

# CPFS结构单元教学在初中章末复习课中的探索与思考

——以人教版“一次函数”为例

张莹莹

黄冈师范学院数学与统计学院, 湖北 黄冈

收稿日期: 2023年8月24日; 录用日期: 2023年11月6日; 发布日期: 2023年11月15日

## 摘要

《义务教育数学课程标准(2022年版)》提出, 探索大单元教学、单元整体教学等教学方式变革, 以适应核心素养统领的课程内容结构化整合。文章基于以建立个体CPFS结构为主题的单元教学模式, 首先分析了一次函数的CPFS结构, 然后结合具体的教学内容, 设计了三个教学环节, 以引导学生在章末复习课中完善个体的CPFS结构, 实现一次函数知识、方法、思想的结构化。最后提出了几点思考, 为教师在章末复习课中更好地进行CPFS结构单元教学, 发展学生的结构化思维, 提升学生的数学素养提供了参考。

## 关键词

单元教学, CPFS结构, 章末复习课, 一次函数

# The Exploration and Thinking of CPFS Structured Unit Teaching in the Review Course at the End of Chapter in Junior High School —Take the “*Linear Function*” of PEP as an Example

Yingying Zhang

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: Aug. 24<sup>th</sup>, 2023; accepted: Nov. 6<sup>th</sup>, 2023; published: Nov. 15<sup>th</sup>, 2023

## Abstract

“Compulsory Education Mathematics Curriculum Standards (2022 edition)” proposed to explore the reform of teaching methods such as large unit teaching and unit whole teaching, in order to adapt to the structured integration of curriculum content led by core literacy. Based on the unit teaching mode of establishing individual CPFS structure, this paper first analyzes the CPFS structure of primary function, and then designs three teaching links in combination with specific teaching content to guide students to perfect the CPFS structure of individual function in the review class at the end of the chapter and realize the structuring of knowledge, methods and ideas of primary function. Finally, some thoughts are put forward, which provide a reference for teachers to better carry out CPFS structured unit teaching, develop students' structured thinking and improve students' mathematical literacy in the review class at the end of the chapter.

## Keywords

Unit Teaching, CPFS Structure, Chapter End Review Lesson, Linear Function

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 问题提出

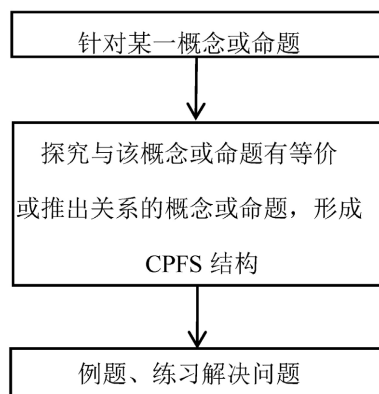
《义务教育数学课程标准(2022 年版)》提出了具体的数学学科核心素养。在这样的背景下,促使数学课程教学从关注单个知识点、课时转向整个单元教学设计,通过单元教学设计实现课程内容的结构化,达到华罗庚先生提出的“把书读薄”之境界。因此,学界将目光再次聚焦于单元教学,希望通过单元教学设计的方式,整体把握教学内容,进而落实数学学科核心素养的养成。

目前,对单元教学设计的研究主要可以分为理论层面和实践层面。其中,理论层面的研究主要包括单元知识结构的内涵[1],数学单元教学设计的定义[2],单元教学设计的路径[3],单元教学设计的依据、策略[4],单元教学设计的意义[5],以及其中存在的问题和解决对策等[6]。实践层面主要包括结合具体的教学内容,进行单元教学设计。单元整体教学设计中,关于章起始课教学和新授课的探究,已经很深入,并逐渐形成体系,对数学教学有一定的指导意义。我们都知道章末复习课在数学教学中有着重要的地位,是知识学习的高级阶段,有利于学生整合与理解知识,构建与应用解题方法,形成与内化数学思想。然而目前对章末复习课的研究不多,在知网以“复习课”和“数学”为主题检索核心期刊文章仅有 122 篇,主要包括复习课的教学策略研究、教学设计特征分析[7]和以具体的内容为例,编写的教学设计。在大单元教学观下,关于复习课的研究也不多,有研究者提出了大单元教学视域下数学复习课的教学策略[8],有研究者以具体的教学内容为例,探讨了大单元教学观下的教学案例[9]。

