Creative Education Studies 创新教育研究, 2022, 10(2), 333-337
Published Online February 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2022.102058

《近世代数》中关于置换群的一点教学思考

高月凤

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2022年1月14日；录用日期：2022年2月16日；发布日期：2022年2月23日

摘 要

本文主要研究置换群中快速计算若干个对换(2-循环置换)的乘积，以及将一个*r*-循环置换快速拆成若干个对换之积，从而求出该*r*-循环置换的逆置换的方法。

关键词

大学数学课程，近世代数，置换群

Teaching Reflection on Permutation Group in *Abstract Algebra*

Yuefeng Gao

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Jan. 14th, 2022; accepted: Feb. 16th, 2022; published: Feb. 23rd, 2022

Abstract

In this paper, we mainly study the method of quickly calculating the product of several transpositions (2-cyclic permutations) in a permutation group, and split an *r*-cyclic permutation into the product of several transpositions, so as to find the inverse of the *r*-cyclic permutation.

Keywords

Mathematics Courses in Universities, Abstract Algebra, Permutation Group

文章引用: 高月凤. 《近世代数》中关于置换群的一点教学思考[J]. 创新教育研究, 2022, 10(2): 333-337.
DOI: 10.12677/ces.2022.102058

1. 引言

习近平总书记指出："高水平研究型大学要把发展科技第一生产力、培养人才第一资源、增强创新第一动力更好结合起来，发挥基础研究深厚、学科交叉融合的优势，成为基础研究的主力军和重大科技突破的生力军。"习总书记强调高校要自觉承担起服务高水平科技自立自强的使命担当，把自身建设同国家战略目标、战略任务紧密对接，充分发挥自身优势，推动高质量大学教育和高水平科技创新联动发展，形成"乘数效应"，为实现高水平科技自立自强作出应有贡献。

《近世代数》课程是高等院校数学专业的一门重要的基础理论课程。国内许多专家学者致力于近世代数课程的教学改革与研究。例如，王守峰和杨文凤展示了同构思想在近世代数教学中的应用[1]。尹正阐述了联想类比思想在近世代数定理证明中的运用[2]。常娟和刘云云总结了具有代数运算的集合构成群的条件[3]。郑华等给出了基于伽罗瓦理论对近世代数课程教学进行改革的若干策略[4]。王保红和魏屹东分析了蕴涵在近世代数中的科学美与真理性，进而还原了近世代数的最深刻的人文意义[5]。吴伟才和谢卫军分类了带有一种代数运算的二元集，在此基础上分别给出了它们的性质[6]。王贵栋结合近世代数课程的特点，用实例阐述了基于创新能力培养的近世代数教学设计[7]。

《近世代数》主要学习群、环、域三大代数系统。置换群是群论章节学习中非常重要的一类群。众所周知，群论最早就是从研究置换群开始的。利用置换群，伽罗瓦成功地解决了 5 次及以上次代数方程是否存在根式解的问题。置换群之所以重要，不仅因为它是最早研究的一类群，而且因为它是一类重要的非交换群，特别是由凯莱定理可知，每个有限的抽象群都与一个置换群同构。在置换群的学习中有一个计算难点也是易错点就是如何快速地将若干个对换即 2-循环置换的乘积表示成一个 r-循环置换，以及将一个 r-循环置换表示成若干个对换之积，从而求出该 r-循环置换的逆的问题。该部分内容教科书上只是简易描述，若教师照本宣科，则学生做起题来，仍然一知半解，出错率极高。

本文首先介绍相关的理论基础知识，然后给出快速计算若干个对换之积的技巧，再展示将一个 r-循环置换快速表示成若干个对换之积的方法，最后得到该 r-循环置换的逆，并辅以相应的计算实例，使学生较系统地获得置换群理论的基础知识，掌握置换之间运算的基本理论和方法，培养学生解决实际问题的能力，并为相关的后续课程及专业课程奠定坚实的数学基础。

2. 置换群理论回顾

本部分首先回顾下置换群、r-循环置换、对换的相关定义与结论。

定义 2.1 [8] n 元对称群 S_n 的任意一个子群，都叫做一个 n 元置换群，简称置换群。

在研究有限集合的置换时，这个有限集合中的元素是什么是无关紧要的。因此，为了方便起见，这个集合中的元素常用数码 $1,2,\cdots,n$ 表示，并且一般都假设 $n>1$。

定义 2.2 [8]一个置换 δ 如果把数码 i_1 变成 i_2，i_2 变成 $i_3,\cdots,i_{r-1}$ 变成 i_r，又把 i_r 变成 i_1，但别的数码(如果还有的话)都不变，则称 δ 是一个 r-循环置换，并表示成

$$\delta=\left(i_1,i_2,\cdots,i_r\right)=\left(i_2,i_3,\cdots,i_r i_1\right)=\left(i_r i_1,i_r i_2,\cdots,i_{r-1}\right).$$

例如：4-循环置换 $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}=(1324)=(3241)=(2413)=(4132)$。

