Creative Education Studies 创新教育研究, 2020, 8(4), 503-508
Published Online August 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2020.84082

Hans汉斯

Discussion on Teaching Method of Conditional Probability

Bingmao Deng, Zhifeng He*

School of Financial Mathematics and Statics, Guangdong University of Finance, Guangzhou Guangdong
Email: dbmao2012@163.com, *24-056@gduf.edu.cn

Received: Aug. 2nd, 2020; accepted: Aug. 17th, 2020; published: Aug. 24th, 2020

Abstract

Probability exists everywhere in real life, probability theory and mathematical statistics is an important public basic course in colleges and universities, conditional probability is important knowledge in probability theory and mathematical statistics. In this paper, the author reviews the knowledge from through the example first, then draws out the relevant formula, and gives some derivation, which let the students learn the formula easier.

Keywords

Probability and Mathematical Statistics, Conditional Probability Formula, Multiplication Formula, Total Probability Formula

关于条件概率教学方法的探讨

邓炳茂，何志锋*

广东金融学院金融数学与统计学院，广东 广州
Email: dbmao2012@163.com, *24-056@gduf.edu.cn

收稿日期：2020年8月2日；录用日期：2020年8月17日；发布日期：2020年8月24日

摘 要

现实生活中无处不存在概率，且概率论与数理统计是高等院校中一门重要的公共基础课，而条件概率在概率论与数理统计中是一个重要的知识点。本文从案例出发，使用通俗易懂的例子，先回顾以往知识点，再引出相关公式，并加以相关推导，简单明了地让学生掌握相关公式，并让学生更好地感受相关公式本质的含义。

*通讯作者。

文章引用: 邓炳茂, 何志锋. 关于条件概率教学方法的探讨[J]. 创新教育研究, 2020, 8(4): 503-508.
DOI: 10.12677/ces.2020.84082

关键词

概率论与数理统计，条件概率公式，乘法公式，全概率公式

1. 前言

《概率论与数理统计》是高等院校理工科专业、经管类专业重要的公共基础理论课程，它是研究现实中“随机现象”统计规律性的数学学科，对后续专业课程的深入学习有深远影响。《概率论与数理统计》是数学课程中一个很有特色并且又十分活跃的分支：一方面，它内容丰富，具有自身独特的概念和研究方法；另一方面，它与其他学科有着密切的联系，是近代数学的重要组成部分[1]。随着科学技术的发展，概率论与数理统计的理论与方法广泛应用于自然科学与社会科学的研究中。例如：它在生物医学、金融、经济管理、工农业生产都具有广泛的应用。

《概率论与数理统计》在大学课程中具有举足轻重的地位，然而，它因理论复杂、应用广而且灵活，长期被看成是一门枯燥难学的课程，从而学生不爱学、难学，教师教学难度也随着增加。因此，研究如何才能提高学生对这门课程的学习兴趣，如何才能提高学生的学习效率与应用能力具有重要的意义。

在教学研究当中，“案例教学法”是许多学者探讨的热门课题之一[2] [3] [4] [5]，也是广泛应用于《概率论与数理统计》课堂教学的方法之一，案例教学法是美国学者 C. C. Langdell 于 19 世纪 70 年代首创的教学方法。这种教学方法将理论与实践联系起来，教师可以通过适当的案例，来让学生体会如何解决来自于生活中的问题，从而激发学生的学习热情，调动学生的积极性，从而提高概率论与数理统计的教学质量与教学效率[2] [6]。因此，在概率论与数理统计的课堂教学中提倡案例教学是有必要的，并且具有其独特的意义。

然而，若过分的强调案例的重要性，也容易让学生顾此失彼，而忘了相关理论推导的重要性。本文将使用通俗易懂的例子，简单的变形推理，结合适当的案例，浅谈条件概率这一小节的课堂教学设计。

2. 教学设计

在开始这节课之前，我们先给出以下现时大家最关心的话题：新冠病毒感染问题。

案例 1：2019 年末新出现的新冠病毒，现正肆虐全球。据某部门统计分析，某市人们不戴口罩出门被感染新冠病毒的概率为 80%，而戴口罩出门不被感染新冠病毒的概率为 99%，据调查，该市有 80%的人在疫情期间是经常戴口罩出门的。

