

# 关于向量组的秩的教学探讨

赵志辉, 郝琳, 刘素兵

火箭军工程大学基础部, 陕西 西安

收稿日期: 2023年3月8日; 录用日期: 2023年4月14日; 发布日期: 2023年4月25日

## 摘要

向量组的秩和最大线性无关组是《线性代数》中较为抽象的概念, 学生对概念的认识比较模糊和浅显。为了更好地理解概念表层和深层的内涵, 以信息存储这一案例的引入给出定义, 探究求法, 最后利用定义解决案例中的问题。通过这样的教学过程, 不仅使得学员清晰的认识了概念, 而且锻炼了学员的数学思维能力, 达到了学以致用教学目的。

## 关键词

向量组的秩, 最大线性无关组, 矩阵

# Discussion on the Rank of Vector Group

Zhihui Zhao, Lin Hao, Subing Liu

Department of Basic Courses, Rocket Force University of Engineering, Xi'an Shaanxi

Received: Mar. 8<sup>th</sup>, 2023; accepted: Apr. 14<sup>th</sup>, 2023; published: Apr. 25<sup>th</sup>, 2023

## Abstract

The rank of vector group and the maximal linear independent vector group are the more abstract concept in linear algebra and students have a vague and simple understanding on these concepts. In order to understand the surface and deep connotation of the concept better, the paper gives the definition with the introduction of the case of information storage, explores the method, and finally solves the problems in the case using the definitions. Through this teaching process, students not only have a clear understanding of the concept, but also exercise their mathematical thinking ability, so as to achieve the teaching purpose of learning for application.

## Keywords

The Rank of Vector Group, The Maximal Linear Independent Vector Group, Matrix

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

《线性代数》是理工科院校必修的一门基础课，概念定理多，计算繁杂。其概念的抽象性是学生学习面临的主要困难[1]。我校二年级开设《线性代数》课程，学生基本已适应大学生活，对大学学习有了初步认识，经过一年级公共基础课的学习，具备了一定的抽象思维能力和编程基础。但是学生普遍缺乏实际问题的求解方法训练，缺乏数学课程学习兴趣及必要的学习习惯，缺乏背景研究所需的数学知识基础。而大部分教材上往往是直接给出定义，使得学生很容易产生疑惑，概念从何而来？为什么这么定义？到底有什么用？那么如何解决这些问题，如何让学生对所学的定义有清晰的认识？因此特别要注重概念引入的方法。借助具体的案例，将其转化为相应数学问题，在分析的过程中，透过现象抓住本质，得到抽象的概念，使得学生了解概念产生的应用背景，也克服理解的困难，更激发了学习的热情。

## 2. 向量组的秩的教学设计

最大无关组和向量组的秩这两个概念是学习的重难点。由于概念本身抽象，而大多数教材都是直接给出，并对两个概念同时全盘托出。这种空降以及并行给出概念的方式，往往导致这样的问题：在学员对基本概念最大无关组理解不透彻的基础上，又新增向量组的秩这一核心概念，往往造成思维上断层和跳跃，从而使学员感到难上加难。针对上述这一现状，对教学内容重新编排，分散难点，以应用案例为牵引，以概念的建立为主线进行如下教学设计。首先，通过创设情景，以信息存储案例为引例，引导学员以向量的角度抽象出最大线性无关组的概念。然后，设置例题，在解决例题过程中，发现最大线性无关组的形式不唯一的新问题，再引导学员探索分析，形式不唯一的背后蕴藏着最大无关组的个数唯一这一本质属性，从而让学员自发构筑向量组的秩这一核心概念。那么寻找向量组的一个最大无关组首要任务就是确定其所包含的向量的个数，因此问题转化为探究向量组的秩的计算，借助类比转化的思想，通过建立向量组的秩与矩阵的秩之间的关系定理，在定理的基础上，总结出计算步骤。最后，应用所学知识，解决应用案例。前后呼应，形成闭环。整个抽丝剥茧教学过程，既激发了学员的学习兴趣，又让学员体会概念发现的过程，使学员经历观察 - 分析 - 探索 - 提炼一系列的数学思维活动，符合学员的学习认知规律，从而克服了概念的抽象性，深化了对概念的认识和理解。

### 2.1. 概念的引入

在概念的引入方式上，以应用案例引入，先建立对向量之间关系的感性认识，再引导学员观察、抽象出最大线性无关组的概念，这种先建立具体形象认识、后进行抽象描述、并提炼概念的教学设计，连通抽象概念与学员既有的经验或知识网络，不仅有利于概念的讲授，而且让学员自己体会概念发现的过程，既解开了学员“为什么学”的疑惑，同时也激发了学员学习的兴趣[2]。

