

# 以工程应用为导向的泛函分析课程改革

高 阳, 崔学慧\*

中国石油大学(北京)理学院, 北京

收稿日期: 2023年3月9日; 录用日期: 2023年5月2日; 发布日期: 2023年5月10日

## 摘 要

本文结合中国石油大学石油石化特色, 将工程中的反演内容融入到泛函分析课程中, 梳理泛函分析中的相关知识点, 改革课堂教学模式。通过这一改革, 使学生对泛函分析的理论有了更加深入的了解, 也体会到抽象的数学理论对工程案例的指导作用。抽象的泛函分析课堂融入具体的工程案例, 既可以加强理论学习和实际应用相结合的训练, 又可以提升利用所学知识解决问题的能力, 可谓一举两得。通过改革前后对比, 发现本次改革取得了良好的教学效果, 得到了导师和学生的认可。同时, 授课教师在改革中也得到了收获, 真正做到了教研相长。

## 关键词

工程应用, 案例教学, 反演, 泛函分析

# Engineering Application Oriented Curriculum Reform of Functional Analysis

Yang Gao, Xuehui Cui\*

College of Science, China University of Petroleum, Beijing

Received: Mar. 9<sup>th</sup>, 2023; accepted: May 2<sup>nd</sup>, 2023; published: May 10<sup>th</sup>, 2023

## Abstract

Considering the petroleum and petrochemical characteristics of China University of Petroleum, this paper integrates the inversion content in petroleum engineering and geology into the functional analysis course, sorts out the knowledge of functional analysis that relates to inversion content, and reforms the teaching methods. After the reforms, students not only have a deeper

\*通讯作者。

understanding of the theory of functional analysis, but also realize that the abstract mathematical theory plays a guiding role in engineering. The abstract functional analysis class which integrates specific engineering cases strengthens students' combination of theoretical learning and practical application, and improves their ability to solve problems with the knowledge they have learned. Through the comparison before and after the reform, it is found that the reform has achieved good teaching results, and has been accepted by supervisors and students. At the same time, teachers also gain a lot in the reform, and truly achieve the mutual benefit of teaching and research.

## Keywords

Engineering Application, Case Teaching, Inversion, Functional Analysis

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

泛函分析起源于十九世纪八十年代末期人们对变分法和积分方程的研究[1]。自诞生之初就对数学和物理学的发展起了推动性的作用,反之也正是因为数学和物理学的发展带动了泛函分析的蓬勃发展[2]。十九世纪的传统物理学所需要的数学工具是微积分理论、常微分方程或偏微分方程理论、积分方程及变分理论[3]。随着科技的发展,二十世纪初的物理前沿已经转移到了相对论和量子物理以及由它们衍生的其他课题。显然传统的数学工具已经不能适应这些课题,泛函分析则是研究这些物理分支的有利工具。理论物理中对原子中电子能级的研究和对整数阶量子霍尔效应的研究,均需要泛函分析中线性赋范空间上线性算子的普理论。具体说,前者利用完备度量空间中的自伴算子普理论,后者用到了薛定谔算子的普理论。这些杰出的工作使得 Klitzing 和 Thouless 分别获得 1985 年和 2016 年诺贝尔物理学奖。

除了在数学和物理学中的应用外,泛函分析在工程中也有着广泛的应用[4]。比如在电气工程中,泛函分析可以分析电机定子温度场、电力系统非线性费用函数的分摊、线性集总参数电路、输电网规划等。在土木和建筑工程中,泛函分析可用于裂缝筒支梁损伤检测及参数识别中。在通信工程中,泛函分析可以应用于通信与信号处理中。在动力工程中,泛函分析在三角带高速传动中亦有应用。泛函分析在反演方面也有着非常重要的应用[5][6]。而反演在地质工程、医学、军事、环境、遥测和勘探、控制、通讯、气象、经济、管理等领域有着重要的实际应用。

