Creative Education Studies 创新教育研究, 2023, 11(6), 1449-1457
Published Online June 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2023.116221

Hans汉斯

APOS理论视角下高中数学概念的深度学习教学设计研究

刘梦露，徐金润，肖加清*

黄冈师范学院数学与统计学院，湖北 黄冈

收稿日期：2023年5月9日；录用日期：2023年6月12日；发布日期：2023年6月20日

摘 要

数学概念是构建数学理论大厦的基石，在整个高中教学中具有举足轻重的地位。鉴于数学概念自身的抽象性和复杂性，如何实现高中生数学概念深度学习仍是目前亟需解决的难题。APOS理论为数学概念教学提供了经典的理论模型，本研究在探讨APOS理论与深度学习理论的基础上，分析了二者结合的可行性。选用人教版高中数学“基本不等式”教学为例，基于APOS理论的四个阶段展开具体的教学设计，分步论证了如何利用APOS理论促进高中生数学概念深度学习。

关键词

APOS理论，数学概念，深度学习，基本不等式

APOS Theory Perspective on High School Mathematics Concepts: A Study on Instructional Design for Deep Learning

Menglu Liu, Jinrun Xu, Jiaqing Xiao*

College of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: May 9th, 2023; accepted: Jun. 12th, 2023; published: Jun. 20th, 2023

Abstract

Mathematical concepts are the building blocks of mathematical theory and play a pivotal role in

*通讯作者。

文章引用: 刘梦露, 徐金润, 肖加清. APOS 理论视角下高中数学概念的深度学习教学设计研究[J]. 创新教育研究, 2023, 11(6): 1449-1457. DOI: 10.12677/ces.2023.116221

the teaching of mathematics in senior secondary schools. In view of the abstraction and complexity of mathematical concepts, how to realize the deep learning of mathematical concepts among high school students is still an urgent problem to be solved at present. The APOS theory provides a classical theoretical model for teaching mathematical concepts, and this study analyses the feasibility of combining APOS theory and deep learning theory. Using the teaching of "Basic Inequalities" in senior secondary mathematics of the Humanities Education Edition as an example, this study develops a specific teaching design based on the four stages of APOS theory and demonstrates how to use APOS theory to promote the deep learning of mathematical concepts among senior secondary students in a step-by-step manner.

Keywords

APOS Theory, Mathematical Concepts, Deep Learning, Basic Inequalities

1. 问题提出

数学概念是导出数学定理、法则、公式的逻辑基础，是建立数学理论系统的中心环节[1]。但是在日常教学中，学生对数学概念的学习效果不理想：一是因为数学概念本身比较抽象，不易理解；二是教师在教学中容易忽视概念的生成，注重概念的机械背诵和重复的练习训练，致使学生对知识只知其然而不知其所以然。这些依靠单纯记忆和反复练习的浅层学习对于促进学生理解知识、整合知识以及迁移应用知识等能力发展都有着极大的局限。美国数学教育家杜宾斯所提出的 APOS 理论，为数学概念的教学提供了经典的理论模型。该理论模型分为活动、过程、对象、图式四个阶段，强调在教学中要创设问题情境，通过问题引导的方式让学生主动参与课堂，对所学知识进行深度反思，把握数学概念的本质属性，最后将其熟练迁移应用到新的问题情境当中[2]。在这一过程中，学生的反思质疑能力、知识整合能力与迁移应用能力都能得以提升，这与深度学习理论强调对知识的理解性学习、知识间的联结与融合以及迁移应用能力等理念相符合[3]。因此，本研究将基于 APOS 理论开展促进高中生数学概念深度学习的教学设计研究。一方面，APOS 理论与深度学习理论的结合是对教育理论整合研究的尝试，理论上具有一定的可行性；另一方面，将两种理论融合，给出具体的教学设计，分步论证 APOS 理论视角下有利于促进高中生数学概念深度学习的实现，希冀为一线教师提供参考。

2. 理论梳理

2.1. APOS 理论

1980 年末，美国杜宾斯等人基于建构主义创立了 APOS 理论模型，该理论认为学生学习数学概念必须经历以下四个阶段，依次是活动(action)阶段、过程(process)阶段、对象(object)阶段和图示(scheme)阶段，见图 1。APOS 理论最早由乔连全引入，他详细阐述了该理论的起源、内涵、模式和应用方式，为 APOS 理论传入国内奠定基础[4]。近几年来，较多学者对其从理论研究转向实践研究。刘金蕊通过“二面角”概念教学的实例，将其与传统的二面角教学模式进行对比，证明基于 APOS 理论的教学设计模式具有明显的优越性[5]。王楠楠将变式教学理论融入 APOS 理论，设计了“一次函数”概念教学和“二次函数”

