Creative Education Studies 创新教育研究, 2022, 10(10), 2535-2543
Published Online October 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2022.1010399

Hans汉斯

从三角形面积看数学思维的培养

张　昕，刘海明*，董梦莹

牡丹江师范学院，数学科学学院，黑龙江 牡丹江

收稿日期：2022年9月14日；录用日期：2022年10月17日；发布日期：2022年10月25日

摘　要

三角形面积，既有代数意义，又有几何意义，从数与形的角度，可以很好的把握数学思维。本文根据不同年龄学生的认知水平和不同年级的实际教学情况，从培养学生数学思维的角度，分析并讨论三角形面积的求解方法，深入研究三角形面积在不同学段的教学重点与求解方法的发展过程。小学阶段主要以培养计算能力为主，用基本公式求解三角形面积；中学阶段逐步量化，解析几何成为学习重点，常与其它知识相结合求解三角形面积；大学阶段的数学是高维度的数学，从定积分与空间解析几何角度求解三角形面积。在研究中得到三角形面积的学习过程，适应学生发展需要，对学生的逻辑思维、抽象思维、创新思维等数学思维起到促进作用，在解决实际问题、学生未来从业等方面具有重要意义。

关键词

三角形面积，数学思维，解析几何，学生特点

The Development of Mathematical Thinking from the Area of Triangles

Xin Zhang, Haiming Liu*, Mengying Dong

School of Mathematical Sciences, Mudanjiang Normal University, Mudanjiang Heilongjiang

Received: Sep. 14th, 2022; accepted: Oct. 17th, 2022; published: Oct. 25th, 2022

Abstract

The area of triangle, which has both algebraic and geometric meanings, can be well grasped from the perspective of number and shape for mathematical thinking. In this paper, according to the cognitive level of students of different ages and the actual teaching situation of different grades, we analyze and discuss the solution methods of triangle area from the perspective of cultivating

*通讯作者。

文章引用: 张昕, 刘海明, 董梦莹. 从三角形面积看数学思维的培养[J]. 创新教育研究, 2022, 10(10): 2535-2543.
DOI: 10.12677/ces.2022.1010399

students' mathematical thinking, and study in depth the development process of teaching focus and solution methods of triangle area in different grades. At the elementary school level, the main focus is on cultivating computational ability and using basic formulas to solve triangle area; at the secondary school level, the analytic geometry becomes the focus of learning gradually and is often combined with other knowledge to solve triangle area; at the university level, the mathematics is a high-dimensional mathematics and triangle area is solved from the perspective of definite integral and spatial analytic geometry. The learning process of getting triangle area in the study, adapting to the development needs of students, plays a role in promoting students' logical thinking, abstract thinking, innovative thinking and other mathematical thinking, and is of great significance in solving practical problems and students' future practice.

Keywords

Triangle Area, Mathematical Thinking, Analytic Geometry, Student Characteristics

1. 引言

纯数学是抽象的科学，对数学学习者来说，除了掌握知识，数学思想是必须具备的思维特征，它是数学产生和发展过程中必须依赖的思想[1]。教学中，学生数学思维的形成离不开数学知识的积累，但获得知识并不代表形成思维。很多数学知识都有“数”和“形”两个特征[2]，数形结合思想始终是课程标准强调的思维方式，著名数学家华罗庚曾说：“数以形而直观，形以数而入微。”因此，要想理解数学知识的本质，培养学生的数学思维，需要从数与形两个角度认识把握。

为什么要研究三角形面积，因为求三角形面积的过程把“数形结合”思想表现的淋漓尽致。三角形属于几何内容，它的研究路径是从图形本身出发，由定性到定量，在培养学生的数学思想与创造性思维上具有典型性与示范性，在中学数学中十分重要。同时，利用面积法解题是中高考的重点内容，三角形面积是最常用的手段之一，常常与动点问题、函数问题等非几何问题相联系。

本文以三角形面积为主要研究对象，探讨它在不同学段的不同求法，感受同一知识在教育教学上的“演变”过程，数形结合，层层递进，在几何与代数的相互转化中，培养学生的数学思维，发展学生的直观想象、逻辑推理等数学核心素养。