问题 1：随机抽选一位该市市民，其被感染新冠病毒的概率有多大？

问题 2：若某位市民没有感染新冠病毒，其有多大可能是戴口罩出门的？

该问题涉及到我们本次课要讲的内容：条件概率公式，乘法公式，以及全概率公式。我们先来学习相关内容，再回头来看这两个问题该怎么解决。

2.1. 条件概率公式

笔者认为，一个好的例子，除了需要突出本节课课堂知识点之外，还需要有承上启下的作用，承上即回顾前一节主要知识点，启下即为下个知识点埋下伏笔，留给学生自我思考的空间。

众所周知，条件概率是全概率公式与贝叶斯公式的前提与基础，是本课程一个非常重要且比较难学

的知识点，它建立在古典概型的基础上。许多教科书叙述该公式时，一开始就直接给出公式，然后就直接利用该公式进行相关问题的求解，这就让许多学生对公式一头雾水。其实，开始条件概率的教学之前，可以从最基本的古典概型公式出发，先来看看下面这个简单的例子。

例 1 [1]：将一枚硬币抛两次，观察其正面反面出现的情况。设事件 A 为“至少有一次出现正面 H”，事件 B 为“两次抛出同一面”。

依次考虑以下问题：

问题 1：事件 A，B 发生的概率是多少？

问题 2：已知事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率 $P(B|A)$ 是多少？

对于问题 1，自然是用古典概型公式，可让学生自行思考后再给出相关过程：

知识点回顾：

古典概型公式：$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{A\text{包含的基本事件数}}{S\text{中基本事件总数}}$。

因此，只需要计算出事件 A，B 的基本事件数，及样本空间 S 的基本事件数即可。易得

$$S=\{HH,HT,TH,TT\},\ A=\{HH,HT,TH\},\ B=\{HH,TT\}.$$

因此不难得出：

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3}{4},\ P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

至此，古典概型知识点回顾结束。可以问学生，这问题是不是很简单，那么对于问题 2 又该如何解答呢？这就是本次课要学习的内容，条件概率公式，从而轻松过渡到本节知识点。

可先让同学们对比下问题 2 与问题 1 的区别，并让同学们结合古典概型公式思考：在事件 A 发生的条件下，此时的样本空间 S^*是什么？让同学们观察下面两个文氏图，并发表自己的看法与思路。

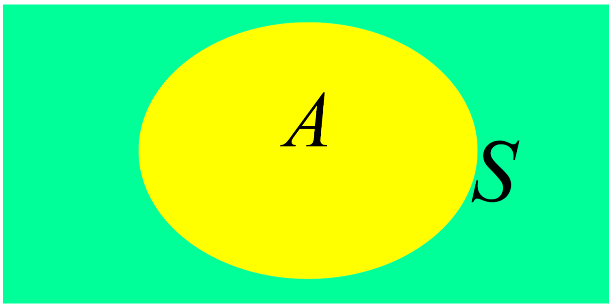

Figure 1. Venn diagram (probability of things A and B happening)
图 1. 文氏图(事情 A、B 发生的概率)

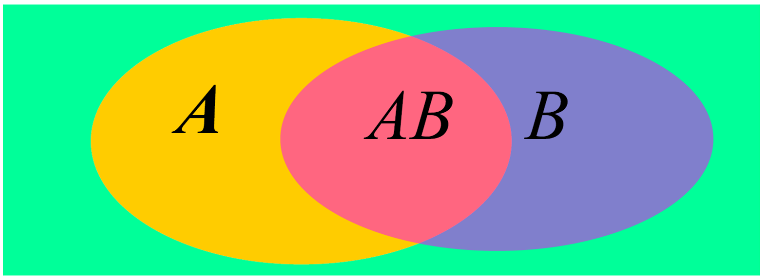

Figure 2. Venn diagram (probability of occurrence of event A and event B is known)
图 2. 文氏图(已知事情 A 发生，事情 B 发生的概率)

再分析：问题 1 的样本空间即图 1 的 S，这很容易得到；而问题 2 是在事件 A 发生的条件下，此时事件 A 以外的事件已经变成不可能事件，即样本空间 S*就变成了图 2 中的事件 A，而此时事件 B 发生的可能性只有“$\{HH\}=AB$”这种情形。

结合以上分析，可得：

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{4}.$$

这就引出条件概率公式，也可看出：条件概率公式是古典概型的特殊情形，只需将相应的样本空间修改成相应已经发生的事件 A，并在事件 A 中寻找可能发生的事件 B，即事件 AB。

接着可让学生自己思考对应平行的问题，以达到巩固知识点的目的。

问题 3：已知事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的概率 $P(A|B)$ 是多少？

对应的分析如下：在事件 B 发生的条件下，此时事件 B 以外的事件已经变成不可能事件，即样本空间 S^*就变成了事件 B，而此时事件 A 发生的可能性只有“$\{HH\}=AB$”这种情形。