概念教学，证明了 APOS 理论与变式理论相结合对学生的数学学习产生了积极作用[6]。

可见，APOS 理论在数学领域具有广泛的应用，除了与概念教学结合之外，也有少数学者开始尝试 APOS 理论与其他理论的整合研究。以概念教学作为 APOS 与其他理论结合的联结点，希翼达到更优的教学成效。

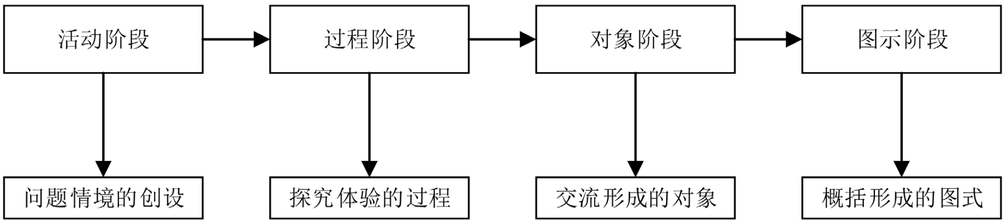

Figure 1. The four stages of APOS theory
图 1. APOS 理论的四阶段

2.2. 深度学习理论

1976 年，美国学者 FerenceMarton 和 Roger Saijo 提出深度学习(Deep Learning)和浅层学习(Surface Learning)两种不同学习层次概念。他们认为深度学习注重对知识的深入思考、分析和加工[7]。此后，越来越多的学者开始关注深度学习。黎加厚教授是国内第一位涉猎深度学习的学者，他将深度学习界定为：学生在对新知识理解的基础上，对新知识能够批判性的学习，并将新知与已有的知识体系相融合，结合与之关联的思想，将所学的知识迁移应用到新的情境中，用以处理相关问题[8]。这一观点得到了较为广泛的认同。胡航和董玉琦认为深度学习是一种具有主动性和批判性的有意义学习。在真实问题情境下，学习者对知识进行深度加工，批判性的学习新知识并将其纳入已有的知识体系，完成对概念的深层次理解，并将学习的新知迁移应用到其他真实问题情境中解决问题，最终培养学生的高阶思维[9]。

综上，深度学习是理解性的学习[10]，通过创设问题情境，激发学生兴趣，让学生主动建构知识，并且将新知与旧知结合，构建新的知识体系，培养学生批判、反思、构建整合与迁移应用的能力，促进学生高阶思维的发展，进而促进学生核心素养的达成。

2.3. 二者结合的可行性

APOS 理论的四个阶段是相对连续、逐层深化的。基于 APOS 理论的指导，学习者对数学概念的学习是从感知、理解、内化到最终构建出完整的知识体系的过程[11]。APOS 理论四阶段是一个有机的整体，每个阶段都有其特定意义，但又相互联系。活动阶段强调创设问题情境，这是实现深度学习的基础和前提条件。过程阶段和对象阶段以学生原有的知识经验为基础，基于教师的问题引导，对活动阶段感知的数学概念进行理解与内化，抽象出概念的本质特征，通过小组讨论、合作探究等互动学习促进学生思维和能力的发展，这是实现深度学习的关键。图式阶段学生将过程阶段内化的概念与已有的知识体系相融合形成新的图示，并用它来解决与概念有关的问题。这一过程中，学生的反思质疑能力、知识整合能力与迁移应用能力能够得以锻炼与提升，这是实现深度学习的具体表现。

综上所述，APOS 理论是实现深度学习的具体途径，而深度学习是 APOS 理论的目标取向，二者不论是在理论层面还是实践层面，都具有一定的可行性。

3. 教学设计呈现

“基本不等式”是高中生学习的第一个重要不等式，既对前面所学不等式的性质、一元一次不等式

等知识的进一步深化与发展，又是今后求函数最值、证明复杂不等式的基础。从学生的已有认知来看，高一学生已经具备了一定的观察能力和推理能力，但在对基本不等式概念的探索和证明过程的理解还是会存在一定的困难。要真正地掌握基本不等式的概念，并且能够应用其解决实际问题是学生需要突破的难点。因此，本研究基于 APOS 理论，探索“基本不等式”的教学设计，期以为如何实现数学概念深度学习提供借鉴价值。