2. 不同学段的三角形面积

对于三角形面积，第一次文献记载是在公元 5 世纪，古印度著名数学家阿耶波多在他的《阿里亚哈塔历书》中给出了三角形求面积的公式，即三角形面积等于二分之一倍的底乘高。中国南宋著名数学家秦九韶也创用了“三斜求积术”，给出了已知三角形的三边求三角形面积的公式，也即古希腊的海伦公式。各时期的数学家们在三角形面积上做出的贡献，对现代数学发展产生重要影响。

现代数学教育的学习，不再是被动的吸收知识，而是在原有知识经验的基础上同化并重新构建知识。简单来说，学生在学习数学知识时，总要以背景知识为基础进行联系。对于“求解三角形面积”，小学到大学均有涉猎，学生从认识三角形开始学习，结合生活经验，抽象出三角形面积公式，再与函数、向量等非几何问题相结合，将几何问题转化为代数问题，用代数学方法计算证明，量化数学，理解数学。

2.1. 小学阶段

小学数学教育属于启蒙教育，小学生具有建构性的数学知识性质观，并随年级升高而发生变化，但从整体上看仍然比较朴素，具有一定的直观性和肤浅性[3]，数学知识的逻辑顺序和学生的认识顺序制约着他们的学习过程。小学时期儿童的思维特点是从具体形象思维出发，逐渐过渡到抽象思维[4]，但是这种抽象思维很大程度上仍与感性经验相联系，仍具有很大的具体形象性，因此从几何角度解决数学问题是小学教育的重要手段。直观感受比逻辑更加真实[2]，更能让学生理解接受数学中抽象的概念、定理、公式，推动对数学本质的理解，形成数学思维，获得更好的数学学习效果。

《义务教育数学课程标准(2022)》强调，图形与几何是义务教育阶段最重要的学习内容之一，它在小学阶段主要包括图形的“认识与测量”、“位置与运动”两个主题。在图形的认识与测量上，要求学生能掌握一些常见图形的周长、面积和体积的计算，能在推导计算方法的过程中，感悟数学度量方法，逐步形成量感和推理意识[5]。小学生学习几何知识往往从认识图形开始，利用图形描述分析数学问题，进而解决数学问题。同时，小学阶段的数学教学重视加强计算能力，数学题也以“套公式计算”为主，对于“三角形面积”，主要学习“三角形面积的基本公式”。

以五年级上册人教版数学教材的教学设计为例，学生在学习三角形面积之前，已经掌握了基本运算方法，认识了底和高的概念，知道了平行四边形面积的求法与公式。在教学中，从生活出发，以学生的红领巾为例，红领巾是平行四边形，将其对折后的图形是三角形，平行四边形的面积公式已知，对应三角形的面积为该平行四边形面积的一半，那么求三角形面积的公式也容易理解了。即在三角形 ABC 中，AH 为三角形 ABC 的高，垂足落在 BC 边上，则有三角形面积的基本公式为

$$S_{\text{三角形}ABC}=\frac{1}{2}\times BC\times AH \tag{1}$$

在数学学习过程中，通过数形结合的手段，强化思维深度，借助一定的数学场景，引导学生动手实践，用“数学”的方式理解三角形面积计算公式的含义，在分析问题、解决问题的过程中培养数学思维[6]。

2.2. 初中阶段

初中生正处在青春期的初始阶段，随着神经系统的发育，感觉器官逐渐完善，学生的感知与认知能力得到了一定的发展。在这时期，学生的生理与心理都会发生很大的变化。从小学升到初中，新环境、新同学、新老师、新学科等外在因素都会让学生感到好奇，处于一种兴奋状态[7]。同时初中的教学方法与小学相比有很多不同，知识点容量变大，难度有所提升，教学进度加快等等。然而大部分初中生还没有从小学的学习状态中调整过来，学习方法单一，主动性不强[7]，知识点联系不紧密，必然得不到很好的学习效果，更不用提发展学生的数学思维了。初中阶段的学习过程中，每一个环节都必然存在着由形象思维向抽象思维的转化，但学生在认识事物上的概括性和抽象性仍然不足，还需要依靠直观理解把握。

“图形与几何”仍然是初中阶段的教学重点，经过小学的学习，学生形成了初步的空间观念与几何直观。《义务教育数学课程标准(2022)》强调，“图形与几何”关注的主题变为图形的性质、变化和坐标，从演绎证明、运动变化、量化分析三个角度研究图形的相互关系和基本性质，学生在原有空间观念的基础上进一步建立几何直观，提升抽象能力和推理能力[5]。

