Creative Education Studies 创新教育研究, 2018, 6(5), 386-392
Published Online October 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2018.65062

Hans汉斯

Research on Analogy Thought and "Different Topics with Similar Lessons" in Mathematics Teaching

Fang Liu

College of Mathematics and Computer Science, Gannan Normal University, Ganzhou Jiangxi
Email: liufang_gnnu@163.com

Received: Sep. 26th, 2018; accepted: Oct. 10th, 2018; published: Oct. 17th, 2018

Abstract

The new curriculum standard advocates the need to penetrate mathematical ideas in the process of mathematics teaching. As an important mathematical idea, analogy thought often appears in the classroom teaching and is getting more and more attention from educators. Through the study of analogy thought, students develop the habit of analogy thinking, stimulate the enthusiasm of self-exploration of new knowledge, and improve their thinking way. This paper, based on the two sections of "Different Topics with Similar Lessons", analyzes the specific implementation methods of analogy thought in the process of mathematics teaching, and provides some help to improve the teaching effectiveness.

Keywords

Analogy Thought, Mathematical Thought, Different Topics with Similar Lessons

数学教学中的类比思想与“异课同构”

刘　芳

赣南师范大学数学与计算机科学学院，江西　赣州
Email: liufang_gnnu@163.com

收稿日期：2018年9月26日；录用日期：2018年10月10日；发布日期：2018年10月17日

摘　要

新课程标准倡导在数学教学过程中需渗透数学思想。类比思想作为重要的数学思想经常出现在教师们的

文章引用：刘芳. 数学教学中的类比思想与“异课同构”[J]. 创新教育研究, 2018, 6(5): 386-392.
DOI: 10.12677/ces.2018.65062

课堂教学中，并越来越受到教育者们的关注。学生们通过类比思想的学习养成类比思考的习惯，激发自主探索新知识的热情，完善自己的思维方式。本文从两节“异课同构”课出发，分析教师在数学教学过程中对类比思想的具体实施方式，为提高教学实效提供一些帮助。

关键词

类比思想，数学思想，异课同构

Copyright © 2018 by author and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

人们在进行观察和思考的过程中总是习惯把属性相同或相似的两类事物进行比较，并常常将在处理某些事物上获得的成功经验用到处理与这些事物相同或相似的另一些事物上，这种思考与处理问题的思维方式称类比法。它是一种由特殊到特殊的推理方法，是中学数学教学的基本思想方法之一。新课程标准倡导在数学教学过程中需渗透数学思想。类比思想作为重要的数学思想已落实在教师们的课堂教学中，并越来越受到教育者们的关注。例如：华玉翠[1]介绍了高中数学类比思想的运用方法；林养秋[2]分析了类比思想方法在教学过程中的重要性以及如何有效实施；朱俊德[3]通过实例阐述了类比思想在中学数学教学过程的应用。事实上，类比思想是联系新旧知识的纽带，在数学教学过程中合理运用类比思想有助于学生找出新旧知识之间的相同点、相似点和不同点，达到巩固旧知识，理解和掌握新知识的目的。例如：孔伟利[4]分别从结构相似、图形相似、范围相似三个方面对类比解题做了详尽的阐述；曾安雄[5]则分别从特殊向一般类比、抽象向具体类比、低维向高维类比、平行类比和方法类比五个方面针对类比推理题类型及解法进行说明。这些研究无疑对提高学生学习效率和学生对知识体系的构建有着重要意义。本文从一种全新的视角——通过两节“异课同构”课的授课过程，分析教师如何要求学生运用类比思想建立原有知识和新知识之间的联系，归类比较知识间的异同，进而获得新知识。

2. 教学背景介绍及教学片断分析

两节“异课同构”课的教学内容分别选自北师大版高中数学必修 1 第三章第五节的内容《对数函数》和必修 5 第一章第三节的内容《等比数列》，两节课为同一位教师执教，执教教师的教龄为 7 年。所观察的班级为不同年级的两个班，学生的学习水平和认知水平较好，思维能力较活跃。

高中阶段的学生在教学活动中是不成熟、不断发展的主体，教师在具体教学设计过程中必须以学生思维发展为依据，利用恰当的方法引导他们去学习。下面从三方面的教学片断来感受这位教师在教学过程中的具体实施方式。