在现实生活中，我们总是即期望以最少的投入来达到原有的目标。而其中最让人关注也是最需要关注的问题是“最少”到底会有多少？“最少的投入”都包含哪些投入？

引例[3] (信息存储模型)在当今信息化的时代，每天都面临的大量的信息，如果把所有的信息都储存显然不现实，那么如何进行信息的存储呢？现在有从实际问题中采集到的 28 条信息，已按照现有方法把它们量化成 28 个 9 维的向量(见表 1)，试讨论其存储情况。

Table 1. Information data

表 1. 信息数据

向量	数据 1	数据 2	数据 3	数据 4	数据 5	数据 6	数据 7	数据 8	数据 9
1	-11	3	20	2	-18	-8	13	9	-1
2	-10	6	15	-3	-14	-9	8	0	-6
3	11	-3	-20	-2	18	8	-13	-9	1
4	8	8	-6	-6	2	-1	-23	-11	-14
5	0	-2	1	-1	0	1	3	1	0
6	11	3	0	6	16	8	-14	4	-3
7	1	-1	-2	-2	2	1	0	-2	-1
8	5	-15	-12	3	-11	5	1	10	12
9	-3	-3	-7	-1	-8	-3	2	-2	5
10	7	-15	-18	-5	-5	6	-1	0	6
11	-2	0	1	0	-1	-1	3	0	1
12	-8	16	18	2	-10	-11	-5	-1	-10
13	4	24	9	11	-6	-9	-36	0	-12
14	9	11	-9	14	17	3	-25	0	4
15	-7	5	2	-1	-3	-6	4	-5	0
16	4	0	-18	2	6	1	-11	-7	6
17	3	-7	-14	-2	-6	1	-4	-2	5
18	4	-2	-1	2	5	4	-2	3	1
19	0	22	9	15	-4	-9	-27	3	-4
20	3	15	-1	-1	-8	-8	-27	-9	-13
21	0	-2	-2	1	1	1	2	1	3
22	2	-6	-5	-19	-10	-1	0	-12	-14
23	11	1	-3	-13	4	4	-16	-10	-19
24	7	19	2	14	2	-4	-34	2	-5
25	-1	11	-2	18	2	-4	-14	6	11
26	0	2	2	2	2	0	-1	1	0
27	54	-42	-81	-3	-24	26	-73	7	12
28	-11	3	10	15	-1	-4	15	12	16

问题分析：如果这 28 个向量线性相关的话，至少有一个向量能被其余的向量线性表示，那么这个向量就不需要直接存储。怎么判断一个向量组的线性相关性呢？在前面的学习中知道通过向量组所构成的矩阵的秩就可以判断。当矩阵的秩小于向量组中所包含的向量的个数，向量组就线性相关，如果等于向量组中所包含的向量的个数的话，就线性无关。因为引例中所构造的向量组所构成的矩阵的秩小于 28，向量组必线性相关，因而至少有一个信息向量可以不用直接存储，那么到底几个信息向量不用直接存储？或者换句话说，我们到底要保留哪几个信息向量直接存储？用数学的语言描述这个问题：就是要在给定的

向量组中找到一组向量具有如下特点:

1、 $r$ 个向量线性无关; 2、任何 $r+1$ 的向量都线性相关。

在分析问题的过程中, 利用化归的思想, 渗透由现象看本质的哲学原理, 抓住问题的主要特征。

定义 1 [4]: 设有向量组  $A$ , 如果在  $A$  中能选出  $r$  个向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ , 满足

(1)  $A_0: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性无关;

(2)  $A$  中任何  $r+1$  的向量(如果  $A$  中有  $r+1$  个向量的话)都线性相关。

称向量组  $A_0$  是向量组  $A$  的一个最大线性无关向量组, 简称为最大无关组。

对最大无关组的定义要加以诠释, 如何理解“最大”? 包含了两种含义, 原向量组中可能存在多个线性无关的部分组, 最大无关组是包含向量个数最多的部分组, 这体现了最大无关组的“最多性”; 如果从反应信息的角度来说, 最大无关组又是包含向量个数最少的, 多之会冗余的信息, 少之不足以反映原来的信息, 这体现了最大无关组的“最少性” [5]。