关于三角形，初中时期的学习重点落在了研究边和角的关系上，比如全等三角形与相似三角形的判定定理，这种认知属于相对模糊的定性认知，并没有实现完全量化。同时，数学教学不再单纯研究某一具体图形，而是一些更为复杂和抽象的问题，包括图形的转化，与函数相结合等。不同知识点的连接通

道是“平面直角坐标系”。“平面直角坐标系”是 1637 年法国数学家笛卡尔发明的，他的核心思想是把几何问题转化为代数问题，用代数学的方法计算与证明。由此可见，数学教学开始逐渐量化。

对于求解三角形面积，初中常用的公式仍为简单的基本公式，但求面积所需的条件不再直接给出，需要学生自己利用所学知识寻找，有很强的技巧性。例如，动点问题中，将三角形面积与变量相结合得到函数关系式，求得问题结果；再比如运用化归与转化思想研究四边形，通过添加辅助线，把四边形问题转化为三角形问题等[8]。中考题中涉及面积的题目往往具有很强的综合性，也常常与动点问题、最值问题、三角函数等结合考察，知识点的抽象性逐渐加深，与此同时，利用三角形面积也可以解决很多非面积的问题，也是中考的重点知识。在解题教学中，教师要能从多元角度分析问题，巧用模式变换，用多样的方式来引导问题的解决，潜移默化的对学生的数学思维产生影响，同时，鼓励学生自己对所学内容和解题思路归纳总结，激发思维灵活性，培养学生的逻辑思维[9]。

例 1：如图 1，三角形 AOB 中， A, B 两点的坐标分别为 $(2,4),(6,2)$，求三角形 AOB 的面积。

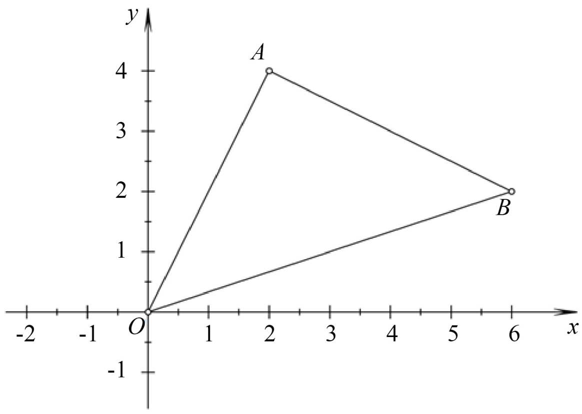


Figure 1. Triangles AOB in a right-angle coordinate system
图 1. 直角坐标系中的三角形 AOB

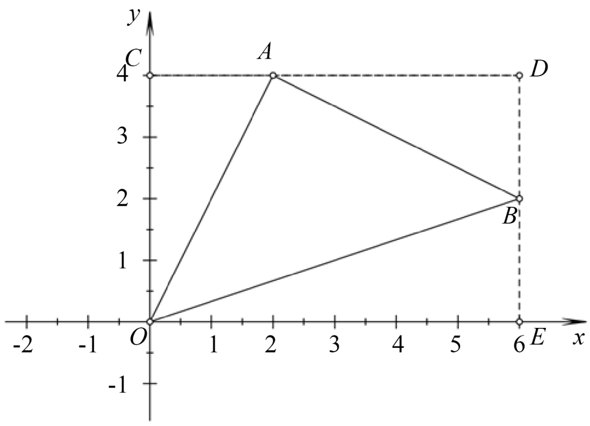


Figure 2. Add auxiliary lines to **Figure 1** to form a rectangle
图 2. 对图 1 增加辅助线形成矩形

分析：此类题便是经典的化归与转化的问题，无法直接套公式计算，常用平面几何的方法来解决，即三角形 AOB 的面积可以看作一个长方形面积减去一些小三角形的面积。

解：如图 2，构造长方形， C, D, E 三点的坐标分别为 $(0,4),(6,4),(6,0)$。长方形 $OCDE$ 的面积

$S_{\text{长方形}OCDE}=OC\times OE=4\times 6=24$。三角形 AOC 的面积 $S_{\text{三角形}AOC}=\frac{1}{2}\times OC\times AC=\frac{1}{2}\times 4\times 2=4$。三角形 ADB 的面积 $S_{\text{三角形}ADB}=\frac{1}{2}\times AD\times DB=\frac{1}{2}\times 4\times 2=4$。三角形 BOE 的面积 $S_{\text{三角形}BOE}=\frac{1}{2}\times OE\times BE=6$。故有三角形 AOB 的面积为

$$S_{\Delta AOB}=S_{\text{长方形}OCDE}-S_{\Delta AOC}-S_{\Delta ADB}-S_{\Delta BOE}=10\text{。}$$