结合以上分析，可得：

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{2}.$$

2.2. 乘法公式

去掉例 1 出的现实意义，即抽象出条件概率公式 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$。该公式即给出，若已知 $P(AB),P(A)$，即可通过条件概率公式求出 $P(B|A)$。但如果已知 $P(B|A),P(A)$ 又可以得到什么呢？

分析：若已知 $P(B|A),P(A)$，通过条件概率公式，可得 $P(AB)=P(A)P(B|A)$，这即是乘法公式。再引出三个事件的乘法公式：将事件 AB 看成一个整事件，则

$$P(ABC)=P(C|AB)P(AB)=P(C|AB)P(B|A)P(A).$$

通过归纳法可推得 n 个事件的乘法公式：

$$\begin{aligned}P(A_1A_2\cdots A_n)&=P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})P(A_1A_2\cdots A_{n-1})\\&=P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1A_2\cdots A_{n-2})P(A_1A_2\cdots A_{n-2})\\&=\cdots\\&=P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1A_2\cdots A_{n-2})\cdots P(A_2|A_1)P(A_1)\end{aligned}.$$

此处强调要将多个复杂的事件看成一个整体事件，从而达到化难为易的效果。比如，上述公式第一个等式，其实就是将事件 $A_1A_2\cdots A_{n-1}$ 看成一个整体事件；第二个等式是将 $A_1A_2\cdots A_{n-2}$ 看成一个整体事件，并依此类推。

再之可结合课本的例子，加强学生的印象。

例 2 [1]：设箱子中装有 r 只红球，t 只白球。每次在箱子中任取一只，观察其颜色然后放回，并再放入 a 只与所取出的那只球同色的球。若连续取球 3 次，试求第一、二次取到红球且第三次取到白球的概率。

分析：以 $A_i\ (i=1,2,3)$ 表示事件“第 i 次取到红球”，则 $\bar{A}_3$ 表示第三次取到白球。则第一、二次取到红球且第三次取到白球的概率为

$$P\left(A_1A_2\bar{A}_3\right)=P\left(\bar{A}_3\middle|A_1A_2\right)P\left(A_2\middle|A_1\right)P\left(A_1\right)=\frac{t}{r+t+2a}\cdot\frac{r+a}{r+t+a}\cdot\frac{r}{r+t}.$$

2.3. 全概率公式

通过条件概率公式可知，若在事件 B 发生的情况下，求事件 A 发生的概率，则样本空间则变成事件 B，其概率计算也会相应简单一些。在一个复杂事件的概率计算问题中，如果可以把复杂事件划分成若干个简单事件的概率计算问题，则会简单得多。

样本空间的划分：设 S 为试验 E 的样本空间，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 E 的一组事件。如果满足：

1) $B_iB_j=\varnothing$，$i\neq j$，$i,j=1,\cdots,n$；

2) $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=S$，

则称 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间 S 的一个划分[1]。

比如在最开始中给出的案例，该市中的市民 S 可简单的划分为“A：经常戴口罩出门的市民；$\bar{A}$：不经常戴口罩出门的市民”，或“B：感染新冠病毒的市民；$\bar{B}$：没感染新冠病毒的市民”。

有了划分的概念，结合前面的乘法公式，就可以得出全概率公式。

定理(全概率公式) [1]：设实验 E 的样本空间为 S，A 为 E 的事件，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间 S 的一个划分，且 $P\left(B_i\right)>0\left(i=1,2,\cdots,n\right)$，则

$$P\left(A\right)=P\left(A\middle|B_1\right)P\left(B_1\right)+P\left(A\middle|B_2\right)P\left(B_2\right)+\cdots+P\left(A\middle|B_n\right)P\left(B_n\right).$$

证明：因为 $A=AS=A\left(B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n\right)=AB_1\cup AB_2\cup\cdots\cup AB_n$，

由假设 $P\left(B_i\right)>0\left(i=1,2,\cdots,n\right)$，且 $\left(AB_i\right)\left(AB_j\right)\neq\varnothing$，$i\neq j$，$i,j=1,\cdots,n$，可得

$$P\left(A\right)=P\left(AB_1\right)+P\left(AB_2\right)+\cdots+P\left(AB_n\right)=P\left(A\middle|B_1\right)P\left(B_1\right)+P\left(A\middle|B_2\right)P\left(B_2\right)+\cdots+P\left(A\middle|B_n\right)P\left(B_n\right).$$

