Creative Education Studies 创新教育研究, 2021, 9(6), 1681-1687
Published Online December 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2021.96281

Hans汉斯

以用致学，探究泰勒公式的“打开方式”

毛自森，滕兴虎，寇冰煜

陆军工程大学基础部，江苏 南京

收稿日期：2021年9月29日；录用日期：2021年12月6日；发布日期：2021年12月13日

摘 要

泰勒公式是高等数学课程教学中一个难点，本文从学情分析出发，通过关联多维度知识点的思维方法，以用致学；在教学方法上，采用线上线下混合教学模式，细化过程性考核；在教学策略上，突出从简单出发的学习理念，以问题驱动知识生成，在固化知识体系的同时，提升学习能力。

关键词

泰勒公式，联想记忆，学习思维

Improving Learning through Application, Exploring the “Opening Method” of Taylor Formula

Zisen Mao, Xinghu Teng, Bingyu Kou

Department of Basic Courses, The Army Engineering University of PLA, Nanjing Jiangsu

Received: Sep. 29th, 2021; accepted: Dec. 6th, 2021; published: Dec. 13th, 2021

Abstract

Taylor formula is a difficult point in higher mathematics teaching. Starting from simplicity, this paper shares a kind of learning thinking method of related knowledge points, drives learning through application, integrates multi-dimensional knowledge, such as the operation and nature of function, the application of derivative and the application of integral while memorizing Taylor formula, so as to consolidate the knowledge system and improve learning ability at the same time.

文章引用: 毛自森, 滕兴虎, 寇冰煜. 以用致学, 探究泰勒公式的“打开方式”[J]. 创新教育研究, 2021, 9(6): 1681-1687.
DOI: 10.12677/ces.2021.96281

Keywords

Taylor Formula, Associative Memory, Learning Thinking

1. 引言

传统数学课程教学一直存在着“重理论，轻能力；重知识，轻思维”的现象，在制定教学目标的时候，过于强调知识目标的达成，忽略在教学过程中潜在能力目标和情感目标的设计。然而，信息化时代明显加快了知识更新速度，传统以知识迭代为理念的教学方式已经无法满足时代需要，学习越来越呈现出实践性、情境性和个性化等多元特征，死记硬背很难全面的掌握现代知识或技能，先学再用也跟不上知识更新的节奏。因此，数学课程教学目标不能停留于知识的表面理解和重复记忆，要在已有知识的基础上，将所学新知与原有知识建立联系，获取对知识的深层次理解，并有效迁移到新情境和新任务中。这就要求，我们必须转变教育观念，推动数学课程教学从“单点串联”走向“多元联想”。

2. 教学现状和学情分析

泰勒公式是高等数学课程教学的一个重点，其本质是用函数在某点导数信息描述其附近取值的公式，通过构建一个多项式函数来逼近函数在这一点的邻域中的值并给出这个多项式和实际的函数值之间的偏差。由于其公式的复杂性以及涉及高阶导数的计算，多年来也一直是高等数学教学的难点，由此，也引起了数学教育工作者的广泛关注，聚焦泰勒公式的结构问题[1] [2] [3]，逼近和余项[4]，计算和应用[5] [6] [7] [8] [9]，对于如何开展泰勒公式教学也有很多探索与实践[10] [11] [12] [13]，2020 年秋季学期，我们对所在 4 个教学班课前做了问卷调查，学生反馈了 5 个方面的疑惑，详见图 1。

