研究中也展现了魔力，形成了相应性质，得到了很多重要的结论。

第六章方程间的多项式关系式以及实根号运算。通过对行列式的研究获得代表原方程的多项式与第二、四章结式的关系式，它反映了原方程与两个结式方程的关系；随后研究该关系式的实根号运算；对原方程的互素点与非互素点作进一步讨论。第二、

三章和第四、五章分别是第一种和第二种解法的理论基础，第六章研究两种解法的顶层链接。

第七章方程同实部复根的统一解法原理。首先将原方程的非互素点分成复根的实部点与非实部点，重要结论：**原方程在通过复根实部点并且与虚轴平行的直线上至少有一个根，而在通过非实部点并且与虚轴平行的直线上没有根。**随后运用前几章基础知识阐述原方程同实部复根的三种解法及其统一原理；最后通过论证找到了确定原方程复根所有实部点的方法：

先求出第二章结式方程所有各不相同的实根(用实根号)，它们就是原方程的所有非互素点，再弄清原方程在与结式方程某实根号上的区间相对应的带形区域内有没有根，若无根，则该实根是非实部点，舍去；若有根，则该实根是实部点，而且原方程在该区域内的所有根(含重根)都在通过该实部点并且与虚轴平行的直线上。

这个方法很重要，它也是判定复根已完成隔离的方法。最后的论证又为统一近似解法提供了理论依据。

第八章方程复根隔离的基本思想与统一解法。引进卢斯判别法与卢斯表格，结合前几章基础知识顺利找到判定原方程在与虚轴平行的任意一条直线上及其右半平面上有没有根以及有几个根的方法，进而给出判定原方程在与虚轴平行的任意一个带形区域内有没有根以及有几个根的方法，还发现：**若第二章结式方程在某区间内没有实根，则原方程在相应的带形区域内没有根。**在解决复根隔离问题后，设立了方程分根号和同实部根全集根号。

**复根隔离的基本思想：**首先，找到原方程所有复根的存在区域—与虚轴平行的带形区域(相应区间两个端点都是原方程的互素点并且为有限实数)，于是所有复根组成的集合可用一个分根号表示。

其次，对这个带形区域进行分割及判断，假设在相应区间内取到的分割点都是原方程的互素点，我们就可以将该区域分割成若干个带形的子区域，在每个子区域内原方程根的个数可以简单计算。若在某个子区域内根的个数为零，则把该子区域舍去，剩下的每个子区域内都含有原方程的若干个根，组成的集合可用分根号表示，然后在剩下区域相对应的区间内，判断第二章结式方程各不相同的实根个数。

(1) 若为 1，则结式方程在该区间内只有一个实根，它是原方程复根的实部点，该区域内原方程的复根都在通过该实部点并且与虚轴平行的直线上，它们具有相同的实部，于是该区域为该实部点的同实部根的隔离区域；

(2) 若大于 1，则对该区域继续进行这种分割及判断工作，直到每个子区域(都含有原方程的若干个根)相对应的区间内，结式方程各不相同的实根个数都为 1 为止，其各区域都是原方程复根各实部点的同实部根的隔离区域。

利用卢斯表格和结式方程以及施图姆定理，对原方程所有复根的存在区域所进行的这种分割判断工作，其实际效果是将原方程所有复根按实部大小进行分割、分类，并不断地将实部相等的复根归为一类的过程，而且只要经过有限多次的分割判断就能找到原方程复根所有实部点的同实部根的隔离区域，在每个隔离区域内原方程的复根都在通过实部点并且与虚轴平行的直线上，它们所组成集合可用同实部根全集根号表示。

原方程所有复根组成的集合(总根号)在复平面上分解成若干个带形区域内所有根(含重根)组成的集合(分根号)的并集后，只要再经过有限多次分割判断就能分解成原方程复根所有实部点的同实部根全集(全集根号)的并集，其中与全集根号上的区域相对应的区间就是结式方程实根号上的区间。

上述是隔离的基本思想，但要找到所有实部点的同实部根的隔离区域，还有更为便捷的方法：先求出第二章结式方程所有各不相同的实根(用实根号)，它们是原方程的所有非互素点，再从中找出原方程复根所有实部点，与实根号上的区间相对应的区域就是原方程复根实部点的同实部根的隔离区域。

卢斯表格可用来隔离复根却不能判定隔离是否已完成，用结式方程的实根号，指导复根隔离是作者独创，使隔离只要有限多次就可完成，这种巨大转变，使它克服了只能求最大实部根的缺陷，可以求原方程复根每个实部点的同实部根，从而求出所有复根，具有重要意义。

随后探求系列根号同步计算，研究同实部根全集的分类判定与统一解法的关系，使解法更加实用，最后介绍方程复根的统一近似解法。

第二篇作者成功地将实系数代数方程的研究方法、成果推广到了复系数代数方程，

定义了本篇重点数学概念：一对对偶复根、一对对偶复数解，形成了复系数代数方程统一解法原理。虽然两者在本质上有区别，但研究的思想方法却基本相同或类似，很多定理及推论也是类似的，有的甚至相同，两者的解法原理也是统一的。

整式代数方程统一解法的优点是：既构造性地验证了实系数和复系数多项式因式分解定理，又给出具体的求根方法，形式简单统一，便于学习和掌握。它克服了高次方程的实根需要绕道通过复数域才求得的弊端，还使得复根能以 $z = x + iy$ 的显性形式简洁地表达出来。