2.1. 教学片断一：利用情境，生成定义

2.1.1. 对数函数定义的生成过程

请同学们回答两个情境中的问题，并结合函数的概念，抽象出对数函数的定义。

情境 1：我们知道考古学家估计出文物或古遗址的年代可以利用生物体内 C_{14} 的含量 p 推算生物体的年代关系 $t=\log_{5730\sqrt{\frac{1}{2}}} p$，那么 t 是关于 p 的函数吗？

情境 2：《庄子•天下篇》中有“一尺之棰，日取其半，万世不竭”，若木棰剩余部分长度为x，被截取的次数为y，那么y是关于x的函数吗？

对于情境 1，因为每一个C_{14}的含量p通过此关系都有唯一确定的年代t与它对应，所以得到t是p的函数。对于情境 2，因为木棰被截取后剩余部分长度为x，而x的值决定了木棰被截取的次数y，所以得y是关于x的函数。类比后发现：对于每一个对数式$y=\log_a x$中的x，任取一个正的实数值，均有唯一确定的y与之对应，所以$y=\log_a x$是关于 x 的函数。

一般地，我们把函数$y=\log_a x$ （$a>0$且$a\neq 1$)叫做对数函数，其中x是自变量，函数的定义域$(0,+\infty)$。

老师以学生熟悉的知识(函数定义)为背景，启发学生运用类比思想分析一般函数和对数函数的异同，让学生自己给出对数函数的定义，从而理解对数函数也是一种函数。

2.1.2. 等比数列定义的生成过程

请同学们根据以下情境，先将其转化为数学问题，观察共同点，类比等差数列的定义，给出等比数列的定义。

情境 1：国王奖赏国际象棋发明者的事例，发明者要求：在第 1 个方格放 1 颗麦粒，在第 2 个方格上放 2 颗麦粒，在第 3 个方格上放 4 颗麦粒，在第 4 个方格上放 8 颗麦粒，依此类推，直到第 64 个方格子，国王能否满足他的要求呢？$\left(1,2,2^2,\cdots,2^{64}\right)$

情境 2：“一尺之棰，日取其半，万世不竭”$\left(1,\frac{1}{2},\left(\frac{1}{2}\right)^2,\cdots\right)$

情境 3：某轿车的售价约 27 万元，年折旧率约为 10%(就是说这辆车每年减少它的价值的 10%)那么该车从购买当年算起，逐年的价格依次为多少？拟$\left(27,27\times 0.9,27\times 0.9^2,\cdots,拟27\times 0.9^n,\cdots\right)$

学生将情境转化成数学问题后，发现了共同点：后一项与前一项的比值是相同的。结合等差数列的定义，轻松得到等比数列的定义。

一般地，如果一个数列从第二项起，每一项与它的前一项的比等于同一个常数，这个数列就叫等比数列。

教师可以通过列举生活中关于等比数列的大量实例，引导学生自己去发现、去探索，让学生自然地运用类比思想去分析例子间的数学问题，从而归纳出等比数列的定义。

在此过程中教师结合具体情境，以原有知识为出发点，不仅能激发学生的学习兴趣，建立解决新问题的信心，而且在提高学生发现问题能力和培养创新能力等方面都起到很好的促进作用。

2.2. 教学片断二：动手实践，合作探究

2.2.1. 对数函数图像的生成过程

引导学生思考：把如何画一般对数函数图像的问题转化为画特殊对数函数的图像。类比指数函数a的取值情况，可以取$a=2,\frac{1}{2},3,\frac{1}{3}\cdots$。将学生分成四组，分别画出$y_1=\log_2 x, y_2=\log_{1/2} x, y_3=\log_3 x, y_4=\log_{1/3} x$这四个对数函数的图像。然后观察$y_1=\log_2 x, y_2=\log_{1/2} x$两函数图像上点有$(x,y)\to(x,-y)$的关系。