2.3. 高中阶段

高中阶段，学生处于生理与心理发育趋于成熟的时期[10]，但从数学思想与数学思维上看，仍然保留着一定的形象性，由形象思维向抽象思维过渡也仍然是高中的主要教学任务之一，实际的教学顺序要符合高中学生的认知方式与年龄特点，从具体到抽象，从特殊到一般[10]。学习是一个连续的过程，高中数学的学习是在小学、初中的基础上进一步进行的。与初中相比，高中数学知识的容量、难度、逻辑性、抽象性等特点更加突出，与此同时，高中学习时间有限、氛围紧张、升学压力大，这都是不可避免的外在因素。但令人高兴的是，大部分高中生都能明确认识到自身的学习任务，对自己提出高要求，学习动机较为稳定，自我监控意识也达到了较高水平[11]，这对于教学推进、培养学生数学思维与核心素养是十分有利的。

“几何与代数”是高中数学的课程主线之一。《普通高中数学课程标准(2017)》强调，“在必修课程与选择性必修课程中，要突出几何直观与代数运算之间的融合，即通过形与数的结合，感悟数学知识之间的关联，加强对数学整体性的理解”[12]。高中时期，学生对于三角形的学习，从初中相对模糊的定性学习，逐渐走向“精确”定量学习，比如已知三条边可以确定三个角，这是一种量化的过程。有关于三角形面积，它属于解析几何部分内容。高中的解析几何可以简单理解为用代数方法研究平面几何，实现代数与几何的相互转换，核心仍为数形结合思想[13]。从高中生的知识背景上看，小学和初中有关解析几何的知识零零散散，它就像一门新学科贯穿于整个高中数学，在三角形面积上有所体现。利用“面积法”解决问题、三角形面积的最值问题等都是高考的热点题型。同时，比起小学初中，三角形面积的求解方法多种多样，例如正弦定理、海伦公式、距离公式等，在画有圆锥曲线的坐标系上看到三角形也是再平常不过的事。像是这种“一题多解”，学生在确定解题思路时，要用到分析、综合、演绎、归纳等思维方法，解题能力与数学思维密不可分，通过提高计算速度、举一反三、创新解法等学习手段可以培养学生的数学思维，同时学生看待问题的全面性与批判性也是影响数学思维的关键因素[14]。对高中生而言，知识的增厚与方法的多变，都是发展数学抽象思维、逻辑思维、创新性思维的最强有力的手段。

下面仍以例 1 为例，用高中学习的两种方法求解三角形面积。

方法一：利用点到直线距离公式、两点之间距离公式进行求解。

解：如图 3 所示，过点 A 做高线，垂足为点 G，$AG\perp OB$。已知点 $B(6,2)$，直线 OB 的方程为 $\frac{y-0}{2-0}=\frac{x-0}{6-0}$，即 $y=\frac{1}{3}x$，再利用两点之间距离公式得到，线段 OB 的长度 $l_{OB}=\sqrt{(6-0)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{10}$；由点到直线距离公式得到点 A 到 OB 的距离，即线段 AG 的长度为 $l_{AG}=\sqrt{10}$。则有三角形 AOB 的面积为 $S_{\text{三角形}AOB}=\frac{1}{2}\times l_{OB}\times l_{AG}=10$，求解完毕。

方法二：利用正余弦定理推导出的三角形面积公式求解。

解：由方法一知，线段 AG 的长度为 $l_{AG}=\sqrt{10}$，由勾股定理可知 OA,OB 的长度分别为 $l_{OA}=2\sqrt{5}$，$l_{OB}=2\sqrt{10}$，得到 $\sin\angle AOB=\frac{l_{AG}}{l_{OA}}=\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 $\angle AOB=45^{\circ}$，所以三角形 AOB 的面积为