为了丰富单元教学设计中章末复习课的研究,本文在单元整体教学的视角下,探究章末复习课的教学。喻平教授提出了四种单元教学的模式,其中一种就是以建立个体 CPFS 结构为主题的单元教学模式,该模式适用于复习课的单元教学[10]。本文以该教学模式为基础,结合具体的教学内容——人教版“一次函数”,探讨如何在章末复习课中实施 CPFS 结构单元教学。

## 2. CPFS 结构单元教学设计路径

喻平教授指出以建立个体 CPFS 结构为主题的单元教学设计,是指引导学生探究与某个概念或命题具有等价或抽象关系(强抽象、弱抽象、广义抽象)的概念或命题,并将得到的概念或命题知识网络图用于解决一类问题的教学设计。其中 CPFS 结构指概念域、概念系、命题域、命题系等有关概念[11]。以建立个体 CPFS 结构为主题的单元教学结构如下图 1 所示。



**Figure 1.** Establish the unit teaching structure of individual CPFS structure as the theme

**图 1.** 建立个体 CPFS 结构为主题的单元教学结构

教学过程为: 第一步给出一个概念或命题, 这个概念或命题一般都是本章的学习主题, 如“一次函数”这一章学习主题就是函数和一次函数, 教师要引导学生围绕主题——“一次函数”建构 CPFS 结构; 第二步引导学生探究与“一次函数”存在等价关系的概念或命题, 例如“函数”与“一次函数”就存在强抽象关系, “一次函数”与“方程”与“不等式”就存在等价关系, 引导学生制作思维导图, 完善学生的 CPFS 结构; 第三步进行相关题目的训练, 题目的类型最好是一题多解, 并且能对其进行变式教学; 第四步引导学生反思, 进一步地完善知识结构图。

## 3. 一次函数 CPFS 结构分析

一次函数是人教版八年级第十九章的内容, 函数研究的是变量之间的依赖关系, 是刻画现实世界中事物变化规律的重要的数学模型, 用发展的眼光揭示现实问题中变量间的变化过程, 函数与方程、不等式的关系是运动与静止的辩证关系的一种体现。建立一次函数模型解决实际问题, 体现了数学建模的重要思想, 这对初中生来说都是一种思维上的挑战。同时作为“函数”这一重要数学主线的开篇之作, 不仅仅是让学生学会“一次函数”的基本知识, 更重要的是要掌握研究函数的基本方法和基本思想, 建构完整的数学认知结构, 为九年级二次函数的学习积累经验, 为高中的函数学习打下基础。在整个复习课中, 应在大单元教学观下帮助学生建立一次函数的 CPFS 结构, 将之前学习的方程、不等式与函数建立起关系, 明确研究函数的基本流程。基于 CPFS 结构对一次函数及其相关知识进行分析, 整理得到整体知识结构, 如下图 2 所示。

一次函数的概念域包括定义、图象、表达式。一次函数是函数的下位概念, 从一次函数到函数的抽象是弱抽象。对于函数来说, 不仅要掌握定义, 而且要研究函数的性质。在初中阶段, 对于一次函数, 一般讨论函数的单调性(即函数值随自变量变化的情况)。一元一次方程、一元一次不等式是一次函数的特