为了方便起见，把恒等置换叫做 1-循环置换，记为

$$(1)=(2)=\cdots=(n).$$

2-循环置换简称为对换，无公共数码的循环置换称为不相连循环置换。

定理 2.3 [8]不相连轮换相乘时可以交换。

定理 2.4 [8]每个(非循环)置换都可表为不相连循环置换之积；每个循环置换都可表为对换之积，因此每个置换都可表为对换之积。

定理 2.5 [8]每个置换表成对换的乘积时，其对换个数的奇偶性不变。

定义 2.6 [8]一个置换若分解成奇数个对换的乘积，则称为奇置换；否则称为偶置换。

定理 2.7 [8] r-循环置换的阶是 r；不相连循环置换之积的阶是各因子的阶的最小公倍数。

3. 置换群理论教学方案

首先，为了吸引学生的注意力，更好地开展本节内容的教学，我们从置换群的重要意义和作用出发，强调学习置换群的重要性除了课本上所指出的以外，至少还表现在两个方面：① 近世代数的研究内容是非常抽象的，但置换群是相对具体的群，从置换的乘积到判断置换的奇偶性再到求置换的阶和逆置换都很具体。同时它是元素不是数的一种非交换群，在群的学习中经常被用来举例。② 置换群研究中有一些特殊的研究对象是别的群所不具备的，例如置换中的不动点理论、本原性理论等。置换群中有一些特殊的子群也是一般抽象群所没有的，例如交代群等。

其次，对于置换群及一些引申定义、定理的授课，我们采用纯英文版书书写，中文讲解相结合的方式。一方面让学生熟悉相关的专业术语，为将来的研究生学习生涯做铺垫，另一方面减小翻译带来的误差，提高准确度。在展示完各个定义之后，辅以由简入繁的例子，让学生循序渐进地掌握置换群的内容。为了进一步增加学生对相关内容的理解和把握，教师会在例子之后即兴加入判断题，鼓励学生参与，提高课堂积极性，营造良好的学习氛围。一个抽象的课程如何生动化，学习技巧也很重要，因此教师在课本知识的基础上加入一些自创的学习技巧与方法，学生学起来就会事半功倍。下课前 5 分钟，教师停止讲解内容，时间留给学生消化兼提问。每一堂课的结束都为下一节课的开始做好准备工作。效益循环，学生的学习热情与日俱增。

4. 运算技巧

用循环置换与对换之积来表出置换具有极大的优越性，因为此时，书写大为简化，对于求置换的乘积、置换的阶、逆置换、判断置换的奇偶性都极为便利。此部分，我们将举例阐述《近世代数》置换群中快速地将若干个对换之积表示成 r-循环置换、再将一个 r-循环置换表示成若干个对换之积、最后求出 r-循环置换的逆的技巧与方法。注意到，将若干个对换之积表示成 r-循环置换，以及将一个 r-循环置换表示成对换的乘积是一个双向问题。

4.1. 将若干个对换之积表示成 r-循环置换

在 5 元对称群 S_5 中，以对换(24)，(25)，(12)，(13)为例，计算对换乘积(24) (25) (12) (13)。

① 原始计算方法(即定义法)：

$$(24)(25)(12)(13)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&4&3&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&5&3&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&3&4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&1&4&5\end{pmatrix}.$$

按照映射的对应法则，从右往左合成，则有：

$$\begin{gathered}1\to3\to3\to3\to3,\\2\to2\to1\to1\to1,\\3\to1\to2\to5\to5,\\4\to4\to4\to4\to2,\\5\to5\to5\to2\to4.\end{gathered}$$

整理得，

$$\left(24\right)\left(25\right)\left(12\right)\left(13\right)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&5&2&4\end{pmatrix}=\left(13542\right).$$

② 快速计算方法：准备好恒等置换，将下方一行的数码依次交换 13，12，25，24，即

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&4&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&1&4&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&2&4&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&5&4&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&5&2&4\end{pmatrix}.$$

于是得到，

$$\left(24\right)\left(25\right)\left(12\right)\left(13\right)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&5&2&4\end{pmatrix}=\left(13542\right).$$

4.2. 将 *r*-循环置换表示成对换之积

以上述 5-循环置换 $\left(13542\right)\in S_5$ 为例。

快速计算方法：以第一个数码 1 为基准，将其它数码按照从后往前的顺序与第一个数码配对成对换，即有对换(12)，(14)，(15)，(13)，再按此序相乘即可，即 $\left(13542\right)=\left(12\right)\left(14\right)\left(15\right)\left(13\right)$。可根据对换乘积的定义验证结果的准确性。

注意：将一个置换表示成对换的乘积，表达式是不唯一的，例如由 3.1 节内容知，$\left(13542\right)=\left(24\right)\left(25\right)\left(12\right)\left(13\right)$，此快速计算方法仅提供一种表示形式。

4.3. *r*-循环置换的逆置换

继续以 5-循环置换(13542)$\in S_5$ 为例。由 3.2 节内容知，$\left(13542\right)=\left(12\right)\left(14\right)\left(15\right)\left(13\right)$ 根据乘积的逆是因子逆的反向乘积，又对换的逆是本身，得到，

$$\left(13542\right)^{-1}=\left[\left(12\right)\left(14\right)\left(15\right)\left(13\right)\right]^{-1}=\left(13\right)^{-1}\left(15\right)^{-1}\left(14\right)^{-1}\left(12\right)^{-1}=\left(13\right)\left(15\right)\left(14\right)\left(12\right).$$