以具体案例引入, 通过对问题的剖析, 不仅给出了抽象的概念, 还激发了学员探讨问题的热情。

此时也可以举一些生活中的例子, 比如学员队由支委会进行日常事务的管理, 支委成员都是学员队的骨干, 这些骨干本身虽然也是学员, 但通过他们可以了解到下属所有学员的情况, 从获取信息的角度来说, 数量少的骨干完全可以代表全体学员, 而骨干之间不能互相代表, 如果以一个学员的信息作为向量的话, 那么人数少的骨干组成的向量组与全体学员组成的向量组的最大无关组。让学生感受生活中处处都有数学, 只是没意识到, 引导学员去发现生活中的数学知识。

例 1 求向量组  $\alpha_1 = (3, 6, -4, 2, 1)^T$ ,  $\alpha_2 = (-2, -4, 3, 1, 0)^T$ ,  $\alpha_3 = (1, 2, -1, 3, 1)^T$  的一个最大无关组。

分析: 由最大无关组的定义可知, 首先  $\alpha_1, \alpha_2$  线性无关, 又  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关, 所以  $\alpha_1, \alpha_2$  是向量组的一个最大线性无关组。同样可以验证  $\alpha_2, \alpha_3$  也是一个最大线性无关组。

从上面例子可知, 随着向量组的规模的增大, 利用定义去寻找向量组的最大线性无关组比较困难, 需要寻找其它方法 [6]。

由例 1 中可以发现: 向量组的最大线性无关组是不唯一的, 但是最大线性无关组中所含向量的个数唯一的。

从数的角度反映了向量组的性质, 并且非常类似于矩阵的秩的本质。而从定义上也可以看出来最大线性无关组的概念非常类似于矩阵的最高阶非零子式的概念。

因此, 基于向量组与矩阵间的关系, 在此寻找获得最大线性无关组的便捷方法时是否可以换个角度, 从矩阵上入手?

为此, 对应于矩阵的秩, 引入向量组的秩的概念。

定义 2: 最大线性无关组中所含向量的个数称为向量组的秩, 记作  $R_A$  [4]。

此时可以将课堂思政融入在教学中, 深刻揭示向量组的秩的定义中蕴含着变与不变的哲学思想。

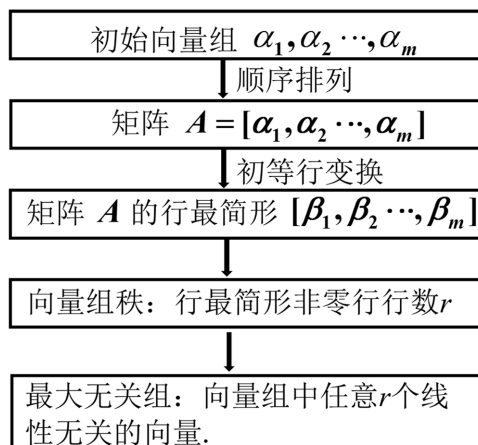
## 2.2. 向量组的秩和最大无关组的求法

由向量组和矩阵的对应关系可知, 当将向量组看做矩阵的列向量组, 通过矩阵秩的求解可以得到向量组秩的求解方法, 并在该求解过程中可以得到相应的最大线性无关组。其理论基础描述如下:

定理: 矩阵的秩等于其行向量组的秩, 也等于其列向量组的秩 [4]。

探究的过程中引导学员利用已知的知识解决未知的问题, 将求向量组的秩的问题转化为求矩阵的秩, 向量组的一个最大无关组就是矩阵的行最简形非零首元所对应的向量组。潜移默化地培养学员转化的数学能力, 进而, 连通新的知识与已有的知识结构, 扩展学员的知识网络 [7]。

计算步骤(图 1):



**Figure 1.** Diagram of the method of the rank of the vector group and the maximal linear independent vector group  
**图 1.** 向量组的秩和最大无关组的求法图

### 2.3. 向量组的秩和最大无关组的应用

用向量组的秩和最大无关组的知识求解引例提出的信息存储的问题，将建模的思想融入到数学教学中[8]。

(1) 问题的重述：找到需要直接储存的信息，用数学描述就是找一个向量个数少于 28 的向量组与原向量组等价。

(2) 条件假设：

- a. 所给数据真实可靠；
- b. 各个信息的重要程度一样。

(3) 符号说明： $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{28}$  —— 表示信息所对应的列向量。