特殊情况，从一次函数到一元一次方程、一元一次不等式的抽象为强抽象。方程、不等式问题均可以从函数的角度看待，利用一次函数解决。一次函数的概念和命题网络如图3所示。

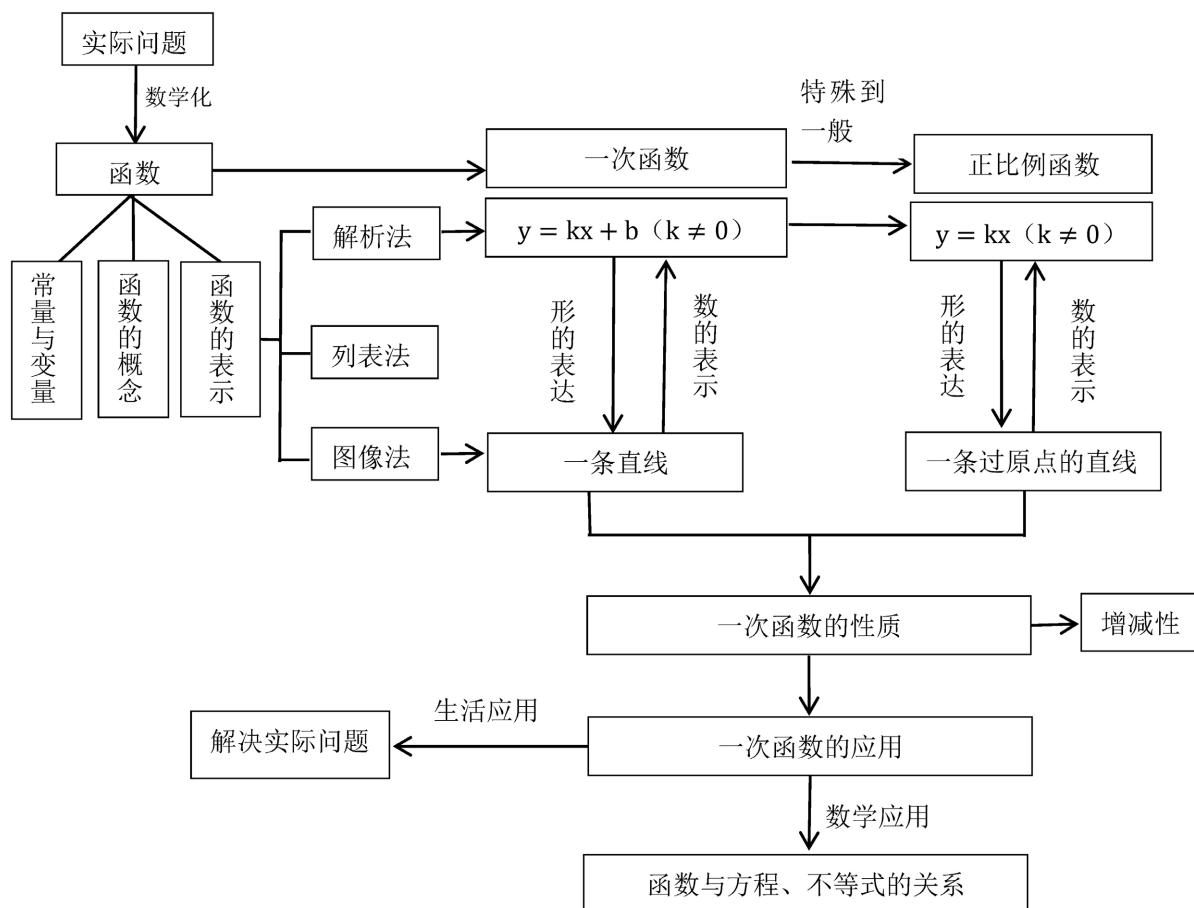


Figure 2. Overall analysis of CPFS structure of linear function

图2. 一次函数 CPFS 结构整体分析

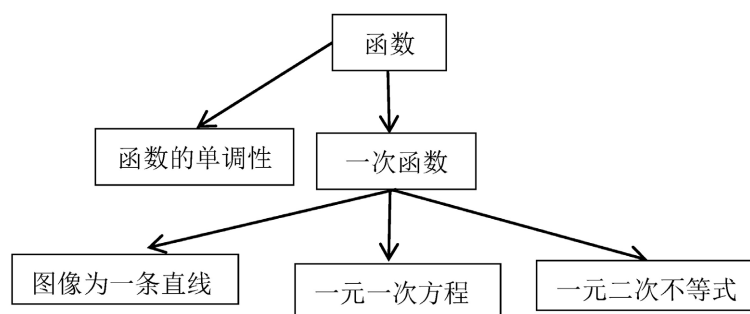


Figure 3. Conceptual and propositional networks of linear function

图3. 一次函数的概念和命题网络

综上，一次函数的定义、图像、表达式构成了一次函数的概念域；一次函数与一元一次方程、不等式、函数相关知识以及实际应用构成了一次函数的概念系；一次函数的性质、一次函数图像与系数  $k, b$  的关系构成了命题系。在构建一次函数概念体系的过程中，涉及了诸多数学思想，比如数形结合思想、转化与化归思想、对应思想、特殊化和一般化思想、函数思想和方程思想。上述所有知识及数学思

想方法共同构成一次函数的 CPFS 结构。

#### 4. 构建个体 CPFS 结构的一次函数章末复习课教学设计

根据喻平教授提出的 CPFS 结构单元教学策略, 结合具体的教学内容, 本节复习课的设计分为 3 个环节: 1) 复习回顾本章的知识网络结构图, 建构学生的数学认知结构, 使学生的知识结构化; 2) 题组训练: 围绕这一知识网络结构图设计题组, 采用变式教学和设置开放性问题的方式, 帮助学生在头脑中形成完整的数学知识网络, 获得解决一类问题的方法, 使学生的方法结构化; 3) 问题解决: 设计综合性的问题, 渗透本章所有的数学思想, 把一道题归为一类题, 把一类题归为一种方法, 最后再把一种方法归为一种思想, 使学生的思维结构化, 提升学生的数学学科核心素养。具体设计如下:

环节 1: 复习回顾。

问题 1: 回顾本章, 同学们学了什么内容?