再利用 3.1 节的快速计算方法，

$$\left(13\right)\left(15\right)\left(14\right)\left(12\right)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&1&5&3\end{pmatrix}=\left(12453\right).$$

综上，$\left(13542\right)^{-1}=\left(12453\right)$。

5. 教学实践

经过最近三年的教学实践，作者对《近世代数》中置换群就定义法与快速计算法教学实效进行了调研分析。调研对象为上海理工大学数学专业的共 60 名本科生，为了使评价更全面，采用分层、多阶整群随机抽样方法选定调查对象 20 名。依托群体头脑风暴和个别访谈的方法，收集本校教师群体和学生群体对这两种方法的教学实效的看法。调研人员根据讨论结果，制定了《近世代数置换群教学实效调查问卷》。同一时间由调研人员向调查对象统一发放调研问卷。根据调查获得的有效样本，运用统计软件进行数据分析。按照实证研究规范，首先对数据结果进行信度和效度分析。本调研采用 α 信度系数法对调研结果进行信度分析，采用 KMO 值和 Bartlett 球形检验进行效度分析。在数据检测可信、有效的基础上，根据调研数据采取单因素方差分析的思想，利用 SPSS 软件计算调研个体对于定义法与快速计算法的综合评价。调研结果发现，大部分学生认为以上技巧与方法对于学习近世代数课程的置换群理论是有帮助的，这些方法便于记忆，一定程度上简化计算，有助于提升学习效率，同时有助于激发对近世代数课程的学习兴趣，见图 1。

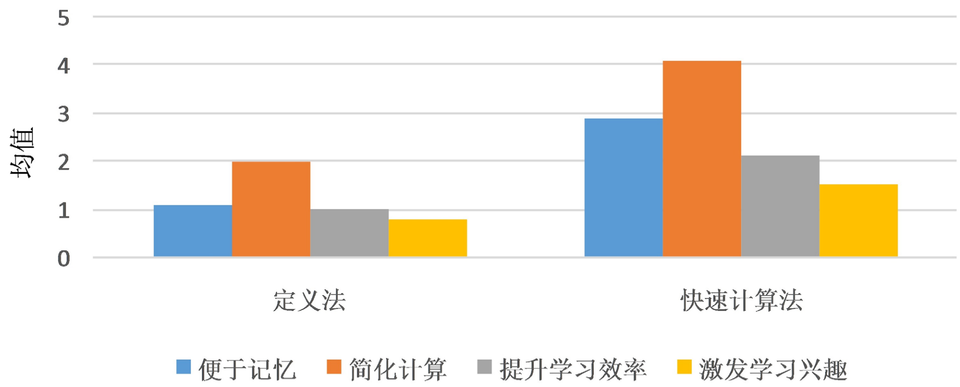

Figure 1. Comparison of teaching effect between definition method and rapid calculation method
图 1. 定义法与快速计算法总体效果对比

6. 结论

本文以《近世代数》置换群中元素的计算实践教学为例，介绍了将若干个对换之积表示成 r-循环置换、将 r-循环置换表示成对换之积、求 r-循环置换的逆的技巧与方法，期望帮助学生化繁为简，体会到理论学习的乐趣。实践证明这些方法与技巧是有意义的，可以激发学生的学习兴趣。从而充分发挥学生在学习过程中的主观能动性。然而近世代数教学是一个完整的教学体系，就整个近世代数教学如何更好地抓住学生眼球，化枯燥为乐趣，寓学于乐，还有很多的方法值得探讨。

致　谢

作者非常感谢相关文献对本文的启发以及审稿专家提出的宝贵意见。

基金项目

上海高校青年教师培养资助计划项目(ZZslg20036)。

参考文献

[1] 王守峰, 杨文凤. 同构思想在高等代数和近世代数教学中的应用[J]. 大学数学, 2019, 35(6): 105-110.
[2] 尹正. 联想类比在近世代数定理证明中的运用[J]. 教育教学论坛, 2020(38): 262-263.
[3] 常娟, 刘云云. 具有代数运算的集合构成群的条件[J]. 科技创新导报, 2019(17): 209-211.
[4] 郑华, 罗亮, 孙宇锋. 基于 Galois 理论的抽象代数本科教学改革和研究[J]. 教育教学论坛, 2020(37): 172-173.
[5] 王保红, 魏屹东. 对抽象代数的哲学审视[J]. 自然辩证法研究, 2008, 9(24): 26-31.
[6] 吴伟才, 谢卫军. 抽象代数中群论教学的一点思考——带有一种代数运算的二元集[J]. 产业与科技论坛, 2020, 19(13): 211-212.
[7] 王贵栋. 基于创新能力培养的近世代数教学设计[J]. 创新教育研究, 2021, 9(6): 1890-1894. https://doi.org/10.12677/CES.2021.96315
[8] 杨子胥. 近世代数[M]. 第四版. 北京: 高等教育出版社, 2020.