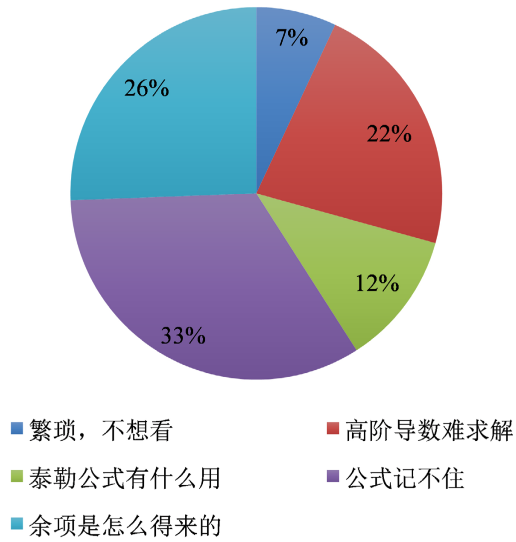

Figure 1. Academic analysis of Taylor formula
图 1. 泰勒公式学情分析

事实上，泰勒公式学习有一系列个避不开的痛点，一是这么复杂的公式怎么想到的？二是怎么计算才能得到这个关系表达式？三就是如何记忆大量的公式？面对学习者的困惑，如果还是按照传统教学的模式，从柯西中值定理讲起，通过高阶导数逐一计算，最终得出泰勒公式，虽然逻辑清晰，理论性很强，但是也很有可能因为这严谨的推理，让学生蒙圈，甚至学员失去了学习的兴趣。本文将从一个趣味话题谈起，一步步引导学员在关联知识中推导泰勒公式，这一记忆方法对于高等数学中无穷级数的学习也有重要的参考价值。

3. 从“$0.99999\cdots=1$”谈起

“$0.99999\cdots=1$是否成立?”[14] [15]很容易激起刚上大学的新生的兴趣，很多学生第一感觉就是不一样的两个数，两个数字存在误差。关于这个问题的讨论基本上呈现三个观点。

1) 观点一：小学知识

因为$1/3=0.333\cdots$，所以$1=(1/3)\times 3=0.333\cdots\times 3=0.999\cdots$

2) 观点二：运算技巧

假设$A=0.999\cdots$，则$10A=9.999\cdots$，于是，$9A=10A-A=9.999\cdots-0.999\cdots=9$，因此，$A=1$。

3) 观点三：等比数列求和

因为$S_n=a_0+a_0q+a_0q^2+a_0q^3+a_0q^4+\cdots+a_0q^{n-1}=\dfrac{a_0\left(1-q^n\right)}{1-q}$，所以

$S_n=\underbrace{0.9+0.09+0.009+\cdots+0.000\cdots 9}_{n\text{项}}=\dfrac{0.9\left(1-0.1^n\right)}{1-0.1}=1-0.1^n$，事实上，$0.999\cdots$可以理解为$n$不断趋近于无穷大时的结果，显然，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-0.1^n\right)=1$。

这里要说的是，观点一是一种经验记忆，本身也需要严谨的证明；观点二有一个致命的漏洞，那就是假设是否成立？观点三较好的呈现了从有限到无限的过程，可以作为极限概念的引例，一下让学员豁然开朗，当然在实际教学过程中，可以针对性的对前两个观点给出反面示例。

4. 基于分析运算的泰勒公式联想记忆法

4.1. 带有皮亚诺余项的一类特殊泰勒公式

观点三还引发了一个重要的思考，对于一般的等比数列求和，从有限到无限会有什么样的结论呢？考虑到a_0对于无限项等比数列求和计算影响较小，我们考虑等比数列$\left\{1,x,x^2,x^3,\cdots,x^n,\cdots\right\}$的和。

1) 有限项和：$S_n=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}=\dfrac{1-x^n}{1-x}$

2) 无限项和：$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}+\cdots=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^n}{1-x}=\dfrac{1}{1-x}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{1-x},|x|<1$

显然，当$|x|<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{1-x}=0$，可记为：$\mathrm{o}\left(x^{n-1}\right)$，由此可以得出：

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^{n-1}+\mathrm{o}\left(x^{n-1}\right)$$

事实上，这个表述形式正是带有皮亚诺余项的泰勒公式。

4.2. 关联泰勒公式

以$\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n+\mathrm{o}\left(x^n\right)$为出发点，通过换元，四则运算，分析运算可以导出一系

