Creative Education Studies 创新教育研究, 2023, 11(6), 1538-1543
Published Online June 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2023.116233

少学时条件下抽象代数课程教学的探究

李振业

北京化工大学，数理学院，北京

收稿日期：2023年4月26日；录用日期：2023年6月20日；发布日期：2023年6月29日

摘　要

文章基于抽象代数教学方面的实践，对抽象代数的教学内容的组织选取和具体讲授的安排进行了探索，针对课程不同部分的内容分别给出了可行的方案，以满足在学时较少的条件下完成教学任务的需要。

关键词

抽象代数，大学教育，少学时

Research on Teaching of Abstract Algebra with Less Class Hours

Zhenye Li

College of Mathematics and Physics, Beijing University of Chemical Technology, Beijing

Received: Apr. 26th, 2023; accepted: Jun. 20th, 2023; published: Jun. 29th, 2023

Abstract

Based on the author's experience in teaching abstract algebra in recent years, this paper explores the organization and selection of teaching content and specific teaching arrangements of abstract algebra, and gives feasible plans for different parts of the course to meet the needs of completing teaching tasks under the condition of less class hours.

Keywords

Abstract Algebra, College Education, Less Class Hours

文章引用: 李振业. 少学时条件下抽象代数课程教学的探究[J]. 创新教育研究, 2023, 11(6): 1538-1543.
DOI: 10.12677/ces.2023.116233

1. 引言

抽象代数是大学数学系本科各专业的核心专业课之一，教授代数学中最基本的抽象结构及其理论，担负着对数学系各专业本科生进行基本的代数训练的任务。通常情况下，该课程的内容包括基本的群论，环论和域论，一般安排为周学时 4，计 64 课时。然而由于各种客观条件的限制，在多数学校，该课程只能安排为周学时 3 (48 课时)甚至更少的学时。因此在教学中往往出现内容过多，时间紧张，教师教学组织困难，学生学习效果不良的问题。目前已经有不少关于抽象代数课程的教学研究[1] [2] [3] [4]。在教学实践中，通常采用的做法有：将排在后面的章节直接去掉(一般来说是去掉域论的部分甚至环论的一部分内容) [5]；将一部分内容安排学生在课后自学等等[6]。在本文中，基于教学实践经验，我们对该课程的内容选取和组织安排作了一定的探索，期望在课时较少的条件之下，也能够保证学生接受较为完整的训练，建立起对抽象代数理论最基本的认识，掌握一些在理论和实践中均有重要意义的基本代数工具。下面笔者对本课程的各部分基本内容分别进行讨论。

2. 群论部分

在本科的抽象代数课程中，群论部分具有特殊的意义，因为该部分学生第一次接触到抽象的由运算性质作为公理定义的代数结构，通过该部分的教学，学生开始逐步熟悉代数结构的性质和研究方法(子结构，商结构，生成，同态，同构，同态基本定理等等)，这些不只限于群的范围，对之后的其他代数结构的学习也具有重要的意义。通常本部分在教学中所占的学时数非常大，一般在 30 学时以上，对于一门 48 学时(甚至更少)的课程，这已经占据了课程的大部分时间，使得环论和域论只剩下十几学时的时间，已经基本不能进行较为完整训练了。为了解决这个问题，我们作如下的安排：

2.1. 精简有限群论结构分析的内容

本简有限群的结构分析的内容：在本科课程中，群论部分一般限于有限群的理论。通常来讲，该部分以有限群结构分析的一些内容作为重难点，包括简单的构造理论(直积，半直积)，Sylow 定理，小阶群的结构分析，有限生成 Abel 群的结构等等。在教学实践中，我们发现对这些内容作适当的精简更符合少学时状况下本课程教学的实际需要。主要有以下几个原因：

第一，群论部分中教授有限群结构理论的主要目的是通过有限群的结构理论对代数结构研究的理论框架和一般方法建立认识，而掌握有限群结构的特殊理论是第二位的。在学时较少的情况下，应当先完成主要的目标，因此，那些专属于有限群特有的结构理论，对于一般代数结构的认识没有直接指导意义，在这种情况下应当精简。

第二，从教学实践表明，在一个合理的课时范围内(约 22 学时，总学时数的一半)是不能够有效地完成这些内容的教学的，而将这些内容进行充分的讲授(至少 10 课时)，将使得群论部分占据 30 课时以上。这会使本课程的大部分内容进入有限群论的范围，从而使得本课程脱离其主要目标。

