

基于PBL教学法的高中数学文化教学研究

张 昕, 董梦莹, 刘海明*

牡丹江师范学院, 数学科学学院, 黑龙江 牡丹江

收稿日期: 2023年2月13日; 录用日期: 2023年3月15日; 发布日期: 2023年3月23日

摘 要

数学文化中蕴含着丰富的数学精神, 作为数学体系的一部分, 在培养学生数学核心素养等方面具有重要作用。为了进行数学文化教育, 将PBL教学法引入高中数学教学, 分别介绍数学文化理念与PBL教学法的内涵及该教学模式的教学流程, 主要包括: 创设情境与导入问题, 探究合作与组建小组, 问题解决与问题延伸, 成果总结与评价反思。在这四个教学环节中贯彻数学文化底蕴, 可以有效促进数学课堂的教学有效性, 实现对学生的数学文化教育。

关键词

数学文化, PBL教学法, 高中数学教学

The Research of High School Mathematics Culture Teaching Based on PBL Teaching Method

Xin Zhang, Mengying Dong, Haiming Liu*

School of Mathematical Sciences, Heilongjiang Normal University, Mudanjiang Heilongjiang

Received: Feb. 13th, 2023; accepted: Mar. 15th, 2023; published: Mar. 23rd, 2023

Abstract

Mathematics culture contains rich mathematics spirit, as a part of mathematics system, plays an important role in cultivating students' mathematics core quality and so on. In order to carry out mathematics culture education, PBL teaching method is introduced into senior high school ma-

*通讯作者。

thematics teaching, and the connotation of PBL teaching method and the teaching process of this teaching mode are introduced respectively, including: creating situation and leading into problems, exploring cooperation and forming groups, problem solving and problem extension, conclusion, evaluation and reflection of results. Carrying out the mathematical culture in these four teaching links can effectively promote the effectiveness of mathematics classroom teaching and realize the mathematical culture education for students.

Keywords

Mathematical Culture, PBL Teaching Method, High School Mathematics Teaching

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

美国数学会主席魏尔德曾说：“数学是一种会不断进化的文化。”美国拓扑学家怀尔德认为，数学是一个不断发展变化的文化系统，由其内部力量与外部力量共同作用，数学是一种文化现象成为人们的共识。张奠宙先生曾说：“教育是文化现象的一部分。”通过数学教育，用它特有的符号和逻辑，影响着人们的思维方式与价值观念，进而认识世界，改变世界。最新版《普通高中数学课程标准》强调“将数学文化融入高中数学课程内容”[1]，同时对数学文化给出了明确的定义。因此，数学文化作为一种数学理念，教学中浸润数学文化，在培养学生的核心素养，落实立德树人等方面具有重要意义[2]。

要想实现数学文化理念融入高中数学教学，那便离不开数学课堂，在融入的过程中存在很多问题，一方面，数学被看作是考试工具，教学过分关注解题技能，数学文化被忽视，这是应试教育思想留下的弊端；另一方面，数学文化与课堂教学融入方式过于简单化，很多教师只是将数学史作为故事讲给学生，其中的精神、思想，甚至是数学家们的发现过程都没有融入其中，长此以往，数学文化融入数学教学仍然是难以实现的愿望[3]。针对上述问题，PBL教学法进入了教育研究者的视野。所谓PBL教学法，是基于问题的教学方法。就像哈尔莫斯所说：“问题是数学的心脏。”用“问题”来驱动数学教学，它的设计过程蕴含丰富的数学文化。

本文在此提出以PBL教学法为辅助工具，将数学文化理念融入到数学教学中，实现知识与文化相结合，促进数学教学中的文化教育，进而培养学生的核心素养。

2. PBL教学法与数学文化理念

2.1. PBL教学法的内涵

PBL (Problem-Basing Learning)教学法是一种以问题为基础，以学生为中心的教学方法，也被称为“问题引导式学习法”。该教学法发源于上世纪60年代末，由美国南伊利诺斯大学的霍华德·巴罗斯和安·科尔森博士提出，最初主要应用于医学教育领域，后来也被广泛应用于中小学教育[4] [5]。图1为PBL教学法的核心内容。

PBL教学法以问题驱动、主体参与性为原则，改变了传统的教学模式，学生在与教师的交流中对问题主动探究，调动学习自主性，将数学理论联系生活实际，形成开放思维和团队意识，培养学生逻辑推理等方面的能力。