泛函分析有着如此多的应用,但在课堂授课时,教师由于受到这样那样的限制,往往只讲泛函分析自身的知识而不讲泛函分析的应用。导致学生在学习时感觉其枯燥难懂,认为泛函分析无用,于是学生不肯在泛函分析上用功。为了改变这一状况,结合中国石油大学石油石化特色,根据选课学生的专业背景,将工程中的反演内容融入到泛函分析课程中、从而改变了传统的授课方式。通过这一系列改革,使学生们体会泛函分析的作用,在课堂学习的过程中将泛函分析与工程问题相结合,既可以加强理论学习和实际应用相结合的训练,又可以提升利用所学知识解决问题的能力,可谓一举两得。

## 2. 改革的原因和内容

### 2.1. 改革前的困境

泛函分析课程是中国石油大学研究生公共课程教学体系中的一门重点课程,不仅是数学专业研究生

的必修课,也是许多其他专业研究生的必修课。对我校的主干学科而言,泛函分析是最重要的公共基础课之一,具有承上启下的作用。就是如此重要的课程在实际教学过程中却出现学生难学、教师难教的两难局面。造成这一局面的原因有以下几个方面:

一是课程本身的原因。泛函分析概括性和抽象性强,学习难度大。大多数泛函分析中的概念不像数学分析或高等代数中的概念那样看得到摸得着,导致学生难以理解和接受。这时教师讲授完之后,学生往往只得到一个朦胧的印象,难以具象化,导致学生对该概念的理解似是而非。然而泛函分析的内容是环环相扣的,后续的概念建立在对前面概念似是而非甚至是错误的理解上不可能真正的被学生理解,更谈不上接受了。

二是学生方面,基于第一点的论述,随着课程的进行,学生不理解的概念越多,而且越往后,学生理解的程度越浅。甚至到后来完全听不懂。这就导致前热、中温、后冷的局面。一开始学生选了课满怀热情的来听课,但是随着不懂得东西越来越多,理解得越来越浅,学生便产生畏难情绪,认为自己不适合学习泛函分析,学习兴趣直线下降。再过一段时间学生产生抗拒心理,不肯在泛函分析上用功,于是放弃了泛函分析。另外一方面学生觉得泛函分析无用,学习泛函分析仅仅是为了应付考试。缺乏主观能动性的学习,效果自然大打折扣。很多同学考试过后,学过的知识也全忘得差不多了。

三是教师方面,教师也知道学生的学习状况,所以到了后面反而不敢放开讲。出现学生理解不到位教师不敢展开讲,教师不敢展开讲,学生理解更加不到位的恶性循环,教学效果越来越差。另外如何讲清楚泛函分析中的基本概念与理论,以及它们之间的联系,甚至于泛函分析与其他数学学科的关系等都极具挑战性。往往教师讲课的时候出现只见树木不见森林的情况。

四是泛函分析缺乏工程应用,学生没有学习的动力。改革之前的泛函分析课程,也有一定的应用案例,但是这些案例都是泛函分析在常微分方程、偏微分方程、计算方法、最优化方法等数学分支的应用。这些应用要学生熟练的掌握相关课程的基础知识。但目前我校数学专业部分研究生并没有在本科学习相应内容,更不用说非数学专业的研究生。因此这些案例在授课过程中很难展开。

由于上述诸多问题,导致学生产生抗拒心理,不肯在泛函分析上用功。因此有必要对泛函分析课程的授课方法和授课内容进行改革。为彰显我校石油特点,突出教学特色,经过一段时间的集中整理,汇总泛函分析中与工程应用中反演相关的知识点,在实际教学中穿插介绍泛函分析与反演知识的相关性,实现化抽象为具体,从形象直观到理性思维的过渡,同时有针对性地提出一些开放性的思考题、讨论题,来引导学生进行主动和独立地思考,同时供学有余力的学生进一步探讨和研究。

## 2.2. 改革内容

针对上述问题,本文从以下两个方面进行教学改革,力图改善目前的局面。

在泛函分析内容过于抽象方面,改革后的泛函分析更遵循认识论的基本原则,课堂教学注重启发和引导,由具体到抽象,从形象直观到理性思维,台阶式由浅入深,分化难点,深入浅出。在重要概念引入之前,先介绍引入的目的和背景,阐述导出此概念的原始问题和想法的演化发展过程;在给出定理证明的同时,着力说明证明的基本思想和意义;使学生不仅“知其然”,而且能“知其所以然”;重视在传授课程知识的同时,注重课程主线和数学思想的阐述,注意培养学生严密的逻辑思维方式和推理论证能力,提升学生发现问题、分析问题和解决问题的能力;注重引导学生从重要的问题出发,去重新探索和发现结论,培养学生的创新能力。