第三，这些内容的难度较大，与基本理论的难度脱节，比如 Sylow 定理的证明，其所使用的群在集合上作用的技巧超过一般学生所能掌握的基本技术，其难度可能更加适合作为研究生课程的内容。有些内容的技巧较为复杂而缺乏一般性的意义，比如 5 阶以上交错群单性的证明。这些难度较大的内容学生

很难有效掌握，而不能掌握内容则会反过来挫伤学生进一步学习的积极性，从而对整个课程的学习产生负面影响。

2.2. 以群在集合上的作用为主线

在群论部分乃至整个抽象代数课程教学中，一个突出的难点是学生缺乏对抽象代数结构的具体认识，这会使得学生最终学到的只是一些形式的概念和教条，既不能理解其本质，更无法在实践中运用。然而这种认识不能够从抽象定义的概念中获得，必须给出代数结构的具体形象。因此，我们应当把群的具体表示方法作为主线，也就是群在集合上的作用。为此，我们突出两个重点，一是群在有限集上的作用，二是群在对称图形上的作用。

群在有限集上的作用把有限群表示为置换群的子群，这是有限群论研究的重要工具，有限群结构中的许多重要结论是依靠群在集合上的作用来得出的；同时它还是有限群论在域应用的主要途径之一，比如组合计数，代数图论等等。在教学中，我们以群在有限集上的作用为主线，把很多分散的内容串联起来。比如我们以子群在大群上平移作用的轨道来给出陪集，以一个置换生成的循环群在集合上的作用给出置换的轮换分解，以群在有限集上的作用所给出的群到置换群的同态作为同态理论中的主要例子等等。

与通常的做法相比，这样的安排有如下的优势：首先这能够降低学生理解数学对象的困难。群在集合上的作用使得群有了具体的形象，从抽象的元素变成了置换或者变换。在这种具体的条件之下，群作用的一系列概念和理论可以较为直观地理解，相比于抽象结构理论更容易为学生所接受。而当学生对群作用熟悉之后，能够比较容易地把相应的概念和理论迁移到群结构的分析上，这样就降低了学生理解抽象结构的难度。比如陪集的概念往往出现在群论部分的早期，在那时，这个概念属于较为困难的概念，在现在的处理方式之下，学生对群在集合上的作用有了一定的认识后，陪集可以理解为轨道，陪集的一些性质也可以从轨道的一般性质给出，理解这个概念的难度就降低了。其次，这样的处理方式也使得内容组织变得更加紧凑。通过把一些群结构理论的内容转变为群作用理论的例子，减少了一些不必要的重复，而且使得作为中心的群作用理论有更加充足的时间和材料进行训练，这使得基本内容的安排重点更加突出。

同时我们更加强调群在对称图形上的作用，也就是把一些群表示为某些具有对称性的几何图形上的对称操作。我们认为这个内容的重要性体现在两点：其一，对称操作把群中的元素实现为二维或者三维空间中的正交变换，也就是给出了群的某种线性表示，而表示理论则是现代数学的核心内容之一。当然，在本科生课程中系统地介绍有限群的表示理论是不现实的，但是群在对称图形上的作用则给出了学生对于表示最初步和直观的认知。其二，群在对称图形上的作用体现了群是描述客观物质世界中对称现象的数学工具，比如晶体学中的点群与空间群，它们成为固体物理和量子化学中最为重要的数学工具之一，这也是有限群的理论在实践中最为重要的应用。在教学中，我们把这个内容放在比通常的安排更加重要的地位，我们把本课程中所给出的主要的具体有限群都以这种 方式表示出来，并且尽可能地使用这种方式来阐明一些构造(比如一些同态和子群的构造)。

教学实践表明，这样的安排有一定的优势：首先，对称图形(如正多边形，正多面体等)作为学生在中学时期就已经熟悉而且充分直观的数学对象，相比于抽象的结构和公理，更加容易引起学生的兴趣，旋转、反射这种学生中小学时期就已经熟悉的操作，比置换甚至是抽象的元素更容易为学生所接受；其次，对称图形直观的特点大大降低了学生理解一些抽象构造的难度，因为在这种情况下，群的抽象性质往往具有更加直观的表现形式。比如，我们把四阶对称群实现为正四面体上的对称操作，那么四阶交错群就由这些对称操作中的旋转给出，相比于通常通过置换的奇偶性来定义交错群的做法，这样给出四阶交错群的方式使得学生理解起来更加直观易懂。此外，群在群在对称图形上的作用可以与群在有限集上的作

