Creative Education Studies 创新教育研究, 2023, 11(11), 3608-3614
Published Online November 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2023.1111528

Hans汉斯

案例教学法在概率论与数理统计中的应用与实践

沈　鹏，温立书

沈阳航空航天大学理学院，辽宁 沈阳

收稿日期：2023年9月28日；录用日期：2023年11月21日；发布日期：2023年11月30日

摘　要

在概率论与数理统计中，探讨案例的选取原则，分析其设计方法和诸多限制条件和影响因素。结合课堂教学实践，设计剖析具体案例，分析其优点和适应性。通过案例教学法激发学生学习兴趣，培养学生综合应用数学理论知识解决客观实际问题的能力，取得良好教学效果。

关键词

概率论与数理统计，案例教学法，案例

Application and Practice of Case Teaching Method in Probability Theory and Mathematical Statistics

Peng Shen, Lishu Wen

College of Science, Shenyang Aerospace University, Shenyang Liaoning

Received: Sep. 28th, 2023; accepted: Nov. 21st, 2023; published: Nov. 30th, 2023

Abstract

In probability theory and mathematical statistics, this paper discusses the selecting principle of case, analyzes its design methods and many constraints and influence factors. It analyzes the advantages and adaptability of some specific cases through practical teaching. Case teaching method can stimulate students' interest in learning, cultivate students' ability to comprehensively apply mathematical theory knowledge to solve objective practical problems, and achieve good teaching effects.

文章引用：沈鹏，温立书．案例教学法在概率论与数理统计中的应用与实践[J]．创新教育研究，2023，11(11): 3608-3614. DOI: 10.12677/ces.2023.1111528

Keywords

Probability Theory and Mathematical Statistics, Case Teaching Method, Case

1. 引言

案例教学法是哈佛大学在二十世纪二十年代提出的一种以案例为基础师生广泛的参与研究和讨论的教学方法。它不仅可以用来传授信息、概念、方法和理论外，也可以培养学生的分析推理问题和解决问题的能力，同时也提高学生课堂的参与度和活跃度，也是课程数字化和培养新工科创新型人才必不可少的教学方法。

概率论与数理统计是高等教育里一门重要基础必修课，它主要研究随机现象中所具有的统计规律性，在经济、社会、金融、管理、医学等多方面有所应用，它理论性强，应用面广[1] [2]。采用传统讲授法，通过讲述定义、推导性质、证明定理，介绍计算公式，讲解例题，虽然可以顺利的完成教学任务，抽象冗长的概念，晦涩难懂的证明，脱离实际的例题，很容易使学生倦怠，不能主动思考、积极参与，我们可以选取紧贴生活实际，典型而又有趣味的案例，来吸引学生注意力，提高学生参与度，引导学生分析问题、学习知识、解决问题、培养能力。我们采用讲授法和案例教学法相结合，以实际案例引导学生从实际问题探究入手，学习相关理论知识，分析解决具体的实际问题，培养学生系统应用数学相关理论知识和具体方法解决客观实际问题的能力[3] [4] [5] [6]。

2. 案例的选取与设计

案例教学法通过引入经典和贴合生活实际的案例进行课堂教学，为达到教学目的，取得良好教学效果，需要我们认真甄选和设计相关案例。

以经典问题和结论作为案例来源。概率论与数理统计里面有很多经典的问题和结论，例如生日问题，赌资分配问题，抽签与先后次序无关，不要参与赌博活动等，其中赌资分配问题是法国数学家帕斯卡和费马在一系列通信中讨论的问题，并奠定了概率论里数学期望这一基本概念。这些经典问题和结论包含着对基本概念的深入理解，具体知识点的应用和广泛的生活场景，通过实际的案例引导学生深入探索和广泛学习解决实际问题所需要的理论知识和数学方法，结合经典的问题，培养学生自主探索学习，分析研读相关资料和解决实际问题的能力。