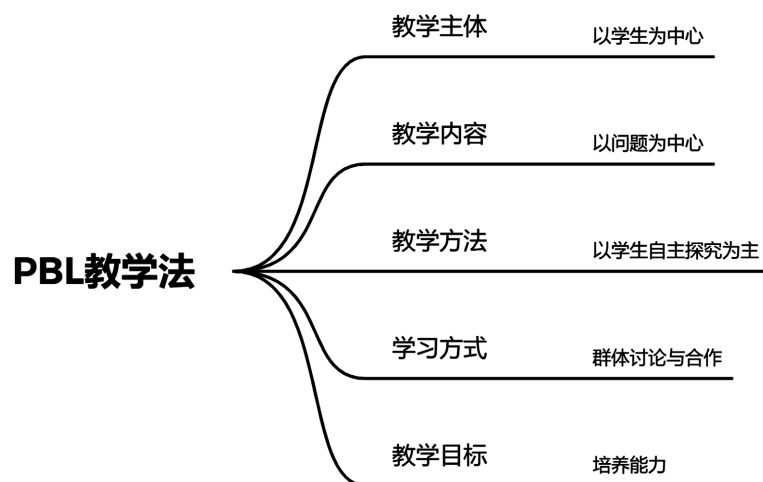


Figure 1. Connotation of PBL teaching method

图 1. PBL 教学法的内涵

2.2. 利用 PBL 教学法实现数学文化教育的必要性

要想实现数学文化理念融入高中数学教学，首先要清楚数学文化究竟是什么，包含了哪些元素。自上个世纪 80 年代末 90 年代初，我国学者开始涉足数学文化领域的研究。发展至今，与数学文化有关的研究综述已经达到上千篇，各个国内、国际学术活动也经常举办，但是由于不同的研究者立场不同，对于数学文化内涵的表述始终无法趋于一致，归纳起来主要有三种代表性定义[6] [7] [8]，如下表 1 所示。

Table 1. A framework for classifying the cultural connotations of mathematics

表 1. 数学文化内涵的分类框架

类别	描述
数学学科与文化	从实用角度出发，“数学文化”是一种能把数学与其他文化联系起来观念与认识。
文化的数学	从数学共同体的角度出发，“数学文化”就是数学共同体所持有的行为、观点、态度等。
数学文化的价值	基于育人角度，“数学文化”是指数学的思想、精神、方法等，及其形成与发展，还包含数学家、数学史、数学美、数学教育、数学发展中的人文成分等。

上述三种关于数学文化内涵的看法，站在不同的角度，丰富加深了人们对数学文化的认识，最新版的普通高中数学课程标准中对“数学文化”的概念也融合了上述三种定义，体现了数学的人文价值与科学价值。

在数学教育中渗透数学文化是很有必要的，它能让学生在学的过程中看到数学并不是凭空而来，蕴含着数学家们的伟大智慧和不懈追求，第斯多惠曾说：“教学的艺术不只在于传授本领，还在于激励、唤醒、鼓舞”，因此数学文化在激励学生学习数学，增强学生数学意识，了解数学的应用价值，形成数学能力等方面起着重要作用[9]。抓住数学文化理念中各要素的特点，利用 PBL 教学法，在培养高中学生的数学核心素养等方面起着重要作用。

随着我国教育文化研究的不断深入，积攒已久的数学教学问题和教师教学理念不断发展更新，数学课程改革也出现了许多新景象。但是应试教育背景下的高中数学仍然存在很多问题[10]，像是“数学文化”，一方面是新课标强调的重点，另一方面瞄准高考的数学教育无法很好顾及。既要实现数学文化的融入，又要保持数学本身特有的抽象性、逻辑性等性质，PBL 教学法是达成目标的最好方式[11]。首先，PBL 教学法体现出一定的问题意识，它能培养学生创新思维、批判思维和逻辑思维；其次，它所强调的“以

学生为中心”，能充分调动学生的主动性，提高数学课程的有效性；同时，PBL 教学法关注现实问题，强调“实践”和解决实际问题，学以致用，符合数学教学“理论联系实际”的基本原则，具有很好的适应性。当然，PBL 教学法只是一种“工具”，最终目的仍是实现数学的文化教育。

3. 基于 PBL 教学法实现数学文化教育的实施策略

PBL 教学法以问题为主线，强调学生合作探究、主动参与，瑞士著名心理学家皮亚杰曾说：“一切真理要由学生自己获得，或由他们重新发现，至少由他们重建。”将此观点落实在数学教学中，就要经历知识的产生过程，重走数学家们的发现之路，体会他们的探究精神，看到数学的文化价值，感受数学美，这个过程是数学文化的融入过程。教学中的 PBL 教学法，课堂讨论是手段，问题设计是关键，设计合适的问题，引导学生积极思考，进行“有指导的再创造”。