用结合起来，为群在有限集上的作用提供了大量有意义的例子，丰富了群作用理论的训练材料，而且使得学生对代数图论形成了一定的初步认识。比如对于正多边形的对称操作构成的群(也即二面体群)，考察这个群在图形的顶点(或者边)构成的集合上的作用，就可以把这些对称操作实现为置换。通过不同的表现形式，可以让学生更加深刻地理解二面体群的结构和性质。

2.3. 强调与前置课程中的数学对象的联系

抽象代数以抽象的代数结构及其性质作为基本内容，为了使得学生能够更好地理解抽象定义的各种概念，往往需要通过具体的例子来加以阐释。但是，在教学实践中，我们发现，经常作为具体例子的有限群，学生也并不能很好地理解，更不用说通过这些例子来理解抽象的概念。这是因为虽然从理论上讲，小阶的有限群结构简单，但是学生是从本课程开始才接触到这些数学对象的，因此对这些对象熟悉程度不够。因此，在教学中，我们尽可能使用学生在前置课程(如线性代数)中已经熟悉的数学对象。比如我们在讲授群作用的轨道和代表元时，以对称矩阵的相合等价类和相合标准型作为基本的例子；在讲授群的生成时，以可逆矩阵可以表为初等矩阵的乘积(也就是初等矩阵是一般线性群的一组生成元)作为基本例子。虽然相比于通常使用更多的有限群的例子，这些例子所包含的数学内容更加复杂，但是由于学生在前置课程中对这些数学对象以及相关理论已经充分熟悉，因此反而更加容易为学生所接受，从而能够使学生更加高效地理解抽象概念的本质。

3. 环论与域论部分

在本科抽象代数课程中，环论与域论主要限制在交换环的范围内。在群论部分经过合理的组织后，环论与域论部分可以有 22 课时左右的教学时间，为我们充分讲授这部分内容打下了基础。与之前群论部分不同，学生在学习这部分内容时，对代数结构研究的理论框架和基本方法已经有了一定的认识，相当多的基本理论可以从群的基本理论中类比而来，比如：子环和子群，商环和商群，理想和正规子群，形式上非常类似的同态基本定理等等。另外，在环论与域论的部分，学生已经较为熟悉的例子(整数环，有理数域，实数域，复数域，多项式环)较之群论的部分更加丰富，特别地，课程中许多抽象理论的本质在这些具体的例子上已经表现出来。基于这样的特点，我们对该部分内容作如下的安排：

3.1. 突出理想的核心地位

从历史来讲，交换环的理论由整数和多项式的理论发展而来，在这个过程中，研究的核心对象经历了一个变化过程：从元素及其性质的研究发展到理想及其性质的研究。然而在通常的安排中，理想的地位被削弱了。这是因为构成本科抽象代数的环论部分主要内容的一些理论(唯一因子分解整环的理论)，而这些理论从本质来看在古典时期早已出现了，因此在通常的教学中，这部分理论仍以元素性质的分析作为主线。这使得对理想及相关理论的教学只是停留在定义、简单的性质和例子，从而实际上被放在了从属的地位。为此，在教学中，我们对内容重新进行了组织，在环论部分教学的早期就从元素过渡到理想，并且从学生熟悉的数学对象(整数环)出发，将元素的各种性质转化为相应理想的性质，使学生尽早建立其对理想的基本认识。

由此，我们自然地从具有特殊性质的元素(素数)引入素理想、极大理想等重要概念，并且给出特殊的理想与商环性质之间的联系，将此作为环论部分中理想理论的中心结论(需要指出的是在通常的安排下，这些概念在课时不足的情况下往往会被放弃掉)。在此基础上，我们从理想的角度来阐释唯一因子分解分解整环的理论：我们把因子分解的存在性转化为理想的链条件，把元素的素性和不可约性分别和与相应主理想的素性和极大性联系起来，这样把因子分解唯一性转化为理想性质的讨论。