列常用的泰勒公式。

1) 换元：注意常量不变，变量可换的准则，详见图 2。

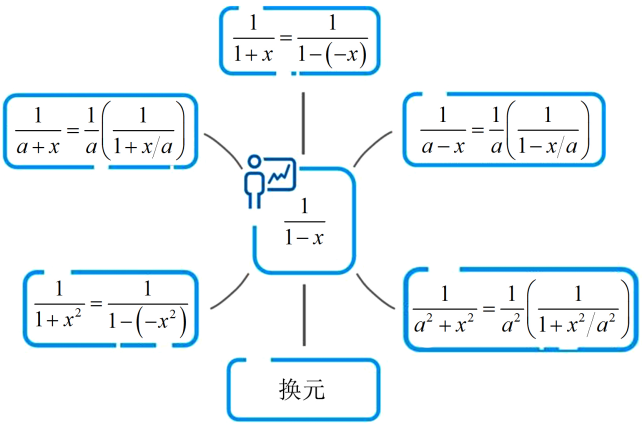

Figure 2. Derivation of Taylor's formula by using the idea of substitution
图 2. 利用换元思想推导常用泰勒公式

可以推导：

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{a-x}=\frac{1}{a}\left[1+\frac{x}{a}+\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{x}{a}\right)^3+\cdots+\left(\frac{x}{a}\right)^n+o\left(x^n\right)\right]$$

$$\frac{1}{a+x}=\frac{1}{a}\left[1-\frac{x}{a}+\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{x}{a}\right)^3+\cdots+(-1)^n\left(\frac{x}{a}\right)^n+o\left(x^n\right)\right]$$

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+o\left(x^{2n}\right)$$

$$\frac{1}{a^2+x^2}=\frac{1}{a^2}\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{x}{a}\right)^4-\left(\frac{x}{a}\right)^6+\cdots+(-1)^n\left(\frac{x}{a}\right)^{2n}+o\left(x^{2n}\right)\right]$$

2) 分析运算(函数积分或求导，详见图 3)

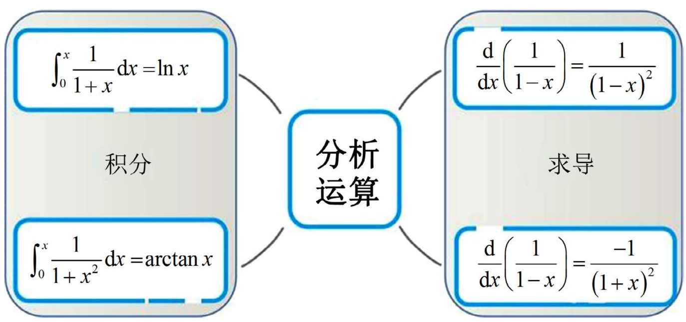

Figure 3. Derivation of common Taylor formula by analytical operation
图 3. 利用分析运算推导常用泰勒公式

可以推导：

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+nx^{n-1}+\mathrm{o}\left(x^{n-1}\right)$$

$$\frac{1}{(1+x)^2}=1-2x+3x^2-4x^3+\cdots+(-1)^n nx^{n-1}+\mathrm{o}\left(x^{n-1}\right)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}+\mathrm{o}\left(x^{n+1}\right)$$

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+\mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$$

3) 四则运算：主要利用四则远算和函数的性质将函数拆分成已经导出的泰勒公式。

$$\begin{aligned}\frac{1}{(a-x)(b-x)}&=\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{b-x}-\frac{1}{a-x}\right)\\&=\frac{1}{a-b}\left[\left(\frac{1}{b}+\frac{x}{b^2}+\frac{x^2}{b^3}+\frac{x^3}{b^4}+\cdots+\frac{x^n}{b^{n+1}}+\mathrm{o}\left(x^n\right)\right)-\left(\frac{1}{a}+\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}+\frac{x^3}{a^4}+\cdots+\frac{x^n}{a^{n+1}}+\mathrm{o}\left(x^n\right)\right)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln(b+ax)&=\ln b\left(1+\frac{ax}{b}\right)=\ln b+\ln\left(1+\frac{ax}{b}\right)\\&=\ln b+\frac{ax}{b}-\frac{a^2x^2}{2b^2}+\frac{a^3x^3}{3b^3}-\cdots+\frac{(-1)^n a^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)b^{n+1}}+\mathrm{o}\left(x^{n+1}\right)\end{aligned}$$