在工程应用方面,基于我校石油专业的特点,加入第一类 Fredholm 积分方程的正则化解法等问题的介绍,对当前涉及到泛函分析理论的正则化进行汇总和选择,遴选一些有代表性的问题进行详细讲解,深化学生对这一问题的认识,同时整理了泛函分析中与反演相关的知识点。给出 Tikhonov 正则化方法解

的存在性、惟一性、稳定性以及收敛性的证明[7][8]。学生只有掌握了证明的思路和过程才能够真正理解这些方法,而不是只在实践中照搬照用,也只有对理论证明进行深入思考才能够发现理论与实践间的差异所在,进而完善和改进前人提出的方法,丰富和发展反演理论。

改革后,更加注重应用理论与方法的教学、注重学生理论学习和实际应用相结合。使学生能够喜欢泛函分析、学好泛函分析、应用泛函分析。

### 3. 改革方案实施

由于受课时限制,泛函分析课程只能详细讲述课本的第一章和第二章。因此第三章和第四章的内容只能根据反演的需要酌情选讲。对前两章的内容,在授课时会有针对反演的小应用,对后两章的内容则针对反演需要进行改革选讲。课程的最后4课时集中讲述 Tikhonov 方法和 Phillips-Twomey 方法的证明。

#### 3.1. 教学内容改革——知识点梳理

首先梳理泛函分析中与反演相关的知识点,让后续课堂教学改革有的放矢。这些知识点包括: Soblev 空间、Hilbert 空间和全连续线性算子。Soblev 空间在泛函分析中第三章详细介绍,包括广义函数的概念、运算、微商等,以及 Soblev 空间及其性质和嵌入定理等。Hilbert 空间的概念和性质。在第一章第六节给出 Hilbert 空间的概念后,第二章第二节、第四节、第五节、第三章、第四章都对 Hilbert 空间的性质做了研究。这些研究加深了学生对 Hilbert 空间的理解,为后续研究第一类 Fredholm 积分方程奠定了空间理论基础。线性算子的概念在第二章第一节提出,然后该章其余各节研究了线性算子的性质,第六节还研究了算子的普理论,第四章提出全连续性线性算子(即紧算子)的概念,并深入研究了紧算子的性质和紧算子的谱理论。

在这些概念和性质的基础上,就可以证明 Tikhonov 方法和 Phillips-Twomey 方法求解第一类 Fredholm 积分方程时解的存在性、惟一性、稳定性和收敛性。在证明过程中还利用了闭凸集的性质、最佳逼近原理等。涉及相关的概念大约十个,定理大约五个,另外还有线性算子的谱理论和紧算子的谱理论。

经过这样梳理之后,明确了课堂教学改革的方向。

#### 3.2. 课堂教学方式改革

根据梳理好的知识点,对传统的课堂授课做如下改革:在讲授完第一章第五节凸集后,会给出算子方程拟解的定义,由于拟解类似于最小二乘解,可解决算子方程解的存在性问题。同时举例说明拟解并不唯一,然后证明拟解集是 Soblev 空间上的一个闭凸集。在讲授完第一章第六节的再论最佳逼近后,由定理 1.6.31,任何闭凸集上都有唯一一个范数最小的元素。于是可以定义拟解集中范数最小的这个解为正规解。并在讲解过程中将此解与最小二乘最小范数解做类比。通过这样一步一步的引入,既丰富了课堂教学中的实例,使得课堂教学不再枯燥抽象,也使得后面讲反演方法证明的时候水到渠成不那么突兀。将反演的证明有机融入到泛函分析的课堂中去,好比盐溶于汤。

最后在传统泛函分析的基础上增加4个学时的反演方法证明。在这一证明过程中需要用到许多泛函分析的知识。让学生体会到泛函分析在工程上的应用,它是很多数值算法的数学基础,为工程应用保驾护航。