**教学分析:** 在复习回顾环节, 设置较为开放的问题, 唤起学生对本章知识点的回顾, 针对“一次函数”初步建立知识结构图, 为后面建构完整的数学认知结构做好准备, 教师也可以通过学生的回忆, 初步了解学生的已有基础, 才能在此基础上展开更深入系统的复习。

环节 2: 题组训练。

第一, 从数入手, 回顾概念

例 1 (由北师大版八年级上册第 79 页例题改编)某辆汽车油箱中原有汽油 60 L, 汽车每行驶 50 km 耗油 6L。

问题 1: (1) 设耗油量为  $y(L)$ , 汽车行驶路程为  $x(Km)$ ,  $y$  是  $x$  的函数吗? 为什么? 写出  $y$  与  $x$  之间的函数表达式?

(2) 设油箱剩余油量为  $Z(L)$ , 则汽车行驶路程  $x(Km)$  与油箱剩余油量为  $Z(L)$  之间的函数表达式?

**教学分析:** 通过实际问题情境, 引导学生回顾函数的定义, 建立函数模型, 让学生体会函数是刻画现实世界变化规律的重要模型, 发展符号意识; 根据具体题目, 引导学生回顾正比例函数、一次函数的定义以及表达式特征。为此设计如下练习:

练习 1: 若函数  $y = 3x + m$  为正比例函数, 求  $m$  的值。

练习 2: 若函数  $y = (m - 2)x + m^2 - 4$  为正比例函数, 求  $m$  的值。

练习 3: 若函数  $y = (m - 2)x^{(m-1)} + 3$  为一次函数, 求  $m$  的值。

**教学分析:** 三个练习的设置, 应用变式教学的思想, 在题目的难度上由易到难, 在思维的层次上由浅到深, 学生在解决具体问题的过程中自然会注意到一次函数定义和表达式中的系数的关系, 完善了学生正比例函数和一次函数定义的概念系。

第二, 从形出发, 回顾性质

问题 2(1)画出练习 3 中的一次函数图象。

(2)观察(1)中的函数图象, 你能得到哪些结论?

**预设:** 1:  $y$  随  $x$  的增大而减小。

2: 一次函数  $y = -2x + 3$  的图象经过一、二、四象限。

3: 一次函数  $y = -2x + 3$  与  $y$  轴的交点为  $(0, 3)$ , 与  $x$  轴的交点为  $(\frac{3}{2}, 0)$ 。

4: 一次函数  $y = -2x + 3$  与坐标轴围成的三角形面积为  $\frac{9}{4}$ 。

5: 将一次函数的图象向下平移 3 个单位可以得到  $y = -2x$  的图象, 向左平移 2 个单位可以得到  $y = -2x$

-1 的图象。

6: 当  $x > \frac{3}{2}$  时,  $y > 0$ ; 当  $x < \frac{3}{2}$  时,  $y < 0$ 。

追问: ①这些结论如何得到呢?

②若  $A(x_1, y_1)$  和  $B(x_2, y_2)$  都在  $y = -2x + 3$  的图象上, 若  $x_1 < x_2$ , 则  $y_1$  和  $y_2$  的大小关系为?

③当  $-4 < x < 3$  时, 求  $y$  的取值范围。

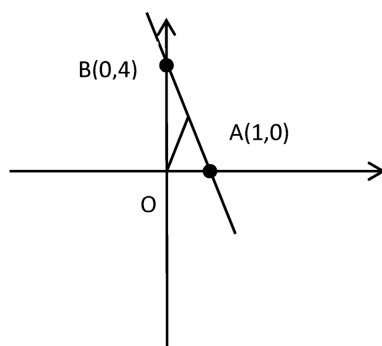
**教学分析:** 问题 2 的第 1 问让学生复习回顾利用函数的解析式画一次函数图象的步骤, 把函数解析式和图象结合起来, 做到“眼中有式, 心中有图”, 实现数和形的结合和自由转换。第 2 问在第 1 问的基础上让学生结合图象, 回顾一次函数的图象与性质, 掌握一次函数与几何图形的面积, 理解函数与方程、不等式之间的联系, 做到“以形示数”, 完善了学生的 CPFS 结构, 问题 2(2)设置了开放性问题, 让不同层次的学生都能参与到课堂教学中, 从而自主建构知识, 达到让不同层次的学生得到不同的发展的目的。