不难发现，通过关联运算可以不断导出新的泰勒公式，在教学过程中，可根据教学进程适当增补或者删减需要推演的公式，教学重点是突出联想记忆的思维方式。

4.3. 三角函数和反三角函数的泰勒公式

仔细观察 $\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+\mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$，可以发现几个特征，首先 $\arctan x$ 是奇函数，而且展开式也是只含有奇次幂；其次，发现展开式的系数与幂次存在一定的关联；最后是系数的符号呈现交错的特性，其实以上推导的泰勒公式的系数符号基本都是要么全正，要么交错。结合多年的教学体会，总结出以下几条基本准则：

1) 奇函数只含奇次幂，偶函数只含偶次幂；

2) 弦的系数是幂次阶乘的倒数，切的系数是幂次倒数(3 次幂(含)以前表达式)；

3) 系数的符号要么全正，要么交错，关键看第二项。

如何有效使用这三条规则快速完成对于三角函数和反三角函数泰勒公式的推导还需要我们对于函数的奇偶性及其性质、函数大小的比较等有较好的知识关联。

Step 1：正弦函数和余弦函数的泰勒展开式(3 条规则全部满足)

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\mathrm{o}\left(x^{2n}\right)$$

Step 2：反正弦函数和正切函数的泰勒展开式(3 次幂)

因为 $\arcsin x$ 是 $\sin x$ 的反函数，所以函数关于 $y=x$ 对称，又因为在 $x>0$ 时，$\sin x<x$，故 $\arcsin x>x$，进而可知系数符号第 2 项必须为正，根据准则 3，系数符号全部为正，即：

$\arcsin x = x+\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)$；同理可知：$\tan x = x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)$。

Step 3：反余弦函数和反余切函数的泰勒展开式

关于反余弦函数和反余切函数的泰勒公式，只要能够熟悉两个重要的等式关系：

$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$ 和 $\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}$，结合上面推导的公式，可得：

$$\arccos x=\frac{\pi}{2}-x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)$$

$$\operatorname{arc}\cot x=\frac{\pi}{2}-\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+o\left(x^{2n+1}\right)\right)$$

至此，不难发现常用的泰勒公式在知识的耦合中相应推理可知。通过联想记忆，既是对知识的总结归纳，又是帮助自己快速梳理知识点的有效手段！

5. 泰勒公式的应用举例

泰勒公式在极限的求解、无穷小的比较和高阶导数计算中都有较为明显的意义，接下来我们简单列举近年来的几个考研数学真题加以评析。

例 1. [2019 年数学一]当 $x\to 0$ 时，$x-\tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 $k=($　$)$

[解析]：根据泰勒公式可知 $x-\tan x=x-\left(x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)=-\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)$，显然 $k=3$。

例 2. [2017 年考研数学一、三]已知函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$，则 $f'''(0)$ = ______

[解析]：根据泰勒公式可知 $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+o\left(x^{2n}\right)$，根据泰勒公式的定义，函数在 0 点处的 3 阶导数等于 3 次幂的系数乘 3 的阶乘，观察可知 $f'''(0)=0$。

同理可知，设函数 $f(x)=\arctan x-\frac{x}{1+ax^2}$，且 $f'''(0)=1$，则 a = _______？也可以相应分析求解，这是 2016 年考研数学一、三的一个填空题，显然

$$\begin{aligned}
f(x)&=\arctan x-\frac{x}{1+ax^2}\\
&=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+o\left(x^{2n+1}\right)\\
&\quad -x\left(1-ax^2+a^2x^4-a^3x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+o\left(x^{2n}\right)\right)\\
&=\left(a-\frac{1}{3}\right)x^3+o\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