3.1. 活动阶段：创设活动情境 引发学生思考

活动阶段引入生活情境激发学生的学习兴趣，将注意力集中到课堂上。

教师开篇讲述自己去黄金店买首饰的经历并引入问题：一家黄金店使用一架两臂长不等的天平称黄金，教师到店后，售货员把用于制作首饰的黄金放在天平左右两盘各称一次，天平平衡时，两次所用砝码的质量分别为 a 克和 b 克，此时售货员说黄金的质量即为 $\frac{a+b}{2}$ 克，见图 2。

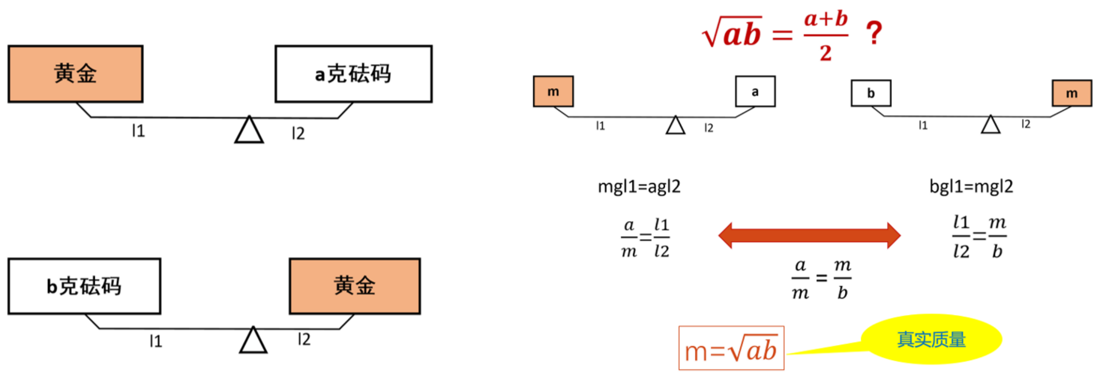

Figure 2. Quality of real and fake gold
图 2. 真假黄金质量

教师提醒学生黄金的质量还可通过物理学中的杠杆原理计算。学生纷纷回忆所学的知识，并很快得出黄金的质量为 $\sqrt{ab}$ 克。到底哪个才是黄金的真实质量，引发课堂矛盾，让学生思考二者的关系，顺势引出课题——基本不等式。

设计意图：在 APOS 理论的活动阶段，从生活实例出发，创设问题情境——教师去黄金店买首饰。由情境导入，有利于激发学生的学习兴趣和探究热情，促使学生主动参与到对基本不等式知识的构建中，而这正是实现深度学习的前提。

3.2. 过程阶段：合作探究问题内化数学概念

1) 探究问题，形成猜想

引出课题后，首先对基本不等式进行直观比较，通过取数和动手操作让学生积极参与到课堂中来。

问题 1：当 $a>0$，$b>0$ 时，$\frac{a+b}{2}$ 与 $\sqrt{ab}$ 大小如何？请同学们猜想得出结论。

学生以小组的形式对二者大小展开讨论。首先举出几组正实数进行计算比较，然后从特殊到一般进行归纳猜想，最终得出结论：$a>0$，$b>0$ 时，有 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$。

设计意图：引导学生进行取数猜想，小组讨论的形式可以让学生提出不同观点，并对他人的看法产生质疑，培养学生的批判性思维。最后归纳总结，体现了数学从特殊到一般的过程。

DOI: 10.12677/ces.2023.116221

问题 2：动手操作，直观体验二者的大小。准备两组正方形，第一组的两个正方形面积相等，第二组的面积不等。将第一组、第二组的两个正方形分别沿着对角线进行对折剪切，让学生观察得到了什么图形？之后将剪切成的图形进行拼接，并让学生观察拼接之后的图形。此时，能否从已知图形的边或是面积来表示 $\frac{a+b}{2}$ 与 $\sqrt{ab}$ ？