以生活中的实际问题或应用场景编制案例。概率论与数理统计是把严格的理论知识和实际应用联系比较紧密的学科，尤其在现实生活中，我们会遇到各式各样的随机现象和统计数据，需要我们根据相关的知识点解释研究随机现象，从统计数据挖掘出固有的规律，在这个过程中选取设计贴近学生的生活的案例，从具体的实际问题入手，暂时避开了抽象晦涩的概念，用数学方法解决问题，总结规律，也充分的体现出数学这门工具学科的魅力。同时吸引学生的注意力，增强积极性，广泛参与到问题的讨论和对知识点的主动学习与探究中。

此外，案例的选取和设计还受到其它诸多因素的限制。如学生基础知识牢靠程度，认知水平，接受能力，教学目的，课堂时间，教学手段，课堂教学效果反馈等多方面因素的限制。例如，介绍数学期望，

这里有很多案例，可以提供选择，比如平均分、赔率的制定，这些案例内容简单贴近生活容易理解，课堂时间占用较少，学生积极性高，课堂教学效果较好，一般首选。例如赌资分配问题，问题比较经典，能从较深层次理解和掌握数学期望的概念及其应用，但问题难度中等，讲解需要的时间较长，受到学生认识水平和理解能力的限制，课堂教学效果需根据学生的基础水平不同略有变化。此外，我们还有分组检验的问题，例如全民新冠筛查中，方案 1：一人检验一次。方案 2：十个人一组检验一次。如果某组实验结果呈阳性，十个人中每人再查一次，问方案 2 是否可以有效的降低检验次数？这是一个来自现实生活中的案例，学生们的代入感强，激励引导学生从实际问题入手，在分析问题解决问题中掌握数学期望的概念及其应用。此案例还可以和其它章节的知识点结合，也可以进一步拓展案例的假设条件，形成更为复杂的数学模型，鼓励引导学生综合应用本学科的知识和方法解决具体生活中问题，但此案例问题难度大，讲解时间需要的长，需要学生的基础水平高，所以教学案例的选取和设计应考虑到多方面的实际情况。

最后，我们在案例的设计上具有拓展性。案例大多数都是来自于现实生活中，经过抽象和条件化了的实际问题或数学模型，以方便我们讲解知识点和应用具体数学工具，已达到良好的教学效果。这时案例并不能完全反映现实生活中的问题，然而现实生活中的问题，比案例要复杂的多，往往应用的不仅是某一节的知识点，可能需要来自于多个章节的知识点和数学工具对实际问题进行处理，我们设计案例时保持案例的拓展性，可以使学生应用多个章节的知识点研究问题，也可以使学生对待实际问题有多层次，多角度，更加深入的理解，对多章的知识点和方法进行综合应用，并且还可以进一步鼓励学生建立更符合实际问题的数学模型，引导广大学生进一步深入的学习和探索。

3. 具体案例应用分析

基于案例设计的原则和客观条件限制，结合教学实践，分享设计剖析以下教学案例。

在现实生活中我们经常遇到，一些问题需要计算概率，需要验证我们的计算结果或者发现的统计规律是否符合实际，还会遇到一些具体的数学模型的应用，比如博彩问题赔率制定，保险问题赔率制定，风险对赌协议制定。我们把这些问题和各章知识点相结合，设计出如下应用案例。

案例一：赌局

在一次聚会上，一共出席 64 人，其中小王根据出席的人数打个赌，假设一共出席 64 人，如果在场每个人生日各不相同小王赔给你 10 元钱，如果有两人(含两人以上)生日相同你输掉 1 元钱，你是否愿意参加这个赌局呢？

问题拆解：1) 经典的生日问题；2) 统计验证；3) 赔率制定。

1) 经典的生日问题：

一年有 365 天(闰年除外)，假定个人在任何一天出生是等可能的，即都等于 1/365，那么随机选 n 取个人($n \le 365$)，试求他们中有两人或两人以上的生日相同的概率，并分别具体地计算出 $n = 20$、23、30、40、50、64、100 时相应事件的概率值。

解：设 A 表示{至少有两人的生日相同}，则 $\bar{A}$ 表示{这 n 个人的生日各不相同}，事件 $\bar{A}$ 等同于事件“将 n 个球随机地放入 365 个盒子中，每个盒子至多有一个球”，该概率等于 $P(\bar{A}) = \frac{365!}{365^n(365-n)!}$。