利用对数的运算法则(如：$y_2=\log_{1/2} x=-y_1=\log_2 x$)列出表格(表 1)在同一坐标内进行画图(图 1)。

教师将类比思想融入分组画对数函数图像中，让学生从特殊函数的图像抽象出一般函数的图像，归结出只要描出横坐标$x=\frac{1}{a},1,a$三个点，就可以确定对数函数图像的大致形状和位置这一结论。同时四个函数图像在同一坐标系内学生容易发现对数函数的对称性，激发了他们探索函数性质的兴趣。分组画图既提高了课堂效率又增强了学生之间合作交流的热情，也为下个环节探索对数函数的性质做好铺垫。

Table 1. Uses the logarithmic algorithm example table

表 1. 利用对数的运算法则示例表

x	…	$\frac{1}{4}$ $(\frac{1}{9})$	$\frac{1}{2}$ $(\frac{1}{3})$	1 (1)	2 (3)	4 (9)	…
$y_1 = \log_2 \log_2 x$ $(y_3 = \log_3 \log_3 x)$	…	−2	−1	0	1	2	…
$y_2 = \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{2}} x$ $\left(y_4 = \log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{3}} x\right)$	…	2	1	0	−1	−2	…

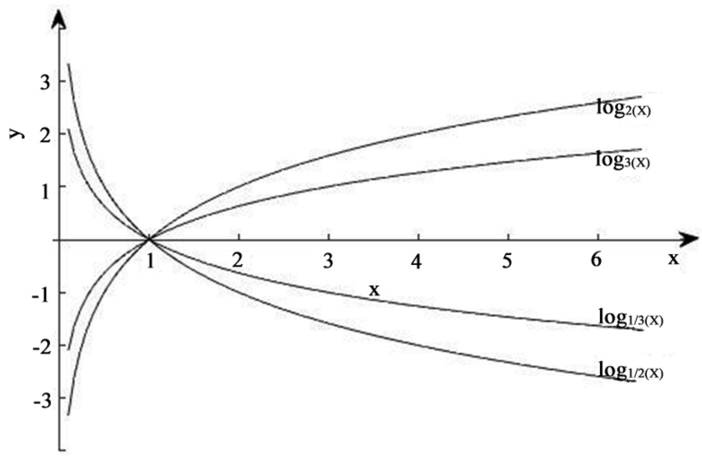


Figure 1. Logarithmic operation example diagram

图 1. 对数运算示例图

2.2.2. 等比数列通项公式的生成过程

我们用公差 d，项数 n 以及首项 a_1 表示等差数列的通项公式。那么在等比数列中，如何根据等比数列的定义来表示等比数列的每一项呢？

教师启发引导，让学生分组讨论、大胆尝试，通过类比等差数列通项公式的推导方法(递推累加法)，学生讨论后归纳出等比数列的通项公式。教师继续将问题延伸，提出：对于这个通项公式，我们可以从哪几个方面去认识它？它可以变形成哪几种形式？公式还可以作怎样的推广？从函数的观点来认识需要怎样来解释？

类比等差数列通项公式相关知识，学生经讨论后得到以下新知识：① 等比数列的通项公式 $a_n = a_1 q^{n-1}(a_1 \neq 0, q \neq 0)$，要确定一个数列的通项公式，只要把两个常数 a_1 与 q 求出来即可。② 通项公式可以推广为 $a_n = a_m q^{n-m}\left(m, n \in N^*\right)$。③ 从函数观点去认识，$a_n = a_1 q^{n-1}(a_1 \neq 0, q \neq 0)$ 可以看作以 n 为自变量的函数表达式。④ 从方程观点来看，可以把 $a_n = a_1 q^{n-1}(a_1 \neq 0, q \neq 0)$ 看成以 n 为未知量的一个方程。

整个活动探究的过程都是以学生为主体进行，通过类比来寻找解题思路，推广数学命题，加深了学生对等比数列通项公式的理解。与此同时，通过对等比数列通项公式的发现与猜想，学生思维的独创性与灵活性也得到训练。

2.3. 教学片断三：类比归纳，探究性质

2.3.1. 对数函数性质的生成过程

请同学们类比前面讨论指数函数性质的思路，思考研究对数函数的性质的内容和方法。(教师用 PPT

展示指数函数及其性质)上个环节学生们已完成对数函数图像的生成，所以结合图像以“两域三性”为出发点类比对数函数的性质(表 2)。

对数函数这节内容相对抽象，学生并不容易理解。传统的灌输式教学反而不利于学生对知识的掌握。所以在进行这部分内容教学时，教师只做引导者，引导学生类比指数函数性质归纳思路，通过自己的观察，根据对数函数的图像得到对数函数的性质。整个教学过程注重学生自主探索知识能力的培养，让学生深刻体会知识的形成过程，充分认识到数学思想在探索新知识中起到的重要作用。