3.1. PBL 教学模式及设计流程

PBL 教学模式存在两个经典模型，首先是巴罗斯五步模型，教学流程为组织学习小组、开始新问题、问题解决、展示成果、总结反思；另一个是 3C3R 问题设计模型，3C 是“核心”，指的是问题中的内容、情境和问题中各元素之间的关系，3R 是“过程”，指的是问题解决过程中的研究、推理与反思[12]。基于两个教学模型，提出 PBL 教学法的设计流程，如图 2 所示。

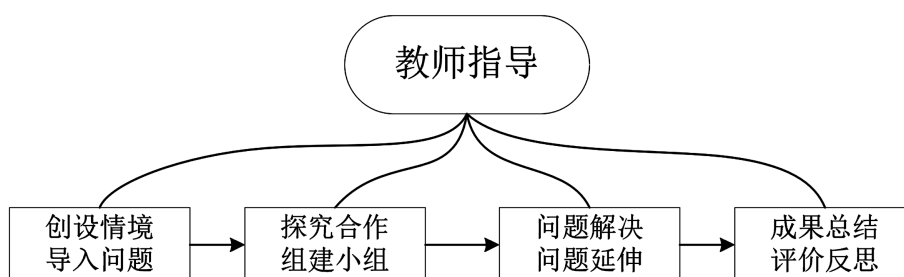


Figure 2. Flow chart of PBL teaching model

图 2. PBL 教学模式流程图

PBL 教学过程始终在教师的指导下进行。1) 创设情境，导入问题；适宜的导入是一堂好课的开始，它能调动学生的学习兴趣，激活学生的数学思维，有利于进一步开展教学活动。2) 探究合作，组建小组；PBL 教学法始终强调小组合作，通过讨论解决问题，这是该教学模式必备的过程之一，在小组组建的过程中要注意将不同知识水平的学生混合，每个小组之间的水平不要差距过大，只有这样学生才能得到锻炼。3) 问题解决，问题延伸；该过程是收获结果的过程，还要能站在更高的角度对问题进行延伸，学习的目的不仅在于掌握知识，还要能与已学知识相联系，对知识进行升华，由特殊指向一般，理论与实际相联系。4) 成果总结，评价反思；小组代表分享汇报，可以培养学生的语言表达能力，增强学生自信心，进行多元主体评价，反思教学与学习情况，为后续学习做准备。

3.2. PBL 教学法中数学文化理念的融合策略

以 PBL 教学法为工具，将数学文化融入高中数学教学是形成有效课堂、促进学生发展的重要手段。从 PBL 教学模式流程角度看，四个步骤都可以融入数学文化。

1) 课堂导入中的情境与数学问题

课堂开始的第一步就是导入情境与问题，在这个过程中融入数学文化对调动学生学习兴趣，将学生注意力吸引到课堂当中具有积极作用。在数学问题的情境化认识上，情境可以从问题来源、现实认识或

对数学知识的认识与理解[13]上进行设计。

结合数学文化的导入问题可以从问题的产生出发,比如学习“复数”时要讲到数系的扩充和虚数 i 的来源,对于三次方程 $x^3 = 15x + 4$,意大利数学家邦贝利得出它的根为 $4, -2 \pm \sqrt{3}$,但利用求解三次方程的卡丹公式却出现了矛盾, $\sqrt{-1}$ 无法回避,由此便可引入虚数的概念,让学生了解“数学概念”并不是从天而降,看到数学美。

结合数学文化的导入问题还可以从现实出发,例如在天文学的研究中,为了简化繁重数据的四则运算,对数函数随之产生,取反函数后,指数函数由此出现[14]。教学中的指数函数可以采用跨学科现实情境导入课堂,比如生物学的细胞分裂问题、人口普查问题等,体会其中的数学思维、数学方法及人文情怀。

结合数学文化的导入问题还可以利用某一知识产生时数学家们提出的问题或数学家的亲身经历,就像在进行“等差数列”的讲解中引用高斯从 1 加到 100 计算的故事设计问题,引发学生思考,进行等差数列公式的推导,认识和理解数学知识,形成数学思想。

2) 以合作讨论为基础的问题探究过程

“合作讨论”是 PBL 教学模式的必备环节,贯穿于问题探究过程中,它能营造良好的课堂氛围,在对问题的讨论中分享思考,培养学生的思维能力和语言表达能力,增强学生自信心。

问题探究的过程是实现数学文化融入的有效途径,比如学习正弦定理的重难点除了掌握定理本身,还要认识定理的推导过程,早在 13 世纪的阿拉伯数学家、天文学家纳绥尔丁和 15 世纪的德国数学家雷格蒙塔努斯都对正弦定理进行推导证明,由于那时三角函数还没有得到明确表示,他们将三角形两个内角的正弦看作半径相同的圆内的正弦线,再结合三角形相似的性质得到两者之比等于角的对边之比,该方法被称为“同径法”,17 世纪后,很多数学家又对同径法进行简化。到了 18~19 世纪,同径法又演化成“直角三角形法”,随着三角函数的出现,此时只需作出三角形的高线,结合三角函数就可以得到正弦定理的推导过程,这也是今天主要采用的“作高法”,之后与学生一起,组建小组,讨论合作,利用作高法推导正弦定理,体会数学精神,重走数学家们的发现之路[15]。