(4) 问题分析：由于  $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{28}$  是含有 28 个向量的九维向量组，该向量组必定线性相关。因此这 28 个向量中至少有一个向量可以由其它向量线性表示，对应到问题中也就是说  $\alpha_i$  对应的信息可以由其它的向量信息组合得到，因此这个  $\alpha_i$  就不需要直接存储的。问题的实质就是寻找  $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{28}$  的一个最大线性无关组。

(5) 问题建模：以  $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{28}$  为列向量组构建矩阵  $A$ ，求  $A$  的一个最大无关组。

(6) 问题求解：

step1 求出向量组的秩  $R(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{28}) = 5 < 28$ ；

step2 逐步删除获得最大无关组  $\alpha_5, \alpha_7, \alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{26}$ ；

step3 计算并存储系数(见表 2)  $\alpha_i = a\alpha_5 + b\alpha_7 + c\alpha_{11} + d\alpha_{21} + e\alpha_{26}$ 。

(7) 结果分析：直接存储需要  $28 \times 9 = 252$  个单位，现在只需要  $5 \times 9 + 23 \times 5 = 160$  的单位，减少了 92 个存储单位，达到了节约存储空间的目的。

通过对案例的分析建模求解的过程，既使得学员深刻的理解向量组的秩和最大线性无关组的本质，也培养了学员利用数学知识解决实际问题的能力，达到了学以致用目的。渗透数学建模思想于课堂教学中，问题的设计不是简单的对计算方法的重复，而是需要学员观察、思考、运用数学思想进行转化，在问题分析中锻炼学员数学建模的能力。

**Table 2.** Storage factor  
**表 2.** 存储系数

向量	向量 5	向量 7	向量 11	向量 21	向量 26
1	3	-5	3	-3	-1
2	1	-2	4	-4	-1
3	-3	5	-3	3	1
4	-3	2	-3	-3	-1
6	1	1	-5	1	4
8	1	-5	-5	4	-5
9	-2	-1	1	1	-3
10	0	-1	-4	3	-5
12	-1	-2	3	-5	1
13	-5	-4	-4	-4	1
14	-5	1	-4	3	4
15	-2	1	4	-1	0
16	-5	2	-1	3	-1
17	-2	-1	-2	2	-4
18	1	0	-2	1	1
19	-5	-4	-2	-2	2
20	-5	-1	-2	-4	-2
22	1	2	0	-4	-5
23	1	3	-4	-4	-1
24	-5	-3	-1	3	2
25	-5	-3	-1	3	2
27	-6	-12	-33	11	-22
28	0	-3	4	3	3

### 3. 结束语

关于向量组的秩和最大无关组，在教学过程中，首先以具体案例——信息存储问题引出寻找一个具有某种特征的无关组的问题，激发学员的学习兴趣，从问题的分析过程中，总结归纳出最大无关组这一抽象的定义。接着通过具体例题探究最大无关组求法，引导学员抓住向量组的本质特征得到核心概念向量组的秩。其次，通过联想矩阵和向量组之间的关系，让学员经历猜想证明这一个过程得到向量组的秩和最大无关组的求法。最后，结合信息存储模型，利用向量组的秩和最大无关组的定义解决案例中所提出的问题。在这一过程中，让学员不仅仅学到了数学知识，感受数学的思想方法，而且历经了提出问题、分析问题和解决问题的全过程，锻炼学员的数学思维能力。

### 参考文献

- [1] 刘素兵, 曲娜, 曹大志. 关于方阵的特征值与特征向量教学的探讨[J]. 高师理科学刊, 2017, 37(10): 62-65.

- [2] 凌征球, 覃思乾. 浅谈微课的线性代数教学设计——以向量组的秩为例[J]. 科技视界, 2020(23): 44-45.
- [3] 王洁, 贾睿. 案例法教学在高校线性代数课题中的应用[J]. 科技资讯, 2019, 17(32): 168-169.
- [4] 同济大学数学系. 线性代数[M]. 第6版. 北京: 高等教育出版社, 2014.
- [5] 杨萍, 敬斌. 工程数学(上册)[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2015.
- [6] 王发兴, 郑莹. 浅谈线性代数微课设计——以向量组的最大无关组与秩为例[J]. 大学数学, 2020, 36(2): 77-81.
- [7] 王磊, 刘寅, 晏燕雄. 认识线性代数中的化归思想, 培养学生的化归意识[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2021, 46(12): 144-148.
- [8] 何小年, 彭琼. “3E”背景下线性代数教材中引入 Matlab 辅助教学初探[J]. 科技创新导报, 2018, 15(30): 130-131.