$S_{三角形AOB}=\frac{1}{2}\times l_{OA}\times l_{OB}\times\sin\angle AOB=10$。

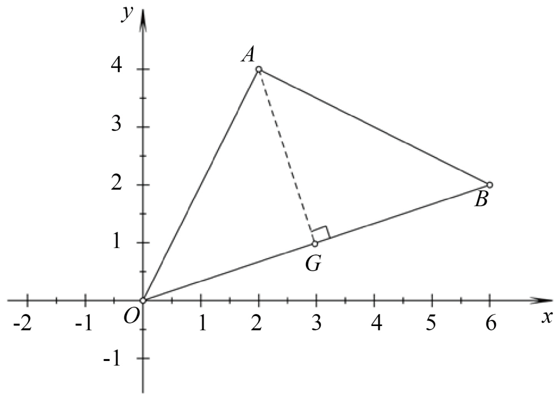


Figure 3. Adding auxiliary lines AG to **Figure 1**
图 3. 对图 1 增加辅助线 AG

2.4. 大学阶段

当代大学生正值青年，这是人生的过渡期，也是真正实现“心理性断乳”的人格再构期，他们的个性心理更加开放，逐渐独立，开始关心社会[15]。大学与小初高不同，小初高以数学为主科，是每位学生都必须学习并学好的内容。而大学有不同的专业，对应着不同的就业发展方向，绝大多数理工科专业都要以大学数学为基础[16]。同样高等数学课也已经成为本科生必要的基础课程，学习大学数学并不仅仅为了掌握知识，在探讨数学的过程中所获得的思想方法才是重中之重，它对于培养学生逻辑思维能力、创造性思想以及未来从业、解决现实问题等，都具有实际意义。因此，数学教学不仅仅是知识的传授，还要让学生的能力、素养等方面都得到一定的提升[16]。

对于三角形面积，大学阶段常用的求解方法主要有两种：一个是用向量外积求解三角形面积，这种方法突破二维空间的限制，到更高维的空间中探讨几何问题，探讨三角形面积问题；同时，微积分思想借鉴了古希腊的安提丰和欧多克斯所提出的内接多边形接近圆的思想，用无穷逼近的方法求曲线包围的面积和体积[17]，因此，利用定积分的几何意义，求解函数图像上对应的三角形面积是第二个方法。当然，大学数学更加抽象，教学也要尽量结合现实原型与实际背景，发展学生的想象力和更高层次的思维能力。

下面仍以例 1 为例，求解三角形面积。

方法一：用向量外积求解三角形 ABO 的面积。

解：在平面直角坐标系上，已知 A,B,O 三点的坐标分别为 $(2,4),(6,2),(0,0)$，且 $\angle AOB=45^\circ$，则向量 $\boldsymbol{OA}=(2,4)$，向量 $\boldsymbol{OB}=(6,2)$，则三角形 ABO 的面积

$S_{三角形ABO}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{OA}\times\boldsymbol{OB}|=\frac{1}{2}|\boldsymbol{OA}|\times|\boldsymbol{OB}|\times\sin\angle AOB=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times2\sqrt{10}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=10$，其中 $|\boldsymbol{OA}|,|\boldsymbol{OB}|$ 为向量模长；

或 $S_{三角形ABO}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{OA}\times\boldsymbol{OB}|=\frac{1}{2}\times\left\|\begin{matrix}2&6\\4&2\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\times|-20|=10$。

方法二：用定积分求解三角形 ABO 的面积。

解：如图 4 所示，过 A 点作一条垂直于 x 轴的直线，与 OB 交于点 P，已知 A,B,O 三点的坐标分别为 $(2,4),(6,2),(0,0)$，直线 OB 的方程为 $y_{OB}=\frac{1}{3}x$，则有直线 OA 的方程为 $\frac{y_{OA}-0}{4-0}=\frac{x-0}{2-0}$，即 $y_{OA}=2x$，

直线 AB 的方程为 $\frac{y_{AB}-4}{2-4}=\frac{x-2}{6-2}$，即 $y_{AB}=-\frac{1}{2}x+5$，故三角形 ABO 的面积为