探究过程也是通过一个个的数学问题不断推进的过程,在问题的设计中贯彻数学史与数学思想,体现数学方法,融合数学文化的最好方式。例如正弦定理的推导过程是从特殊直角三角形开始,再推广到锐角三角形与钝角三角形,这种由特殊到一般的思想对发展学生数学思维具有十分重要的作用。

3) 问题的解决与延伸

前两个过程结束后,问题得到解决,下一步要做的是将所学内容进行扩展延伸,在对知识升华的过程中,体会数学思想精神,学到数学方法,潜移默化的领悟数学文化。比如基本不等式,利用完全平方差公式结合图形等方法推导出基本不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, 当且仅当 $a=b$ 时等号成立,此时可以抛出问题:

对于三个变量 a, b, c 是否也存在上述不等关系,即 $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, 当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立? 四个变量、五个变量呢? 学生通过小组讨论或课下思考得到答案。这个过程,提高学生思想维度,数学思维也是一种数学文化,从育人角度看具有很高的教育价值。

4) 课堂总结与评价反思

“总结”、“评价”、“反思”是一堂好课的必要环节。“总结”不仅是对本节课知识点的回顾,还要注重与已学知识、其他学科相联系,将所学穿成链条可以培养学生的逻辑思维能力。“评价与反思”是此环节中最重要的部分,目前高中课程的评价体系主要以形成性评价为主,除了注意评价主体多元化、内容系统化、方式多样性和评价标准合理性之外,还要符合“五育”对人的要求,争取做到五育并举[16]。

要想使学生对数学文化的体会更加深刻,可以在这一环节进行数学方法的重现和数学精神的升华,比如简单介绍数学家们的成就或某一知识点对现实社会发展的作用,可以用图片、视频等形式,体会数学发展的人文价值,感受数学美。

总之,真正有效的教学应是学生愿学、善学、乐学,钱学森先生曾说:“数学不是个别人的技巧,而是一种眼光、一种看法。”数学文化蕴含着源远流长的数学精神,以 PBL 教学法为手段实现数学文化教育,将数学文化自然融入进整个教学过程,对培养学生核心素养、实现教学有效性等方面具有十分重要的意义。

基金项目

黑龙江省大学生创新项目(S202210233058)。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版 2020年修订)[M]. 北京:人民教育出版社,2020:10.
- [2] 严必友. 挖掘数学文化 践行学科育人[J]. 数学通报,2019,58(11):19-22+27.
- [3] 张玲玲. 源于文化 基于文化 为了文化——高中数学教学思考之一[J]. 数学通报,2018,57(2):25-27.
- [4] 孔令藤. PBL教学法在高中学科教育中的应用研究[J]. 天天爱科学(教育前沿),2023(1):155-157.
- [5] 杜志章. 论 PBL教学法在思想政治理论课教学中的应用——以“中国近现代史纲要”课程为例[J]. 学校党建与思想教育,2013(7):44-46.
- [6] 齐民友. 数学与文化[M]. 大连:大连理工大学出版社,2008:299.
- [7] 郑毓信,王宪昌,蔡仲. 数学文化[M]. 成都:四川教育出版社,2001:6.
- [8] 顾沛. 数学文化[M]. 北京:高等教育出版社,2008:2.
- [9] 黄秦安. 数学文化视域下数学课堂模式的多元建构[J]. 数学通报,2021,60(8):11-15.
- [10] 杨勇. 数学文化融入高中数学教学的实践[J]. 教学与管理,2020(25):47-49.
- [11] 李肖峰,李振良. PBL教学法在高校思想政治课中应用的体会[J]. 教育与职业,2011(18):145-146.
- [12] 吴建成,吴健康. 基于3C3R模型的PBL教学模式改革研究[J]. 课程教育研究,2018(48):233-234.
- [13] 张晶,夏小刚. 数学问题情境化设计中的认知偏差及任务靶向[J]. 数学教育学报,2022,31(6):75-79.
- [14] 王雯. 融入数学文化探究概念源头——以《对数的概念》一课教学为例[J]. 基础教育论坛,2022(35):33-34.
- [15] 黄婷,韩粟,雷沛瑶. 从天文到数学:HPM视角下的正弦定理教学实践[J]. 上海中学数学,2022(10):12-15+40.
- [16] 张守杰. “五育”视角下高中数学课程评价体系构建的策略研究[J]. 智力,2022(31):127-130.