

基于APOS理论的高中生集合理解情况调查研究

付连平, 杨族桥

黄冈师范学院数学与统计学院, 湖北 黄冈

收稿日期: 2023年2月16日; 录用日期: 2023年4月10日; 发布日期: 2023年4月19日

摘要

APOS理论由教育家杜宾斯基提出, 突出学生学习概念所经历的操作、过程、对象、图式四个阶段。集合知识是初高中数学学习的重要衔接, 是学生学习数学思想、发展数学思维、培养核心素养的关键知识。本文通过调查研究, 分析黄冈市黄州区某高中高一至高三学生对集合知识的理解。研究发现: 多数学生对集合概念达到操作和过程阶段, 部分学生达到对象阶段, 较少学生达到图式阶段。根据研究结论, 从教师教学、学生学习、课程设计三个方面提出教学建议。

关键词

APOS理论, 高中数学, 集合, 调查研究

Investigation and Research on Set Understanding of High School Students Based on APOS Theory

Lianping Fu, Zuqiao Yang

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: Feb. 16th, 2023; accepted: Apr. 10th, 2023; published: Apr. 19th, 2023

Abstract

APOS theory, proposed by educator Dubinsky, highlights four stages of learning concepts: operation, process, object and schema. Set is an important connection between middle and high school mathematics learning, and is the key knowledge to learn mathematics thought, develop mathe-

mathematics thinking and cultivate core quality. Through investigation and research, this paper analyzes the understanding of set knowledge of senior high school students in Huangzhou District, Huanggang City. It is found that most students reach the action and process stage, some students reach the object stage, and few students reach the schema stage. According to the research conclusion, teaching suggestions are put forward from three aspects: teacher teaching, student learning and curriculum design.

Keywords

APOS Theory, High School Mathematics, Set, Investigation and Research

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 问题提出

20 世纪以来, 众多心理学家逐渐对数学学习加深了研究, 在研究学生数学学习思维与能力方面取得了突出的成果, 例如: 皮亚杰的儿童智力发展理论、维果斯基的最近发展区理论、维特洛克的生成学理论等。但是其中某些研究理论仍存在以下局限: 一是以低龄儿童为研究对象, 未将其应用于对高年级学生的学习情况研究; 二是以小学、初中数学内容为主, 对于高中数学中的集合、函数等知识涉及较少。

从数学教育的研究内容上看, 集合作为初高中知识衔接的重要环节, 能够让学生逐步理解高中数学的抽象性, 帮助学生顺利完成数学学习的过渡, 其中包括知识与技能、方法与习惯以及能力与态度的掌握[1]。集合作为高中数学的重要内容之一, 是学生在高中学习过程中遇到的第一个抽象知识, 其概念本身不难理解, 但其蕴含着丰富的数学思想方法以及是学习函数的重要桥梁, 对学生建立数学学习信心具有重要作用。学生学习集合概念是方法性的还是结构性的? 本研究以美国教育学家杜宾斯基的 APOS 理论为基础, 考察黄州区某高中高一至高三学生对集合概念的理解程度。

2. APOS 理论内涵

美国教育家杜宾斯基基于对建构主义理论的研究, 提出“APOS 理论”, APOS 代表数学概念教学的四个阶段——操作(Action)、过程(Process)、对象(Object)、图式(Scheme)。

操作阶段, 通过设计问题情境, 引导学生进行数学实验操作或抽象化的思维活动, 在亲身实践过程中启发学生思考, 唤醒学生的已有知识经验, 帮助学生感受实际背景下隐含的数学问题。此阶段使得学生对问题产生初始认识, 是探究新知、建构知识图式的起点[2]。

过程阶段, 启发学生进行思维内化。通过揭示概念的内涵和外延, 使学生了解概念产生发展的过程, 不断完善对概念的过程性认识。经过思维的内化, 逐步将对知识的操作性认识转化为自身的心智运算[3]。学生建构起知识的过程性认识, 可以对多个过程进行综合理解运用, 例如, 学生学习了 6 能被 2、3 整除, 若 $M = 3 \times 6 \times 7$, 学生便会得出其能被 3、6、7 整除。

对象阶段, 是指学生经历操作与过程阶段之后, 总结回顾知识产生过程中全部运算和思维过程, 通过思维的压缩, 促进学生在头脑中形成对所学概念作为一个具体对象的认识。例如, 在学习函数的加减运算以及复合运算时, 在 $f(x) + g(x)$ 与 $f[g(x)]$ 中, 两函数均作为整体对象参与运算过程。与此同时, 解压缩也是检验学生是否建构对象的重要环节, 例如反函数的学习, 需要将某一函数解压缩到过程阶段,

进而求解其反函数达到对象阶段。由此可见, 对象阶段使学生摆脱单一问题情境的束缚, 能够对不同问题情境进行分析运算, 是学生掌握概念本质的必经之路。

图式阶段便是在经历上述三个阶段之后, 学生能够将概念的产生背景、抽象的过程以及具体的对象认识进行充分的整合[4], 深入理解掌握概念本质的同时, 将所学概念融入已有的知识框架, 做到融会贯通。