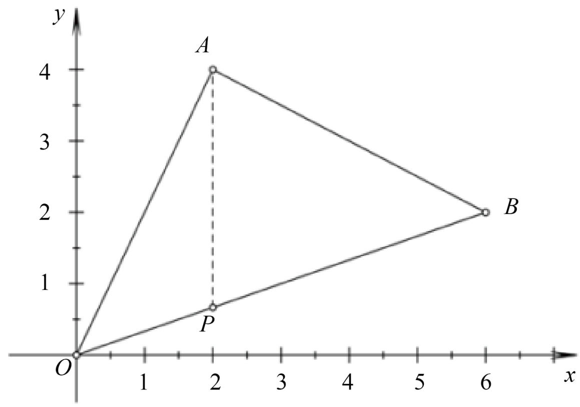


Figure 4. Adding auxiliary lines AP to **Figure 1**
图 4. 对图 1 增加辅助线 AP

$$\begin{aligned}S_{\text{三角形}ABO}&=S_{\text{三角形}AOP}+S_{\text{三角形}ABP}=\int_0^2\left(y_{OA}-y_{OB}\right)\mathrm{d}x+\int_2^6\left(y_{AB}-y_{OB}\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^2\left(2x-\frac{1}{3}x\right)\mathrm{d}x+\int_2^6\left(\left(-\frac{1}{2}x+5\right)-\frac{1}{3}x\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^2\left(\frac{5}{3}x\right)\mathrm{d}x+\int_2^6\left(-\frac{5}{6}x+5\right)\mathrm{d}x\\&=\left(\frac{5}{6}x^2\right)\Bigg|_0^2+\left(-\frac{5}{12}x^2+5x\right)\Bigg|_2^6=\frac{10}{3}+\frac{20}{3}=10\end{aligned}$$

在大学阶段培养学生的数学思维，需要类比、归纳、转化等的数学方法。在上述例题中可以看到，解题的过程是代数与几何相互转换的过程，它比中学阶段的转换更加高级，从空间角度、微观角度看基础问题，对发展学生的数学思维具有重要意义。

3. 结论

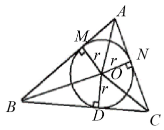
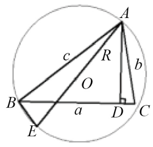
3.1. 求三角形面积的方法的演变

按照不同学段，给出部分“求解三角形面积”的方法[18]，如下表 1 所示。

Table 1. Triangle area solving method
表 1. 三角形面积求解方法

学段	方法	求解过程
小学阶段	三角形面积基本公式	$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\times$底$\times$高
中学阶段	化归与转化	添加辅助线，构造可直接求面积的、与所求三角形有关的多边形，推导三角形面积。
	坐标法	在平面直角坐标系上，找到三角形三个顶点的坐标，结合几何关系求解。
	海伦公式或秦九昭三斜求积公式	已知三角形三边为 a,b,c，则 $S_{\Delta}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$。

Continued

	三角形内切圆 	如图所示，圆 O 为三角形 ABC 的内切圆，半径为 r，则 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}(AB+AC+BC)=\frac{1}{2}\times r\times l_{\Delta ABC}$，其中 $l_{\Delta ABC}$ 为三角形 ABC 的周长。
	三角形外接圆 	如图所示，圆 O 为三角形 ABC 的外接圆，半径为 R，则 $S_{\Delta ABC}=\frac{abc}{4R}=2R^2\sin A\sin B\sin C$。
	三角函数中的正弦定理	已知三角形 ABC 三边为 a,b,c，则 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B$。
大学阶段	向量法	向量外积求三角形 ABC 的面积 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\lvert \boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{AC}\rvert$。
	定积分	定积分的几何意义为被积函数与坐标轴所围图形的面积，直接求对应函数积分即可。

关于求三角形面积，小学时期学生的认知水平比较薄弱，它的教学重点也仅以计算为主，因此小学阶段主要学习三角形面积的基本公式，从几何到代数，数学开始量化；中学阶段，开始研究三角形的边和角的关系，这倾向于模糊定性，但在学习了平面直角坐标系和圆的相关性质后，通过逻辑推理得到不同角度的三角形面积求法，将几何与代数紧密相连，数学进一步实现量化；大学阶段的三角形面积，一方面结合空间解析几何，是小初高几何内容的进一步深化，另一方面与定积分相联系，强调知识点的代数意义与几何意义，实现了图形与数的相互转化，体现数学的抽象性。

好的教学方法一定会遵循学生的认知发展规律，同一个数学知识，不同学段会有不同的表现形式。三角形面积求法，从小学到大学都有涉猎，每个学段对应着不同的方法，使用的数学工具与数学语言也更加高级。这种教学安排，一方面与学生的认知发展水平有关，另一方面也体现了数学知识的整体性和系统性，体现了不同学段的数学知识之间并不是分散的，而是紧密相连的。这种从模糊定性到精确定量的过程，在培养学生的数学思维方面，具有重要意义。