进一步，n 个人中至少有两个人生日相同的概率 $P(A) = 1 - \frac{365!}{365^n(365-n)!}$。对于具体的 n = 20、23、30、40、50、64、100 时，$1 - \frac{365!}{365^n(365-n)!}$ 在没有好的计算工具情况下，这个结果并不容易计算，人们

DOI: 10.12677/ces.2023.1111528

根据类比分析一年有 365 天，至少要 366 人才能保证至少有两人生日在同一天这个事件必然发生。现在只有 64 人，差太多了，人们一般很容易认为有大概率能赢小王。但是经计算可得下面结果：

N	20	23	30	40	50	64	100
P	0.41	0.51	0.71	0.89	0.97	0.997	0.9999997

上表的结果可能出乎多数人的预料，然而运用第一章等可能概型公式计算出的正确结论。当 $n = 23$ 有两人或两人以上的生日相同的可能性就能超过 0.5，当 $n = 64$ 概率能达到 0.997，根据实际推断原理在一次实验中几乎必然发生，即小王几乎必赢！

此案例问题 1)经典，贴合实际生活，难度简单，课堂用时较少，提高学习趣味，学生反馈良好，同时案例还有很强的拓展性，结果也引人深思，会给同学以深刻的启示：首先，遇到问题我们要经过科学合理的分析和计算，不能简单类比或者化简问题。其次，不要参加任何赌博活动。

2) 统计验证：

看到以上的结果很多人会有疑问。多数人不愿相信或接受这个结果。我们引导学生进一步用统计的方法验证结果。通过课堂热烈讨论，充分调动学生的学习积极性，归纳总结主要介绍以下三种作法：

方法 1：随机选中两个班的学生大约 60 多人进行验证。

方法 2：计算机软件模拟。

方法 3：每天观察手机 QQ (或者有类似软件)，看是否有两个或两个以上好友生日在同一天(一般软件内好友超过 60 人)。

三种方法的优缺点总结如下表 1：

Table 1. Advantages and disadvantages of three methods
表 1. 三种方法的优缺点

优缺点	方法 1	方法 2	方法 3
优点	随机抽样	伪随机，省时、省力	随机抽样，成本低、门槛低
缺点	费时、费力、成本高	门槛高(需要软件和一定编程能力)	每日观察，用相关的软件和设备

此问题源于日常生活，答案形式多样，通过热烈的讨论，能引导同学们主动分析和探索相关统计验证方法，并且课堂气氛活跃，通过老师的归纳总结，比较每一种方法优缺点，使得学生对相关理论知识和具体实践方法有全面的了解。如随机和伪随机，并且可以启发学生们对随机模拟中真随机数的思考与探索，同时也加强同学分析解决问题的能力，在解决实际问题中，除了考虑相关的理论知识和方法，我们也要考虑到如成本，技术门槛，设备条件等多方面的限制因素。

3) 赔率确定：

一赔十的赔率对小王有利吗？引导学生具体分析一下，应用第四章随机变量的数字特征期望的知识点解决此问题。

解：设离散型随机变量 X 表示小王的收益，经过计算随机变量 X 服从分布律为：

X	−10	1
P	0.003	0.997

经计算平均收益为 $E(X) = 1\times 0.997 + (-10)\times 0.003 = 0.967$，即小王打赌平均每人次能获得 0.967 元的收入，即小王不付出任何成本，平均每人次就可获得 0.967 元，对小王十分有利。同理从参与者的角度

来看，平均每次的收益只有 0.03 元，即投资 1 元，平均得到 0.03 元的回报。回报率只有 3%，如果参与者有 M 元现金，每次全资参与回报率 $x<1$ 的赌博活动，那么不管他有多少钱，不论他赢过多少局，只要他一直不断的赌下去，参与次数 $n\to+\infty$，所有的钱都会输光。即 $Mx^n\to 0$，这也是问题 1)得到的启示，不要参与赌博活动！