3. 研究设计

本研究依据概念学习的 APOS 理论, 调查了黄州区某高中高一至高三年级的 217 名学生, 评价学生对集合概念的理解程度。

3.1. 测试题目

APOS 理论认为学生学习数学概念要经历: 操作、过程、对象、图式四个阶段。为检验学生对集合概念的理解程度, 针对每个阶段编制了不同类型的题目。第一类题目是为了解学生掌握集合概念的操作阶段, 共两道题: 给定集合背景, 计算集合元素个数。第二类题目是为了解学生掌握集合概念的过程阶段, 三道题: 已知集合之间关系, 求解集合元素。第三类题目是为了解学生掌握概念的对象阶段, 两道题: 为在解决集合运算时是否能将集合看作对象。第四类题目是为了解学生掌握集合的图式阶段, 两道题: 包括集合关系、集合与函数、方程之间的联系。

3.2. 被试

本调查研究针对的是高一、高二、高三 3 个年级共 217 人。他们都来自黄州区某普通高中, 所选班级均为平行班, 高一学生 74 名、高二学生 70 名、高三学生 73 名。发放 217 份问卷, 其中有效问卷为 217 份。

4. 调查结果

根据学生的回答, 统计每道题回答的正确人数和百分比, 为更好的了解学生对集合概念的理解, 将不同年级的学生答题情况进行对比, 见表 1。根据实证研究获取的数据, 结合 APOS 理论, 对参与测试的学生对集合学习现状进行分析。

Table 1. Survey results

表 1. 调查结果

调查内容	试题编码	高一(74)		高二(70)		高三(73)	
		正确人数	百分比	正确人数	百分比	正确人数	百分比
操作阶段	1	61	82.4	61	87.1	67	91.2
	2	62	84.3	65	92.8	71	97.2
过程阶段	1	38	50.8	48	68.5	27	36.9
	2	49	66.3	49	70.0	54	73.9
	3	35	47.2	47	67.1	56	76.7
对象阶段	1	5	6.7	13	18.5	7	9.5
	2	45	60.8	18	25.7	24	32.8
图式阶段	1	6	8.1	15	21.4	26	35.6
	2	28	37.8	27	38.5	30	41.1

4.1. 学生整体对集合的认识处于较低水平

通过对表 1 的观察不难看出, 学生对操作阶段的试题作答成功率远高于其他阶段所对应的试题, 其中高一和高二学生的作答成功率接近 90%, 高三学生的成功率更是接近 95%, 说明绝大部分学生对集合的理解达到了操作阶段。于此同时, 三个年级均有超过半数的学生对集合的理解达到对象阶段, 但是认知水平达到此阶段的学生占比明显低于操作阶段。随着认知难度的提升, 对集合的理解水平达到对象和图式阶段的学生占比进一步下滑, 只要部分学生对集合的认识达到对象和图式阶段。

通过研究可以看出, 绝大部分学生对集合的认知达到了操作和过程阶段, 部分学生达到对象阶段, 很少一部分学生已经将集合的相关知识形成知识图式并融入到已有的知识体系中。

4.2. 学生整体对集合的理解水平随年级的上升而提升

通过对表 1 的分析, 在操作、过程和图式阶段, 高三学生的正确作答率最高, 高二学生的作答率次之, 而高一学生的正确作答较之其他两个年级最低, 因此可以判断, 在上述三个阶段中, 学生对集合的认识和理解水平, 随年级的增长而逐渐提升。这一结论符合研究的预期, 说明学生在学完集合知识后, 由于先后学习方程、函数、数列等与集合联系紧密的数学知识, 进一步加深学生对集合的认识和理解, 正是后续这些数学主题内容的学习, 帮助学生找到集合知识与新知之间的联系。随着年级的提升, 学生对集合概念的整体运用在逐步提高, 从而帮助学生深化对集合的理解, 有助于集合知识图式的建立。

4.3. 各年级学生思维发展情况不同

高一学生对集合认识占比从高至低依次是操作、过程、对象、图式四个阶段, 而高二和高三学生集合思维认知占比从高至低依次是操作、过程、图示、对象阶段。通过对三个年级学生作答情况的横向对比, 可以看出高一学生思维达到对象阶段的占比高于其他两个年级学生, 而达到图式阶段的学生占比低于高二和高三学生。说明高一学生对集合的认识经历操作和过程阶段达到对象阶段时, 继续向图式阶段发展的情况不容易, 在这一过程中高一学生面临着艰难挑战。与此同时高二和高三学生在对象阶段的占比低于高一学生, 而在图式阶段的占比高于高一学生, 说明经历后续其他数学知识的学习, 有助于学生加深对集合的认知水平, 从而使学生更容易的建立起集合的知识图式。

