

# Topological Phase Transition Driven by Spin-Orbit Coupling in HgMnTe Quantum Wells

Rui Chen, Bin Zhou\*

Faculty of Physics and Electronic Science, Hubei University, Wuhan Hubei  
Email: \*binzhou@hubu.edu.cn

Received: Jan. 31<sup>st</sup>, 2016; accepted: Feb. 18<sup>th</sup>, 2016; published: Feb. 23<sup>rd</sup>, 2016

Copyright © 2016 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## Abstract

In the inverted band HgTe quantum wells (QWs), there are quantum spin Hall effects characterized by topological protected gapless helical edge states within the bulk energy gap. By doping magnetic atoms (such as Mn) in HgTe layer, quantum anomalous Hall effects (QAH) may occur in magnetic HgMnTe QWs. In this paper, we investigate the effect of spin-orbit coupling induced by bulk inversion asymmetry on HgMnTe QWs with respect to topological phase transition. Firstly, by the method of analytic calculation of spin Chern number in HgTe QWs, a topological phase transition from topological insulators (TI) to normal insulators (NI) is presented in HgTe QWs when the strength of spin-orbit coupling exceeds a critical value. On the combined effect of spin-orbit coupling and exchange field, by numerical calculating spin Chern number, we plot the topological phase diagram with various parameters. When the coefficients  $G_E$  and  $G_H$  depicting the exchange field satisfy  $G_E G_H < 0$ , three regions appear on the phase diagram, *i.e.*, NI, TI and QAH. When  $G_E G_H > 0$ , a new region of gap closing appears and a nonzero spin-orbit coupling will open a gap in this region.

## Keywords

Quantum Spin Hall Effect, Quantum Anomalous Hall Effect, Spin-Orbit Coupling, Topological Phase Transition

## HgMnTe量子阱中自旋轨道耦合诱导的拓扑相变

陈锐, 周斌\*

\*通讯作者。

湖北大学物理与电子科学学院, 湖北 武汉  
Email: \*binzhou@hubu.edu.cn

收稿日期: 2016年1月31日; 录用日期: 2016年2月18日; 发布日期: 2016年2月23日

## 摘 要

在能带反转的HgTe量子阱中, 体态内存在着受拓扑保护的无能隙的螺旋边界态为特征的量子自旋霍尔效应。在HgTe量子阱中掺入磁性原子(例如锰)后, 磁性HgMnTe量子阱将会出现量子反常霍尔效应。本文我们讨论了由体反演不对称产生的自旋轨道耦合作用在HgMnTe量子阱中诱导的拓扑相变。首先, 通过解析计算自旋陈数, 我们发现当自旋轨道耦合强度超过某个临界值的时候, 在HgTe量子阱中, 发生了从拓扑绝缘体到普通绝缘体的拓扑相变。在交换场和自旋轨道耦合的共同作用下, 通过数值计算自旋陈数, 我们画出了在不同参数下的拓扑相图。我们发现, 当锰掺杂引起的交换场系数 $G_E G_H < 0$ 时, 拓扑相图中出现了三个区域: 普通绝缘体, 拓扑绝缘体以及量子反常霍尔效应。当 $G_E G_H > 0$ 时, 出现了新的体态能隙闭合区域。然而随着自旋轨道耦合作用的增加, 将会在该能隙闭合区域重新打开一个能隙。

## 关键词

量子自旋霍尔效应, 量子反常霍尔效应, 自旋轨道耦合, 拓扑相变

## 1. 引言

量子自旋霍尔效应作为一种新发现的量子态, 由于在自旋电子学器件中有着潜在的应用前景, 已引起了人们广泛的关注。量子自旋霍尔效应又被叫作二维拓扑绝缘体(TI)。和普通绝缘体不同, 拓扑绝缘体在体态能隙有着受拓扑保护的无能隙的螺旋边界态, 有着不同自旋方向的电子沿着相反的方向在材料的边界上移动[1] [2]。在2005年, Kane 和 Mele 首次在石墨烯中提出实现量子自旋霍尔效应的理论模型[3] [4]。在这个石墨烯模型中, 本征自旋轨道耦合是实现量子自旋霍尔效应的关键因素。随后, 人们发现在实际材料中石墨烯的自旋轨道耦合强度太弱, 导致量子自旋霍尔效应在石墨烯中难以实际被观测到[5]。在2006年, Bernevig, Hughes 和 Zhang 提出在 HgTe/CdTe 量子阱中可能会存在量子自旋霍尔效应[6]。不久以后, 在实验中观测到了弹道边界输运通道, 证实了在 HgTe 量子阱上确实存在量子自旋霍尔效[7]。到目前为止人们已在 HgTe 量子阱中做了大量的理论和实验工作[8]-[18]。