2.3.2. 等比数列性质的生成过程

等比数列性质这部分内容在教材中并没有以成节形式出现，这就需要学生去思考，去探究。如果教师以自己讲授为主，将相关性质直接灌输给学生，不仅不利于知识的吸收，可能还会造成一定的学习压力。由此，先让学生回顾等差数列的性质，以熟悉的知识为导向，并引导他们从等差、等比数列定义间的区别去思考，类比等差数列的性质，大胆猜想等比数列的性质(表 3)。学生在教师的指导下自主发现问题、探究问题、获得结论。

学生从形式上得到类比的特征，从本质上体验思维的过程。了解类比不仅是形式上的“相似”，而是从相似中得到猜想，再由论证使之成为正确的类比。这不仅有利于激发学生的学习兴趣，使学生在辩证中掌握类比的思想方法，也倡导了以“以学生自身发展为本”的教学理念[6]。

在利用类比思想进行教学时，注重的是学生要善于发现新旧知识的联系，从而获得新知识的过程。这两节“异课同构”课是运用类比思想教学的典型代表，在已有知识经验的基础上，通过类比法的运用

Table 2. Comparison of the properties of logarithmic functions
表 2. 对数函数的性质对比

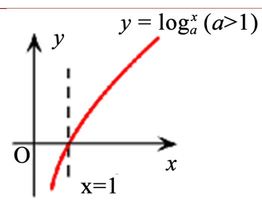
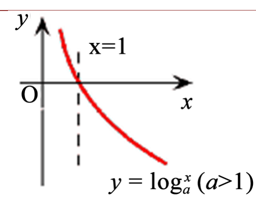
<table>
<tr><td></td><td colspan="3">对数函数 $y=\log_a^x$ ($a>0$，且 $a\neq 1$)的性质</td></tr>
<tr><td></td><td>两域三性</td><td>$a>0$</td><td>$0<a<1$</td></tr>
<tr><td>图像的特征</td><td>图像</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>图像都在 y 轴右侧</td><td>定义域</td><td colspan="2">$(0, +\infty)$</td></tr>
<tr><td>图像可以上下无限延伸</td><td>值域</td><td colspan="2">R</td></tr>
<tr><td>从左到右，图像上升或下降</td><td>单调性</td><td>单调递增</td><td>单调递增</td></tr>
<tr><td>单一函数的图像无对称性</td><td>奇偶性</td><td colspan="2">非奇非偶函数</td></tr>
<tr><td>单一函数的图像无周期变化</td><td>周期性</td><td colspan="2">非周期函数</td></tr>
<tr><td rowspan="2" colspan="2">其他</td><td colspan="2">过点性(0, 1)</td></tr>
<tr><td colspan="2">底数互为倒数的函数图像大于 X 轴对称</td></tr>
</table>

Table 3. Contrast series comparison proportional series
表 3. 等差数列对比等比数列

性质	等差数列	等比数列
1	若 $m+n=s+t$，则 $a_m+a_n=a_s+a_t$	若 $m+n=s+t$，则 $a_m * a_n=a_s * a_t$
2	$m+n=2K$，则 $a_m+a_n=2a_k$	$\mathrm{m}+\mathrm{n}=2K$，则 $a_m * a_n=a_k^2$
3	$\{a_n\}$中任意两项 a_m，a_n 都有 $a_n=a_m+(n-m)d$	$\{a_n\}$中任意两项 a_m，a_n 都有 $a_n=a_m * q^{n-m}$