### 4. 改革效果

课程改革效果非常明显。改革前,生源以理学院为主,人数较少,改革后吸引了更多相关专业的学生,人数也出现较大增幅,具体见表1和表2。

**Table 1.** Comparison of the number of students before and after the reform**表 1.** 改革前后学生数量对比表

	改革前			改革后		
	11 年度	12 年度	13 年度	18 年度	19 年度	20 年度
理学院	8	7	11	7	7	9
其他学院	4	11	23	37	39	49
总计	12	18	34	44	46	58

**Table 2.** Comparison of the number of student's majors before and after the reform**表 2.** 改革前后学生专业数量对比表

	改革前			改革后		
	11 年度	12 年度	13 年度	18 年度	19 年度	20 年度
其他学院数量	2	3	3	5	6	7

从表 1 和表 2 可以看出, 泛函分析课程的改革得到了导师和学生的认可。甚至还有一些博士也来选修泛函分析, 结课后, 有同学反馈, “老师我终于知道数学的用处了, 我之前常用的方法其实我是不知道它为什么是正确的, 只是我能重复论文中的结果, 用这些方法得到的结果也符合实际。从今以后, 我就可以放心的用这些方法了。”

由于改革后, 专业增加, 学生的背景不同, 数学知识差异也很大。上课时, 也需注重因材施教, 尊重差异, 主要做法有:

- 1) 课上留有部分思考题, 供学有余力或者有兴趣的同学学习。
- 2) 课后练习分为必做、选做、挑战三个等级, 学生可根据自身情况有选择的进行练习。
- 3) 教学进度根据学生的实际情况进行调整, 甚至每节课的进度都要根据学生的课堂反应进行细微调整。

除了学生受益外, 授课教师也从教学中受益匪浅。教师利用科研中的例子来教学, 让学生体会数学的用武之地, 同时在教学中也推动教师做科研, 真正做到教研相长。本改革涉及的相关内容已经在两次国际会议上做报告, 并撰写论文两篇, 一篇已经发表在 JCR 二区 SCI 期刊 *Journal of Magnetic Resonance* 上, 另一篇也已准备投稿。

## 5. 总结

通过将抽象的泛函分析课堂融入具体的工程案例这一尝试, 学生们普遍反映对泛函分析的理论有了更加深入的了解, 也体会到抽象的数学理论对工程案例的指导作用, 端正了对数学课程的认识, 打破“数学无用”的思维模式, 将理论与实践结合起来。从教学效果看, 这些新增知识点结合石油石化专业特点, 使学生了解到将泛函分析作为工具在工程方面具有很大的应用。通过课堂教学中的实践, 从形象直观到理性思维, 台阶式由浅入深, 分化难点, 深入浅出, 启发和引导学生由具体到抽象的思考问题, 使得抽象的泛函分析课堂融入具体的工程案例, 同时加强了学生理论学习和实际应用相结合的训练, 提升了学生利用所学知识解决问题的能力, 取得了很好的教学效果。教师在改革中也获得了收获, 真正做到了教研相长。

---

## 参考文献

- [1] 赫海龙. 对泛函分析课程教学的若干思考[J]. 大学数学, 2019, 35(4): 42-47.
- [2] 刘曙云, 郭瑞平, 李元左. 工科研究生“应用泛函分析”教学的几点思考[J]. 大学数学, 2011, 27(1): 203-206.
- [3] 张恭庆, 林源渠. 泛函分析讲义[M]. 北京: 北京大学出版社, 1987.
- [4] Rudin, W. (2004) *Functional Analysis*. 2nd Edition, China Machine Press, Beijing.
- [5] 王家映. 地球物理反演理论[M]. 武汉: 中国地质大学出版社, 1998.
- [6] 杨文采. 地球物理反演的理论和方法[M]. 北京: 地质出版社, 1996.
- [7] 张育红. 第一类 Fredholm 积分方程的正则化解法[J]. 河北师范大学学报(自然科学版), 1989, 13(4): 45-53.
- [8] Gao, Y., Xiao, L.Z., Zhang, Y. and Xie, Q.M. (2016) The Generalized Phillips-Twomey Method for NMR Relaxation Time Inversion. *Journal of Magnetic Resonance*, **271**, 1-6. <https://doi.org/10.1016/j.jmr.2016.07.018>