第一组：

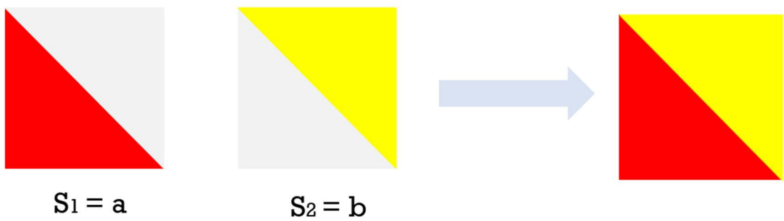

Figure 3. Equal area
图 3. 面积相等

第二组：

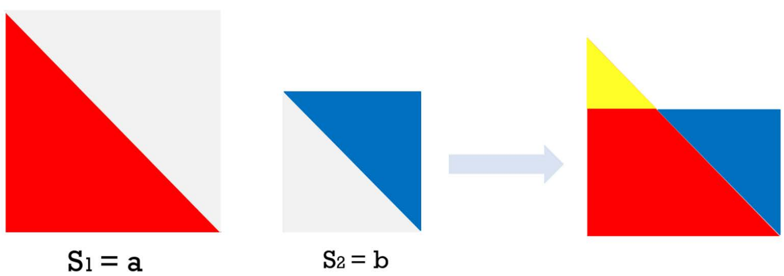

Figure 4. Unequal area
图 4. 面积不等

学生将第一组正方形分成了两个全等的等腰直角三角形，并在教师的引导下发现从两个正方形上剪切成的等腰直角三角形的面积分别为 $\frac{a}{2}$ 和 $\frac{b}{2}$，面积和为 $\frac{a+b}{2}$ 。另外正方形的边长分别为 $\sqrt{a}$ 、$\sqrt{b}$ ，将两个等腰直角三角形拼在一起，它们可以组成一个新的正方形，面积为 $\sqrt{ab}$ ，见图 3。即两等腰直角三角形的面积等于新的正方形的面积，即 $\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$ 。此时，教师提问学生 a、b 的关系，学生回答 $a=b$ 。让学生直观体验等号成立的条件。

在第一组操作的经验上，学生容易得出第二组中两等腰直角三角形面积为 $\frac{a+b}{2}$ 。不同的是此时的面积不相等，两等腰三角形拼接在一起的图形是不规整的，见图 4。此时就需要学生一双善于发现的眼睛，学生发现，将不规整的折进去就构成了一个矩形，此时矩形的长为 $\sqrt{a}$ ，宽为 $\sqrt{b}$ ，面积为 $\sqrt{ab}$ 。即两等腰直角三角形的面积大于矩形的面积，$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$ ，此时 $a\neq b$ 。

两组正方形比较完毕，学习已经从折纸过程中体会到了二者的大小。从取数猜想到动手操作，学生对基本不等式的形成过程基本掌握，教师大胆提问学生，让学生对基本不等式进行归纳总结，最后师生共同总结出：对于任意的 $a>0$ ，$b>0$ ，$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ ，当且仅当 $a=b$ 时等号成立。

设计意图：通过折纸游戏，让学生通过观察面积的变化，直观体验基本不等式。利用一组面积相等和一组面积不等的正方形形成对比，让学生直观体验其等号成立的条件，最后归纳总结得出结论。在问题探究中，学生亲历动手过程，在操作中形成多种活动经验，锻炼思维的灵活性与发散性，培养学生的质疑、反思与实践能力。

(二) 验证猜想内化概念

学生此时对基本不等式的学习还停留在猜想层面，数学是一门严谨的学科，猜想需要通过证明才能保证它的正确性。

问题 3：能够证明通过取数以及折纸猜想得出的结论吗？

学生：因为 $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}\geq 0$，所以 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ 成立，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立。

作差法是证明两式大小关系的最基本的方法，学生在此之前学习了作差法证明，在证明基本不等式时容易想到这个证明方法。除了作差法，还可以利用分析法进行证明。但是学生没有系统学习过分析法，所以教师要进行适当的引导，让学生小组之间展开讨论，通过一步步分析，由未知到已知，从结论逐步追溯到前提。

师生活动：要证 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$，只需证 $a+b\geq 2\sqrt{ab}$，即证 $a+b-2\sqrt{ab}\geq 0$，而 $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\geq 0$，故 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ 成立,当且仅当 $a=b$ 时，等号成立。

教师引导学生利用分析法对基本不等式进行证明后，向学生介绍我们所用的方法——分析法，即从需要证明的结论出发，逐步寻求使结论成立的充分条件，直至归结为判定一个显然成立的条件为止的证明方法，也叫执果索因法。

在学生亲历基本不等式发生、探索、证明过程后，此时抛出课堂教师去黄金店买首饰的经历，让学生利用所学再次思考这次的买卖是否公平，培养学生分析问题、解决问题与迁移应用的能力，同时戳穿老板的阴谋，保证了故事的完整性。