环节 3: 问题解决。

例 2 如图, 已知一次函数  $y = kx + b$  的图象过点  $A(1, 0)$ ,  $B(0, 4)$ 。

(1) 求一次函数的解析式。

(2) 若点  $C$  是线段  $AB$  上的一点, 设点  $C$  的横坐标为  $a$ ,  $\triangle AOC$  的面积为  $S$ , 求  $S$  关于  $a$  的函数解析式, 并求  $a$  的取值范围。



**教学分析:** 第(1)问考查了利用待定系数法求函数解析式, 第(2)问主要考查点的坐标, 函数的解析式, 已知点的坐标求三角形的面积, 自变量的取值范围等。在完善学生的知识结构的基础上, 也关注学生解题方法的结构化, 总结归纳出几种常用的解题方法, 并将解题方法纳入知识结构图中, 形成解题方法结构图, 优化学生的解题思路。学生在夯实双基的同时, 也积累了数学活动经验, 数学核心素养也随之提升。

变式 1: 若点  $C$  是直线  $AB$  上的一点, 设点  $C$  的横坐标为  $a$ ,  $\triangle AOC$  的面积为  $S$ , 求  $S$  关于  $a$  的函数解析式。

变式 2: 若点  $C$  是直线  $AB$  上的一点, 直线  $OC$  把  $\triangle AOB$  分成面积比为 1:3, 求直线  $OC$  的解析式。

变式 3: 若点  $C$  是线段  $AB$  上一点, 点  $M$  在  $x$  轴上。

(1) 若  $\triangle AOC$  的面积为 2, 要使  $BM + MC$  的值最小, 求点  $M$  的坐标。

(2) 过点  $C$  作  $CD \perp x$  轴于点  $D$ , 作  $CE \perp y$  轴于点  $E$ , 连接  $DE$ , 求  $DE$  的最小值。

变式 4: 在坐标轴上是否存在一点  $P$ , 使得  $\triangle ABP$  为等腰三角形。

**教学分析:** 变式 1 将例题中的“线段  $AB$ ”改为“直线  $AB$ ”, 引导学生进行分类讨论, 理解如何用点的坐标表示线段长。变式 2 已知三角形的面积关系, 求函数的解析式, 本质上是根据三角形的面积求



得线段长，再将线段长转化为相应的点的坐标，最后求函数解析式。变式 3 中的(1)综合考察了一次函数内容和几何问题中“将军饮马”模型，学生要先做出点的位置，然后再利用一次函数的知识求得点 M 的坐标。第(2)问题中没有相应的图形，需要学生自己先根据题意手绘草图，再结合几何图形的性质，得出结论，变式 3 将一次函数和几何图形的性质有机结合，将几何图形的性质转化为代数关系，让学生再次体会数形结合的思想。变式 4 将特殊三角形的存在性问题与一次函数结合，教师引导学生总结归纳出求特殊三角性存在性问题的方法：交轨法。

例题和 4 个变式，综合考察一次函数和几何问题中的重要知识点，引导学生寻找知识内部的逻辑，整合和重构知识，引导学生体会一次函数的知识框架覆盖了代数、几何多个知识点，完善学生的 CPFS 结构，知识点之间形成一个有机的整体。在解决问题的过程中，引导学生灵活应用图象，将图像与函数问题巧妙地结合起来，熟练地进行形和数之间的转换，同时利用分类讨论、方程、函数等思想方法综合地分析问题、思考问题、解决问题，帮助学生生活学活用建立的知识结构，使得全章的知识脉络更加清晰，思想方法更加明了。

## 5. 教学思考

单元教学设计可以将零散的知识系统化。CPFS 结构是一种数学认知结构，在章末复习课中，基于单元教学设计，帮助学生建立完善的 CPFS 结构，带领学生从知识整体的框架去理解体会，明辨概念与概念之间，命题与命题之间的关系，建立清晰的知识结构网络图，可以使学生减负，同时也比学习零散的知识更有效果。为了在章末复习课中更好地进行 CPFS 结构单元教学，发展学生的结构化思维，提升学生的数学素养，提出以下几点思考：