此案例问题 3)简单容易计算，占用课堂时间少，教学效果好，同时和问题 1)，2)结合，可以将诸多的章节的知识点融入一个案例中，既可以考察和培养学生综合应用知识解决问题的能力，也可以拆解单独应用到某一节讲授相关知识点，问题 3)典型易于推广，诸如彩票的赔率制定，保险赔率制定等有相同的模型，可以引导学生对相关的实际问题深入的探讨和研究。

概率论与数理统计在日常管理应用很多，如比赛赛制的制定等。这里设计一个简单管理问题，综合应用概率模型和统计方法解决现实生活中的问题。

案例二：管理技巧

48 学时概率论与数理统计课上共三次点名，某学生三次点名未到，按规定取消平时成绩或考试资格。期末一名学生找老师求情说：“这学期我运气特别不好，就三次逃课，结果都被你点名发现了，给我平时成绩或让我参加考试吧！”老师会采信学生的说法吗？

问题拆解：

问题 1：用古典概型计算学生就三次逃课，结果都被教师点名发现了的概率？

问题 2：应用实际推断原理判断老师会不会相信他说的话？

问题 3：用最大似然法估计一下他上课出席的概率？

对于问题 1：用古典概型计算学生就三次逃课，结果都被教师点名发现了的概率？

模型假设：

假设老师在 24 次课堂教学上随机点名(每次课两学时)。

假设学生有且仅有三次未出席。

解：设事件 $A=\{三次点名三次未到\}$

$$P(A)=\frac{3\times 2\times 1}{24\times 23\times 22}\approx 0.000494$$

概率值常小。

问题 2：应用实际推断原理判断老师会不会相信学生说的话？

根据实际推断原理(小概率事件在一次实验几乎不可能发生)，所以老师不会相信学生说法。

问题 3：用最大似然法估计一下学生上课出席的概率？

然后我们根据样本估计一下学生出席的概率，随机变量 X 取 0 表示未出席，则随机变量 X 的分布律为：

X	0	1
P	$1-\theta$	θ

似然函数 $L(\theta)=(1-\theta)^3$ 当 $\theta=0$ 时有最大值，θ 最大似然估计值为 0，即学生这一学期最有可能一次都没来。

此案例来源于我校的教学管理实践，每一问题都比较简单，综合在一起，却能阐释科学管理的依据，综合应用多章节相关的知识点解决了此实际问题，能使学生信服同时也能改变学生的认知水平，课堂上所学的知识都有用，关键看你如何灵活应用。

在现实生活中，我们应用一些理论分析，总会貌似出现一些“悖论”，主动设计一些“悖论”的案

例，使学生在研讨中全面的掌握相关理论知识，提升知识应用水平和解决实际问题的能力。

案例三：设计“悖论”

例：某群羊身高服从正态分布，随机抽取 36 只羊，平均身高 68.5 cm，在以下三种情况下做假设检验，取显著性水平 $\alpha = 0.05$ 。

1) $H_0: \mu = \mu_0 = 70 \quad H_1: \mu \neq \mu_0$ 即可否认为这群羊平均身高为 70 cm？2) $H_0: \mu \geq \mu_0 = 70 \quad H_1: \mu < \mu_0$，即可否认为这群羊平均身高大于 70 cm？3) $H_0: \mu \leq \mu_0 = 70 \quad H_1: \mu > \mu_0$。即可否认为这群羊平均身高小于 70 cm？

解：1) $H_0: \mu = \mu_0 = 70 \quad H_1: \mu \neq \mu_0$ 这是双边假设检验，其拒绝域 $|z| = \dfrac{|\overline{x} - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_{\alpha/2}$，经计算 $|z| = \dfrac{|70 - 68.5|}{\sqrt{36}/6} = 1.5 < z_{\alpha/2} = 1.96$，$z$ 没落在拒绝域中，在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 条件下接受 H_0，即可否认为这群羊平均身高为 70 cm。