设计意图：证明让学生对基本不等式从感性认识到理性证明，实现从感性到理性的升华，体现数学学科的严谨性和理性精神，有助于提升学生的推理能力。小组之间进行讨论，教师进行引导，培养了学生合作交流的能力和质疑精神。证明之后，带学生回忆之前问题情境中遗留的问题，让学生利用现学的知识去解决问题，一定程度上培养了学生迁移应用知识的能力，同时趣味性的故事有利于激发学生的学习兴趣，形成积极的学习态度和动机。

3.3. 对象阶段：几何解释图形 把握概念本质

在过程阶段，通过对基本不等式形成过程的探究以及证明，对基本不等式概念进行了内化，对概念的的认识从感性上升到理性。对象阶段，通过对基本不等式进行几何解释，进一步体会数形结合的思想，把握概念本质。

在上一阶段，通过对基本不等式的探索、证明，教师引导学生得出了基本不等式的概念。再次进行总结：对于任意的 $a>0$，$b>0$，$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立。并深化概念，介绍 $\frac{a+b}{2}$ 为 a，b 的算术平均数，$\sqrt{ab}$ 为 a，b 的几何平均数。

探究：AB 是圆的直径，点 C 是 AB 上一点，AC = a，BC = b，过点 C 作垂线于 AB 的弦 DE，连接 AD、BD，见图 5。你能利用这个图形得出基本不等式的几何解释吗？

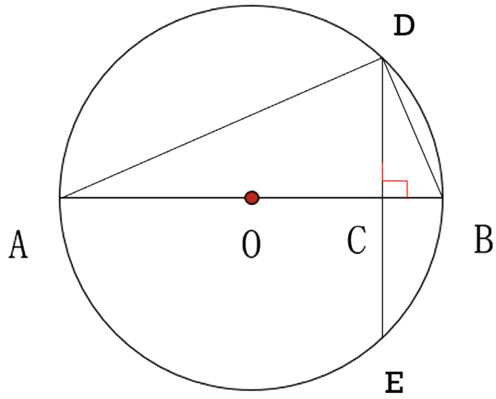

Figure 5. Geometric interpretation of the basic inequality
图 5. 基本不等式的几何解释

问题 4：试找出哪条线段表示$\dfrac{a+b}{2}$，哪条线段表示$\sqrt{ab}$？它们分别表示什么几何意义？

学生：$AB=a+b$，所以$\dfrac{a+b}{2}$代表的是圆的半径长；根据 ΔACD~ΔDCB，或者根据三角形的射影定理，可以得到$CD=\sqrt{ab}$，所以$\sqrt{ab}$代表的是半弦长。因为圆的半径不小于半弦，所以$\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$。

师生活动：学生观看教师 GeoGebra 或几何画板的演示，发现当 C 点与 0 点重合，$a=b$时，等号成立，此时 CD 达到最大值。

设计意图：过程阶段和对象阶段是实现学生数学概念深度学习的关键。以几何图形为背景，让学生通过观察，探寻基本不等式的几何意义，有利于培养学生数形结合的思想和直观想象的能力。该阶段处于基本不等式概念形成的对象阶段，通过该阶段的学习，学生对基本不等式的概念与内涵有了更为深刻的理解，为后续对基本不等式的应用奠定基础。

3.4. 图式阶段：知识迁移应用 形成概念体系

通过对象阶段的学习，学生已经深刻理解了基本不等式的内涵。图式阶段，将通过基本不等式的应用，发现基本不等式的外延的意义：处理最值问题(一正二定三相等)，深挖基本不等式求最值的本质，体会其中蕴含的数学思想，形成基本不等式的相关图式。

例 1：已知$x>0$，证明$x+\dfrac{1}{x}\geq 2$，同时给出等号成立的条件。

学生：观察$x+\dfrac{1}{x}$，发现$x\cdot\dfrac{1}{x}=1$，联系基本不等式，因为$x>0$，所以$x+\dfrac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2$，当且仅当$x=\dfrac{1}{x}$，即$x^2=1$，$x=1$时等号成立。

学生独立思考，给出证明思路后，教师进行总结，通过上述证明归纳利用基本不等式解决最值问题时需要满足的 3 个条件——两个代数式都为正数、积为定值、等号成立，简称“一正二定三相等”。

变式 1：已知x,y,z都是正数，求证$(x+y)(y+z)(z+x)\geq 8xyz$。

设计意图：对于学生而言，归纳基本不等式求最值问题的使用条件比较困难，因此通过例题，学生发现定值，求解最值，最终教师帮助总结。随后一道变式题，强化对知识的应用，拓宽学生的解题思路，在挑战中寻找乐趣，有助于提升学生的思维层次。