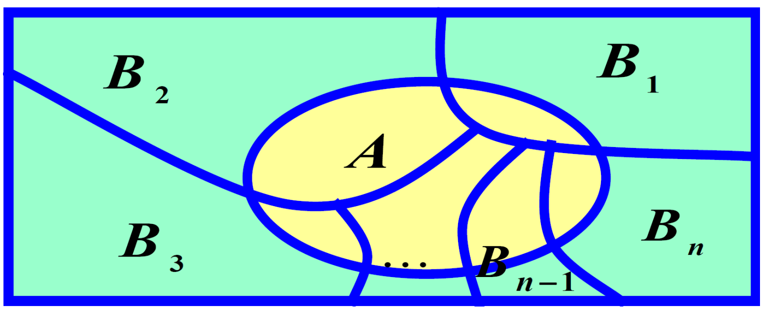

Figure 3. Schematic diagram of the division of the total probability formula
图 3. 全概率公式划分示意图

全概率公式思想：化整为零，将复杂事件划分成若干简单事件，再各个击破(如图 3)。

现在我们就可以来解决最开始提出的那个案例了。

案例 1 的分析：设 A 表示经常戴口罩出门的市民；$\bar{A}$ 表示不经常戴口罩出门的市民，B 表示感染新冠病毒的市民；$\bar{B}$ 表示没感染新冠病毒的市民。依题意有：

$$P\left(B\middle|\bar{A}\right)=0.8,\ P\left(\bar{B}\middle|A\right)=0.99,\ P\left(A\right)=0.8.$$

则案例 1 中的问题 1 则变成求 $P\left(B\right)$。为求 $P\left(B\right)$，根据全概率“化整为零，各个击破”的思想，自然会想到将该市市民划分为两类，即：A 表示经常戴口罩出门的市民；$\bar{A}$ 表示不经常戴口罩出门的市民。再分别计算这两种情况下感染新冠病毒的概率，即全概率公式：

DOI: 10.12677/ces.2020.84082

$$P(B)=P(B|A)P(A)+P(B|\bar{A})P(\bar{A})=0.01\times0.8+0.8\times0.2=0.168,$$

因为，$P(B|A)=1-P(\bar{B}|A)=0.01$，$P(\bar{A})=1-P(A)=0.2$。

问题 2 则变成求 $P(A|\bar{B})$。根据条件概率公式、乘法公式，以及全概率公式可得

$$P(A|\bar{B})=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(\bar{B}|A)P(A)}{P(\bar{B}|A)P(A)+P(\bar{B}|\bar{A})P(\bar{A})}=\frac{0.99\times0.8}{0.832}\approx0.9519.$$

此案例也警示我们，疫情期间务必做好防护措施，做好防护措施能大大降低被感染的风险。

3. 结语

由于《概率论与数理统计》本身的特点，学生在学习相关知识的时候，往往都是给一个公式记一个公式，并不能真正理解它们的基本思想和原理，固然也就不能很灵活地应用相关知识点。因此，我们在讲解相关知识点(公式)时，尽可能地从最简单的入手，将复杂的问题一步步分割成简单问题，从而通过已经掌握的知识或工具来解决它。适当的案例，能帮助学生更牢固地掌握相关知识并提高其应用能力，但在选择案例的时候，不是说越复杂越好，而是要看能否说明问题，能否承上启下，简单明了地引出相关知识点，并让该知识点(公式)的基本思想和相关原理一目了然地呈现在学生面前，这才不会让学生觉得学习这门课程乏味、难学。

基金项目

国家自然科学基金青年资助项目(11901119)。

参考文献

[1] 盛骤, 谢式千, 潘承毅. 概率论与数理统计[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008: 2-24.

[2] 王芬. 案例教学法在概率论与数理统计教学中的应用[J]. 高教学刊, 2016(20): 74-75.

[3] 金丹, 熊萍. 案例教学法在《概率论与数理统计》中的教学实践[J]. 科技经济导刊, 2019, 27(36): 103-104.

[4] 郭琴. 关于全概率公式与贝叶斯公式的教学探讨[J]. 科技视界, 2019(11): 247-248.

[5] 陈中明. 全概率公式与贝叶斯公式的启发式教学设计浅谈[J]. 教育教学论坛, 2019(25): 202-203.

[6] 张云霞. 案例教学法在概率论与数理统计教学中的应用[J]. 国际公关, 2019(11): 108.