DOI: 10.12677/ces.2023.116233

这样的安排具有一定的优势。首先，理想抓住了唯一因子分解整环理论中整除性理论的本质，使得学生对理论的理解更为深刻，而且在学生建立了对理想的基本认识之后，这样的方式反而降低了学生理解理论的难度，因为理想之间的关系往往比元素之间的关系表现得更为简单，比如理想的包含与元素的整除，理想的相等与元素的相伴等。其次，唯一因子分解整环的理论是环论部分的核心内容，如果将这部分内容的讲授与理想理论脱离开的话，会使得环论部分的整个内容冗长而且破碎。在这样的安排下，我们既完成了唯一因子分解整环理论的教授，同时利用该理论成为学生理解理想的理论与方法的训练材料，起到了一举两得的效果，而且也使得整个教学内容的组织更加紧凑连贯，在保证学生掌握充分的情况下有效地减少了学时。

3.2. 对域扩张理论的精简

通常本课程的域论部分的主要内容是域扩张理论，包含单扩张，代数扩张的基本理论，分裂域，正规扩张，可分扩张等。在教学实践中，我们发现，在有限的学时下，事实上只能保证学生掌握扩张的基本理论，也就是单扩张，有限扩张次数定理，有限扩张与代数扩张的联系等内容，并且通过具体的例子帮助学生掌握理论。如果增加更多内容，则需要压缩通过具体例子进行训练的时间，从而使得基本理论的掌握也出现欠缺。另外分裂域，正规扩张，可分扩张等内容的主要目的是为域的 Galois 理论做准备，而在少学时的情况下，是无论如何不可能做到向学生充分讲授 Galois 理论的。在这种情况下，在课程中讲授上述内容的意义大为降低。因此我们将这些内容作适当精简，集中力量保证学生能够掌握域论的基本内容和重要的例子。

3.3. 对有限域理论的处理

有限域是本科抽象代数课程中最为现代化的一部分内容，而且作为代数编码理论和密码学的重要数学基础之一，有限域提供了本课程的内容在实践中最重要的应用，因此应当在课程中占有一定的地位。在通常的安排下，学时不足时，这部分内容是最先被放弃掉的。但在教学实践中发现，通过之前在教学内容上良好的选取与组织，可以为讲授该内容剩下足够的时间(6 课时以上)。通过已经讲授过的域扩张基本理论和有限群的基本理论，完全可以把有限域基本的结构与理论建立起来，包括元素计数，乘法群结构，单扩张结构，结构唯一性，子域与自同构等等。在教学中，我们不刻意去增加理论的深度，而且特别注意向学生展示理论在具体的有限域上的表现。实践证明，在准备充分的情况下，通过讲授，学生能够处理的有限域(比如四元域，八元域，九元域)，能够根据所学理论给出这些有限域的元素，能够较为熟练地进行运算，并且能够以这些有限群为例初步理解有限域理论中的一些重要结果，基本上可以满足学生学习代数编码理论的初步需求。在此基础上，程度较好的学生能够自主完成 16 元域甚至 32 元域的计算，能够分析其子域以及自同构。

4. 结语

我们曾经在大三数学系的抽象代数课程的教学中按照本文所述组织教学。该课程周学时 3，共计 48 学时。群论部分讲授时长 21 学时，环论与域论部分(包含有限域)讲授时长 22 学时，甚至还留下一部分时间用于讲授有限域在代数编码中的应用。达到了教学目的，学生评价良好，对于群论部分，学生实际学习的效果与通常状况下使用 32 课时讲授的效果大致相当，对于环论和域论部分，学生对内容掌握的广度和深度均超过通常状况下只使用 14 学时的情形。

这里特别需要指出，我们这里的组织安排主要适应于少学时的情形(48 课时及以下)。对于学时数充足或者学生的背景较强的情况，应当提供更多的材料进行更为充分的训练。我们这里对于内容的选取和组织并不一定适用。

致　谢

感谢审稿老师以及编辑部老师对本文提出的宝贵意见！

参考文献

[1] 胡晓莉. 关于《抽象代数》课程教学改革的探索[J]. 大学数学, 2019, 35(5): 61-65.

[2] 金荣, 刘巍, 王柏育. 抽象代数教学改革的探索[J]. 教育教学论坛, 2017(30): 119-120.

[3] 王新甜. 抽象代数课程的教学改革探讨[J]. 教育信息化论坛, 2021(2): 70-71.

[4] 赵大亮, 刘永洋, 张文炳. OBE 教育理念下的本科教学改革与探究——以《抽象代数》课程为例[J]. 山东师范大学学报(自然科学版), 2022, 37(3): 320-324.

[5] 刘绍学. 近世代数基础[M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2016.

[6] 石生明. 近世代数初步[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2022.