3.2. 从三角形面积看数学思维

华罗庚教授曾说：“学习是一个由薄到厚，再由厚到薄的过程。”通过对三角形面积解法的积累，数学学习由“薄”到“厚”，将不同知识与三角形面积相连接，知识又从“厚”到“薄”，使学生建立知识网络，这是一个系统的过程。完善的数学知识经验依靠系统化的学习，是培养学生的创新思想与应用意识、使学生的心理和行为发生持久性的变化的有效手段。数学的教学重点从短期来看虽为解题与应试，但从长远来看还是思考问题与解决问题，如何培养学生的数学思维是数学教学的主要任务之一。

小学阶段是培养学生数学思维的初始阶段，从认识三角形出发，学习它的周长与面积公式，学会用公式计算几何特性，这是知识量化的开始，也是学生抽象思维的开始。中学阶段开始接触解析几何，将三角形面积与坐标系、函数、圆等数学内容相联系，学会运用转化与化归思想解决面积问题，这是几何的进一步量化，在这个过程中，学生的逻辑思维能力得到提升，能理解抽象的数学意义，对于同一个知

识点的不同解法，也有利于学生创造性思维的培养。大学时期，学生从空间解析几何角度、从积分与代数角度学习三角形面积，高维度的数学知识进一步培养学生的数学思维，理解数学抽象。

总之，三角形面积的学习过程，是数学发展历程的缩影，从相对模糊的定性研究到逐渐精确的定量研究，使用的数学工具与数学语言更加高级，对锻炼学生的数学思维有着重要作用。见微知著，对数学整体而言，同一知识贯穿于不同学段，使学生构建起完整的知识体系，结合学生的认知水平和理解能力，逐步培养学生的数学思维，具备良好的数学素养，对解决实际问题，未来从业等方面具有重要意义。

4. 基金项目

黑龙江省教学改革一般项目(SJGY20210906)，中央财政支持地方优秀青年人才项目(ZYQN2019071)，黑龙江省大学生创新项目(S202210233058)。

参考文献

[1] 屈佳芬. 数学思想在小学数学教学中的渗透[J]. 教育探索, 2015(1): 41-43.

[2] 蔡宏圣. 几何直观: 小学数学教学的视角[J]. 课程·教材·教法, 2013, 33(5): 109-115.

[3] 李琼. 小学生数学学习观: 结构与特点的研究[J]. 心理发展与教育, 2006(1): 63-68.

[4] 冯崇和. 几何直观: 探索解决小学数学问题的重要手段[J]. 内蒙古师范大学学报(教育科学版), 2014, 27(8): 120-123.

[5] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022 年版) [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022: 27-35+62-72.

[6] 朱阳金. 试论小学数学教学中学生数学思维能力的培养[J]. 教育教学论坛, 2012(40): 102-103.

[7] 靳俊友, 王明平. 初中学生"生理-心理-行为"发展特点及教育对策[J]. 中国教育学刊, 2019(S1): 12-13+30.

[8] 于永莲. 数学思想方法在初中数学问题解决教学中的应用[J]. 内蒙古师范大学学报(教育科学版), 2012, 25(2): 145-146.

[9] 王斌. 初中数学教学中学生数学思维能力培养策略探究[J]. 吉林省教育学院学报, 2021, 37(7): 11-14.

[10] 饶汉昌. 高中数学新教材体系问题研究[J]. 课程·教材·教法, 1998(9): 31-36.

[11] 黄友初. 高中生自主学习数学现状的调查研究[J]. 数学教育学报, 2010, 19(2): 70-72.

[12] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2018: 20.

[13] 李铁安, 宋乃庆. 高中解析几何教学策略——数学史的视角[J]. 数学教育学报, 2007(2): 90-94.

[14] 叶培钧. 数学思维结构与解题能力培养[J]. 西藏大学学报(汉文版), 1993(4): 23-28.

[15] 崔景贵. 当代大学生心理发展特点与高等教育新理念[J]. 高教探索, 2005(1): 83-87.

[16] 李大潜. 漫谈大学数学教学的目标与方法[J]. 中国大学教学, 2009(1): 7-10.

[17] 陈跃. 从历史的角度来讲微积分[J]. 高等数学研究, 2005(6): 47-50+54.

[18] 聂德升. 三角形面积多种求法的探究[J]. 数理化学习(教研版), 2017(9): 91-92.