例 2：求函数$y=\sqrt{x(10-x)}$ $(0<x<10)$的最大值。

变式 2： 已知 $x<\frac{7}{5}$，求函数 $y=5x-2+\frac{1}{5x-7}$ 的最大值。

设计意图： 不断深化学生对基本不等式的理解，让学生体会基本不等式在求解函数最值方面的价值。通过变式，指导学生构造定值模型，让学生更深层次理解基本不等式求最值的本质，培养学生解决问题的能力，促进学生的深度学习的实现[9]。

拓展探索： 在北京召开的第 24 届国际数学家大会的会标，会标是根据中国古代数学家赵爽的线图设计的。你能在这个图中找出“基本不等式”吗？见图 6。

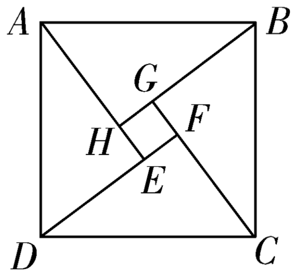

Figure 6. Zhao Shuang string diagram
图 6. 赵爽弦图

设计意图： 让学生从上图中找出“基本不等式”，既培养了学生的识图能力、数据分析能力与知识整合的能力，又助于提升学生的数学文化素养，渗透数学思想方法，从而促进学生高阶思维的发展。

问题 5： 本堂课学习了什么知识？掌握了什么技能与方法？体会到了什么思想？

师生活动：学生回答，教师作总结点评。

设计意图： 帮助学生回忆基本不等式的形成过程，引导学生从基本不等式的概念、基本不等式的证明方法以及其中蕴含的数学思想方法等方面进行总结，使得学生对于本节课有一个完整的认识，培养学生整合构建知识的能力，初步形成有关基本不等式的图式，促进学生对数学概念的深度学习，为之后的学习打下扎实的基础。

4. 结论与展望

数学概念具有很强的抽象性，APOS 理论四个阶段之间相对连续、逐层深化，为数学概念教学提供了经典范式。本研究选用高中概念教学的难点“基本不等式”，根据 APOS 理论四阶段开展具体的教学设计。在整个教学过程中，学生批判质疑能力、整合能力与迁移应用能力得到提高，高阶思维得到发展，实现了数学概念的深度学习。目前，将 APOS 理论和深度学习相结合应用于数学概念教学的研究还不多见，期望后续学者选择其他课题进行教学设计和教学实践，为数学概念教学提供更多更具科学性和严谨性的范例。

基金项目

黄冈师范学院 2023 年研究生工作站课题“SOLO 分类理论下高中生数学问题解决能力的测评体系研究——以黄州中学为例”(5032023021)的研究成果。

参考文献

[1] 潘超. 数学概念深度教学须“五理解”——以人教版“一次函数”为例[J]. 数学通报, 2021, 60(4): 25-29.
[2] 吴华, 周鸣. GeoGebra 环境下基于 APOS 理论的数学概念教学研究——以导数概念为例[J]. 数学教育学报, 2013,

22(2): 87-90.

[3] 杜娟, 李兆君, 郭丽文. 促进深度学习的信息化教学设计的策略研究[J]. 电化教育研究, 2013, 34(10): 14-20.

[4] 乔连全. APOS: 一种建构主义的数学学习理论[J]. 全球教育展望, 2001(3): 16-18.

[5] 刘金蕊. 基于 APOS 理论的二面角概念教学研究[D]: [硕士学位论文]. 天津: 天津师范大学, 2015.

[6] 王楠楠. 基于 APOS 理论的初中数学概念的变式教学研究[D]: [硕士学位论文]. 上海: 上海师范大学, 2020.

[7] Marton, F. and Saljo, R. (1976) On Qualitative Differences in Learning: I—Outcome and Process. *British Journal of Educational Psychology*, **46**, 4-11. https://doi.org/10.1111/j.2044-8279.1976.tb02980.x

[8] 何玲, 黎加厚. 促进学生深度学习[J]. 现代教学, 2005(5): 29-30.

[9] 胡航, 董玉琦. 技术促进深度学习: "个性化-合作"学习的理论构建与实证研究[J]. 远程教育杂志, 2017, 35(3): 48-61.

[10] 常立娜. 深度学习文献综述[J]. 开放学习研究, 2018, 23(2): 30-35.

[11] 蔡晨晨. APOS 理论视角下促进高中数学深度学习的教学设计研究[D]: [硕士学位论文]. 福州: 福建师范大学, 2021.