2) $H_0: \mu \geq \mu_0 = 70 \quad H_1: \mu < \mu_0$ 这是左边假设检验，其拒绝域 $z = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_\alpha$，经计算 $z = \dfrac{68.5 - 70}{\sqrt{36}/6} = -1.5 > -z_\alpha = -1.645$，$z$ 没落在拒绝域中，在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 条件下接受 H_0，即可否认为这群羊平均身高大于 70 cm。

3) $H_0: \mu \leq \mu_0 = 70 \quad H_1: \mu > \mu_0$。这是右边假设检验其拒绝域 $z = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha$，经计算 $z = \dfrac{68.5 - 70}{\sqrt{36}/6} = -1.5 < z_\alpha = 1.645$，$z$ 没落在拒绝域中，在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 条件下接受 H_0，即可否认为这群羊平均身高小于 70 cm。

综上所诉，在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 条件下都接受，即可以认为这群羊平均身高为 70 cm 或高于 70 cm 或低于 70 cm。哪里有问题？这里我们通过具体的实际应用的“悖论”案例，引导学生全面掌握假设检验的基本思想、一般步骤和实际应用。假设检验里原假设 H_0 与备择假设 H_1 的地位是不同的，原假设 H_0 是受保护的，没有充分的证据，我们不能拒绝原假设 H_0，从某种意义上来说也就接受原假设 H_0，应该注意严格意义上来说，不能拒绝原假设 H_0 不等于接受原假设 H_0，只是通常我们认为是一样的。在一些实际问题中原假设的选取是有一定原则的，例如：新药有没有效，新工艺对生产效率有没有改进。我们的原假设都是新药没有疗效，生产效率没有改进。除非有充分的证据证明其有效或有改进，我们才能拒绝原假设，进而接受备择假设。在实际问题中不可以为了得到想要的结论，去特意的选择原假设。即使我们基于样本做出推断，接受原假设，在样本容量 n 扩大时我们又未必得到同样的结论，因为基于样本对总体下结论，即总体的一部分来判断全体，就避免不了会犯两类错误，在实际应用假设检验时要根据具体的问题确定显著性水平 α 和样本容量 n，尽量减少犯错误的可能。通过设计“悖论”的案例不仅可以使学生印象深刻，牢固掌握相关知识点，也为解决实际问题提供是良好的范例。

通过以上案例的设计分析和实践应用，提升学生学习兴趣，提高学生课堂的参与度和活跃度。通过电子问卷和学生访谈，发现学生喜欢并适应这种案例教学方式，并反馈给我们一些好的改进意见。通过平时测试和期末测试成绩发现学生知识点掌握的比较好。通过数学建模比赛培训和比赛结果发现学生们分析问题和解决问题的能力得到提高。

4. 结束

教学案例的设计要和讲授的理论和具体的生活实践相结合，各章知识点能前后关联，还得适合课堂

教学的限制。在本门课程的教学中融入具体生动的教学案例，可以充实课堂教学内容、活跃课堂气氛、激增加学习兴趣、完善教学效果，而且对培养学生系统应用数学相关理论知识和具体方法解决客观实际问题的能力都有着重要的意义。

基金项目

辽宁省教育厅优质教育资源共享项目(2022030)；沈阳航空航天大学教改项目(JG2015056)。

参考文献

[1] 盛骤, 谢式千, 潘承毅. 概率论与数理统计[M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2008: 1.

[2] 朱丽梅, 姜永, 黄雪, 沈鹏, 闻良辰. 概率论与数理统计[M]. 北京: 国防工业出版社, 2014: 1.

[3] 林娟, 庄金洪. 案例教学与翻转课堂耦合式教学的探索与实践[J]. 福建教育学院学报, 2021, 22(4): 88-90.

[4] 曹建美，王凤翔. 概率论与数理统计课程教学中融入数学建模思想的策略[J]. 西部素质教育，2020，6(12): 166-167.

[5] 沈新娣，侯丽英. 医学类专业概率论与数理统计教学实践: R 软件与案例结合教学[J]. 教育教学论坛，2020(22): 284-285.

[6] 黄雪. 慕课背景下的高校教学模式: 对 SPOC 的探索[J]. 黑龙江教育(高教研究与评估), 2020(4): 8-9.