### 5.1. 明晰教学主线，形成数学认知结构

喻平教授提出的 CPFS 结构单元教学设计中的第一步就是提出一个概念或命题，因此，明晰单元教学主线是形成 CPFS 结构的前提。一次函数的学习路径为：通过生活中的实际问题，抽象出函数的概念，再从生活情境中抽象出两类特殊的函数：正比例函数和一次函数，然后利用一次函数的图像研究性质，最后就是利用一次函数研究数学问题和生活中的问题。本文围绕该学习路径精心设计题组，在三个教学环节中融入几个重要的知识点，进行变式教学，或者继续探究原来的问题上“生长”出的新问题。问题设置的难度上由易到难，思维的层次上由浅到深，层层递进，把零散的知识点和典型例题串联成一条完整有序的主线。学生在探究问题的过程中，掌握了结构化的知识，理解了结构化的解题方法，体会了结构化的数学思想，完善了数学认知结构，由知识到方法再到数学思想，层层深入，引导学生体会知识、方法、经验、思想之间的关系，培养思维品质，发展数学核心素养。

### 5.2. 精心设计题组，引发深入思考

喻平教授提出，个体的 CPFS 结构是数学关键能力生长的沃土，要不断施肥以保证沃土的优良性，在单元主题教学中，以问题解决作为主线，具有施肥的功能和作用。因此，在章末复习课中，教师要精心设计问题，让学生在问题解决的过程中保证 CPFS 结构的优良性。首先，题目的选择要与形成的 CPFS 结构相关，要紧紧地围绕某一概念或命题进行设计；其次，可以一题多变，进行变式教学，变式教学可以实现知识迁移，思维的拓展，引导学生分清易错的知识点，让学生的思维变得更灵活。学生要在头脑中构建某一概念的概念系或某一命题的命题系，通过变式教学，可以使学生在学习数学原理和知识的过程中从多角度出发，构建新旧知识的网络结构。在变式教学过程中，改变题目的条件或结论，或者增加条件，问题的难度逐渐增大，体现知识与知识之间的联系和区别，引发学生更深入的思考和探索。设计的变式教学的题目时，不能随意地选几个问题，再将这几个问题组合在一起，要根据教学主线，针对性

地选择和设计题目，要有效衔接相关的知识点，厘清题组中知识和方法的本质属性，梳理各题之间的相互关系，理解题目中的“变”与“不变”，思考如何以“不变”应“万变”。

### 5.3. 巧用思维导图，提高学习效率

章末复习课的首要任务就是让学生捋清本章的知识结构图，理解知识产生、发展的脉络路径以及其中蕴含的数学思想方法，让学生对本章的知识有一个全面的认识和理解。使用思维导图的形式，串联零散的数学知识，形成知识网络图，达到优化学生 CPFS 结构的目的。采用图表的方式展示本章的知识结构，比较直观明了，形象简洁地展示了知识之间的联系，采用图表的方式呈现知识结构，可以帮助学生更快地理解与记忆，适当地减轻学生的学习负担，提高学习效率。

### 参考文献

- [1] 马云鹏. 基于结构化主题的单元整体教学——以小学数学学科为例[J]. 教育研究, 2023, 44(2): 68-78.
- [2] 吕世虎, 杨婷, 吴振英. 数学单元教学设计的内涵、特征以及基本操作步骤[J]. 当代教育与文化, 2016, 8(4): 41-46.
- [3] 章飞, 顾继玲. 单元教学的核心思想与基本路径[J]. 数学通报, 2019, 58(10): 23-28.
- [4] 邵朝友, 崔允灏. 指向核心素养的教学方案设计: 大观念的视角[J]. 全球教育展望, 2017, 46(6): 11-19.
- [5] 李润洲. 指向学科核心素养的教学设计[J]. 课程·教材·教法, 2018, 38(7): 35-40.
- [6] 刘权华. 高中数学单元教学设计存在的问题及对策[J]. 教学与管理, 2019(2): 55-57.
- [7] 孙军波. 核心素养观下的主题单元起始课教学实践——以复数单元起始课为例[J]. 数学通报, 2019, 58(12): 31-34.
- [8] 顾继玲, 章飞. 初中数学单元复习课教学设计的特征分析[J]. 数学通报, 2021, 60(7): 31-36+41.
- [9] 谭远泊, 黄翔. 大单元教学视域下中学数学复习课教学研究[J]. 教学与管理, 2023(6): 87-90.
- [10] 浦丽俐. 大单元教学观下的章末复习课教学思考——以“直线与方程”为例[J]. 数学通报, 2022, 61(2): 22-27.
- [11] 喻平. 数学单元结构教学的四种模式[J]. 数学通报, 2020, 59(5): 1-8+15.