5. 教学建议

基于上述调查结果, 从改进教师教学方法、学生学习过程以及课程设计方面三个方面, 提出相应的教学建议。

5.1. 改进教学方法, 提升教学质量

调查学生在解决某些集合问题时, 是否把集合作为对象进行研究分析。结果发现对概念形成对象认识的学生比例占比较低, 甚至出现高年级学生理解水平低于高一学生的情况。说明大部分学生并没有将集合作为一个具体的对象, 认知水平依然停留在对集合概念的低层次理解上。虽然学生在学习过程中进行了大量的解题练习, 其中某些问题也具有较强的技巧性, 但对于提升学生的认知水平并没有起到明显的推动作用, 反而导致学生的认知水平逐渐下降, 最终容易导致学生陷入题海战术之中, 而无法真正领会概念本质与内涵。李士琦先生曾说: “一方面众多优等生的成功经验, 以及我国在多次国际数学测评中的取得的突出成绩, 从正面肯定了我国数学教育的优秀做法; 另一方面, 教师采取的‘题海战术’却容易导致学生学习兴趣下降, 并没有从根本提升学生的数学思维与能力[5]。”

为帮助学生摆脱题海战术的困扰, 教师应主动改进教学方法, 以求提升教学质量。近年来随着课程

改革的持续深入, 各种教育教学理论被一线教师所接纳和运用, 例如 APOS 理论、问题提出理论、学习进阶理论等, 其中 APOS 理论已被教师充分运用于函数、统计与概率、数列等数学知识的教学中, 并经过实证研究, 发现学生的实际学业表现达到甚至优于预期。因此为帮助学生更好的理解集合知识、建立知识图式, 教师应针对所教学生的认知情况, 将教学理论运用于集合教学。

5.2. 探寻问题本质, 形成知识体系

新课改已扎实推进多年, 但仍未能根本上改变学生重视考试、注重分数的学习现状。学生在获得优异成绩的同时, 缺乏对数学概念本质以及数学思想方法的深刻认识。张奠宙指出: 西方人主张理解, 国人更多的主张练习[6]。针对学生对集合概念的调查也从一个侧面说明这一问题。针对图式阶段测试题, 将集合、方程以及函数进行组合考察, 发现学生没有真正理解集合概念表现在不能根据不同背景识别运用集合概念解决问题。在与学生沟通交流的同时发现, 有些学生能将集合概念以及集合特征进行精确的背诵, 但在识别运用概念时依然存在较大困难。

通过调查, 反映出学生对集合的理解水平较低, 对集合知识所承载的语言功能更是不甚了解。在尚未把握集合本质的情况下, 便进行重复性的解题练习, 不仅加重了学习负担, 对集合认识并没有得到深化。因此教师在后续教学过程中, 应设计数学探究活动, 针对集合中的诸多子概念, 引导学生深入探究其承载的知识和语言功能, 帮助学生深化对集合知识的理解, 从而帮助学生建构集合知识图式, 并将其融入到已有的知识体系, 做到融会贯通。

5.3. 改进习题设计, 渗透集合观念

学生掌握集合概念的认知程度除了受到教师教学方法、学生学习方式两个因素之外, 与学习概念所使用的教科书也有很大关系。通过考察普通高中数学教科书《人教 A 版(2017 年)高中数学必修一》发现, 在例题与习题的设计中, 考察操作和过程阶段的题目为 27 道, 对象阶段为 17 道, 考察图式的题目为 8 道。由此可见, 教科书中绝大多数习题反映集合概念建构过程的操作和过程阶段, 促进学生深入理解集合概念的对象和图式的习题设计较少, 在后续教材设计中, 需要适当增加图式试题的占比。

分析我国课程标准发现, 集合主要设计主要存在于高中, 集中于高一阶段, 这也可能导致学生学习集合概念存在认知问题的因素。集合与学生生活联系密切, 应从不同学段对集合概念进行渗透。针对不同学段的学生, 对集合概念进行不同内容、不同程度以及不同范围进行规范与要求。

6. 结语

基于 APOS 理论对高中生的集合知识的理解水平进行调查, 分析学生对集合知识认知现状, 并从教师、学生、课程标准三个维度提出教学建议。在数学知识体系中, 集合知识在函数、方程、数列等知识内容中也有所体现, 因此可将这部分知识内容纳入集合知识理解水平的研究中, 更全方位的了解学生集合学习的现状, 为帮助学生理解集合知识、教师改进教学提供参考。

基金项目

黄冈师范学院校级研究生工作站课题“基于 APOS 理论的高中生集合学习进阶研究”(项目编号: 5032022016)研究成果。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2017: 17.
- [2] 濮安山, 丁嘉雯. 基于 APOS 理论的高中数学概念教学案例设计——以“任意角”的概念教学为例[J]. 中学数学

研究(华南师范大学版), 2018(2): 19-21.

- [3] 王成. 用 APOS 理论分析学生向量线性相关性概念的学习[J]. 唐山学院报, 2015, 28(26): 19-21+46.
- [4] 濮安山, 史宁中. 从 APOS 理论中看高中生对函数概念的理解[J]. 数学教育学报, 2007, 16(2): 48-50.
- [5] 李士琦. 熟能生巧吗[J]. 数学教育学报, 1996, 5(3): 46-50.
- [6] 张奠宙. 数学教育经纬[M]. 南京: 江苏教育出版社, 2003.