因为 $f'''(0)=1$，故：$3!\left(a-\frac{1}{3}\right)=1$，可知 $a=\frac{1}{2}$。

泰勒公式能够实现将任何一个函数用多项式函数去逼近，所以涉及函数极限的求解、无穷小的比较

和高阶导数计算最终都可以通过泰勒展开式去实现，多项式函数观察更加清晰，计算更加简单。

6. 小结

《道德经》曰：“道生一，一生二，二生三，三生万物”，在极限问题的学习中，等价关系就是“道”，等价无穷小是处理函数极限的第一层级，泰勒公式建立了任意函数与多项式函数之间的等式关系，源于等价又高于等价，掌握泰勒公式对于极限的求解、无穷小的比较、高阶导数计算甚至函数的性态分析等诸多问题意义深远，不难发现，泰勒公式解决问题更像是“降维打击”，瞬间秒杀。

泰勒公式的传统教学更多的从柯西中值定理出发，定理证明严谨但也相对较为抽象，对于非数学专业的学生，学习难度也明显提升，我们在提倡“先学后用”的同时，是否可以考虑“以用带学”，通过联想记忆泰勒公式的过程，不仅能够轻松熟悉这些复杂的泰勒公式，与此同时，对于函数的运算和性质，导数的应用，积分的应用等多个维度的问题有机的融合在一起，不仅学习了书本的知识，更体会到了“从简单出发”的学习思维，巩固知识体系的同时不断提升学习能力。

基金项目

国防军事教育学科“十三五”规划教育部级课题(JYKYB2019007)；陆军工程大学教育教学研究重点课题(GJ20ZD003)；陆军工程大学教育教学研究专项课题(GJ20XS136)。

参考文献

[1] 安世全. 泰勒公式及其应用[J]. 高等数学研究, 2001, 4(3): 26-28.
[2] 耿孝雪, 汪涌泉. Taylor 公式及其应用[J]. 数学学习与研究: 教研版, 2017(4): 4-5.
[3] 陈刚, 杨雪, 杨利红. 关于泰勒公式及其应用的再认识[J]. 高等数学研究, 2017, 20(1): 38-41.
[4] 刘春平, 贝淑坤. Taylor 公式中的 Lagrange 型余项的探讨之注记[J]. 大学数学, 2017, 33(1): 2.
[5] 张国铭, 许宏文. 一道涉及泰勒公式的典型例题及其应用[J]. 高等数学研究, 2016, 19(6): 31-33, 35.
[6] 陈叻, 赵向青, 吴涛. Taylor 公式求极限时“阶”的分析[J]. 高等数学研究, 2019, 22(5): 3.
[7] 吴艳, 杨有龙. 利用泰勒公式与洛必达法则求极限之比较[J]. 数学学习与研究: 教研版, 2019(14): 1.
[8] 袁利军, 曾静. 泰勒公式在极限计算上的应用[J]. 课程教育研究, 2017(21): 246-247.
[9] 李琴, 傅莺莺, 莫立坡. 浅谈微积分所蕴含的特征值计算思想方法[J]. 数学的实践与认识, 2016(8): 292-296.
[10] 程云龙, 牟琼, 潘显兵. 泰勒公式教学的探索与实践[J]. 高师理科学刊, 2015(8): 63-64.
[11] 刘明颖, 李文涛. 泰勒公式课堂教学的研究[J]. 高师理科学刊, 2015(9): 79-83.
[12] 陈丽. 关于泰勒公式课堂教学的尝试与体会[J]. 高等数学研究, 2010, 13(2): 59-60.
[13] 康建梅, 陈占华, 郑丽霞, 等. 对“泰勒公式”教学的探讨[J]. 内蒙古师范大学学报(教育科学版), 2017(3): 139-141.
[14] 张奠宙. 从 0.999…=1 说起[J]. 数学教学, 2010(5): 2-3.
[15] 黄和平. 1=0.999…一次难忘的教学生成[J]. 新课程(教研版), 2016(2): 53-53, 55.