使学生主动参与到教学活动中来，自发探索新旧知识的异同，进而巩固旧知识，掌握新知识，提升学习的积极性和自主性。

3. 类比思想的重要性

首先，类比有助于学生自主探索新知识，改变被动学习方式。随着新课程改革的全面展开，数学课堂教学更加强调自主探究和知识构建，要求学生主动参与教学全过程。教师们通过在教学过程中恰当的融入类比思想，可以使学生利用所学知识自主探索新知识，获得“再发现”的学习体验，激发学习兴趣，也有助于教师突破教学难点，打破原有的“教师只管讲、学生只管听”的教学方式。比如，学习双曲线定义时，教师可以引导学生把双曲线的定义与刚学的椭圆的定义进行类比，发现两者除了椭圆定义中的“和”与双曲线定义中的“差”不同外，其他方面几乎无变化。于是学生根据定义推导出双曲线标准方程后自然而然的发现双曲线标准方程就是把椭圆方程中的“和”变成了“差”。这样讲解不仅使新知识有似曾相识的亲切感，利于理解和接受，而且更侧重新知识的探索，让学生头脑真正动起来，促进学生学习能力的发展和学习方式的改变。

其次，类比有助于学生构建数学知识体系，增强对知识理解的整体性。数学学科具有很强的系统性，知识点与知识点间存在密切的内在联系。学生们在学习数学知识时需要认识到数学知识是一个有机整体，遇到新问题和新知识可以根据已学知识充分发挥类比思想的作用将两者有机结合起来，发现他们的相同点、相似点和不同点，从而解决新问题和掌握新知识。比如，一元二次方程，二次函数，一元二次不等式及二次三项式在实数范围内的因式分解等知识都跟 b^2-4ac 有密切的联系，如何更清楚的区分它们的异同之处呢？通过列表分析 b^2-4ac 在这些知识块间的应用，不仅巩固新知识，更重要的是让学生通过不断的洞察，不断思考，亲历数学知识的构建过程，并在此过程中使自己的思维层次不断提升。

第三，类比有助于学生培养开放性思维，提高数学应用意识。开放性思维是指突破传统思维定势，能多视角、多方位看问题的思维。具备了开放性的思维方式，就能够不断的有所发现、有所创造、有所前进。学生在学习过程中能否透过现象看本质，遇到新问题首先考虑它“像什么”，放开思维大胆想象，之前是否见过这类相似的问题，类似的问题是怎样解决的，最后的结论是什么？不断地去发现，去创造，获得新知。在数学学习中，通过开放性思维的类比思想得到结论的例子有许多，比如：由分式与分数在形式上的相同，可以类比出分式也有与分数相同的基本性质和运算性质。由等式的基本性质类比得出不等式的基本性质；学习相似三角形时可以类比全等三角形的性质与判定等等，通过这种类比进行学习，对学生开放性思维能力的培养是非常有益的。除此之外，教师在教学过程可以根据学生已有的知识或生活经验，立足于教材提供一些与之相合的实际问题情境，促使学生利用类比思想去思考问题，发现问题和解决问题。这些都能增强学生的数学应用意识，提高解决问题的能力。

类比思想是一种重要的数学思想，更是一种重要的数学方法。在学生探究学习的过程中所起到的作用是不容忽视的。只有我们意识到类比思想在教学中的价值，并注重将其应用于数学教学中，通过这种教学方法去展示数学知识间的连通关系，才能让学生在类比学习中体会探索新知识的乐趣，感悟数学思想和方法的内在联系，从而升华思维，创造性的解决问题。

基金项目

江西省研究生创新专项资金项目：YC2017-S396；江西省教育厅教学改革项目：JXJG-16-14-10；校教学改革项目：150721；江西省教育厅科技项目：GJJ160927。

参考文献

[1] 华玉翠. 高中数学课程中类比思想的教学实践探讨[J]. 科学大众(科学教育), 2013(9): 46.

[2] 林养秋. 浅谈数学教学中的类比思想[J]. 湖北成人教育学院学报, 2011, 17(3): 123-124.
[3] 朱俊德. 谈类比法在数学教学中的应用[C]. 2015 年教育探索与实践学术论文集. 北京: 百川利康(北京)国际医学研究院, 2015: 2.
[4] 孔伟利. 发现相似大胆联想[J]. 中学生数理化: 高中版, 2003(2): 6-8.
[5] 曾安雄. 高考数学的一个新亮点——类比题[J]. 中学教研(数学), 2004(4): 37-39.
[6] 韩颖. 打破传统的教学模式, 成就精彩的数学课堂[J]. 新课程研究(上旬刊), 2009(7): 58.

Hans汉斯

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2331-799X，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：ces@hanspub.org