量子自旋霍尔效应的拓扑性质可以由拓扑数定义。对 HgTe 量子阱而言, 通过计算第一类陈数, 人们发现其拓扑性质是与材料参数有关[12]。当电子自旋不再守恒时, 量子自旋霍尔效应体系的拓扑数可以由  $Z_2$  不变量[3]或者自旋陈数[19]-[21]定义。对于时间反演对称破缺系统,  $Z_2$  不变量则不能被定义, 这时仍可以计算自旋陈数[11]。

对于具有锰掺杂引起的交换场的 HgTe 量子阱而言, 也就是 HgMnTe 量子阱[13]-[16], 通过计算, 人们发现了这种材料可能存在量子反常霍尔效应。与此同时, 有一些小组研究了由体反演不对称和结构反演不对称导致的自旋轨道耦合对于 HgTe 量子阱物理性质的影响, 比如说量子自旋霍尔态中有限尺寸效应[8]-[10]。在本文中, 我们首先讨论了体反演不对称导致的自旋轨道耦合对于 HgTe 量子阱拓扑性质的影响。通过解析计算, 我们发现, 当 HgTe 量子阱处于量子自旋霍尔态时, 在自旋轨道耦合强度大于某个临界值时, HgTe 将会从拓扑绝缘体变为普通绝缘体。其次我们讨论了自旋轨道耦合对于 HgMnTe 量子阱拓扑性质的影响, 通过数值计算自旋陈数, 我们画出了不同参数下的拓扑相图。

## 2. 模型和方法

在 HgMnTe 量子阱中, 考虑体反演不对称引起的自旋轨道耦合效应后系统哈密顿量可写为

$$H = \begin{bmatrix} M - B_+ k^2 + G_E & Ak_- & 0 & -\Delta \\ Ak_+ & -M + B_- k^2 + G_H & \Delta & 0 \\ 0 & \Delta & M - B_+ k^2 - G_E & -Ak_+ \\ -\Delta & 0 & -Ak_- & -M + B_- k^2 - G_H \end{bmatrix}. \quad (1)$$

哈密顿量矩阵的基矢为  $\{|E_1 + \rangle, |H_1 + \rangle, |E_1 - \rangle, |H_1 - \rangle\}$ , 其中  $|E_1 \pm \rangle$  和  $|H_1 \pm \rangle$  分别代表电子和空穴的子能带。其中  $B_{\pm} = B \pm D$ ,  $k_{\pm} = k_x \pm ik_y$ ,  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ 。参数  $A, B, D, M$  由量子阱材料的性质决定。 $G_E (G_H)$  为锰掺杂产生的交换场导致的电子(空穴)能带劈裂的能量[13]。位于矩阵的非对角项  $\Delta$ , 描述由体反演不对称引起的自旋轨道耦合强度。

我们采用的方法是通过解析和数值计算自旋陈数研究拓扑相变。为了计算自旋陈数, 首先我们需要得到两个价带的波函数  $\phi_{\pm}$ 。通过两个价带的波函数以及泡利自旋算符  $\sigma_z$ , 我们可以得到自旋空间哈密顿量

$$H_s = \begin{pmatrix} \langle \phi_+ | \sigma_z | \phi_+ \rangle & \langle \phi_+ | \sigma_z | \phi_- \rangle \\ \langle \phi_- | \sigma_z | \phi_+ \rangle & \langle \phi_- | \sigma_z | \phi_- \rangle \end{pmatrix}. \quad (2)$$

通过矩阵对角化, 我们可以得到自旋空间的哈密顿量的本征矢

$$\chi_{\pm} = \alpha_{\pm} (1, \gamma_{\pm})^T, \quad (3)$$

其中  $\alpha_{\pm}$  为自旋空间波函数的归一化因子。所以我们可以得到价带波函数在自旋空间的投影为

$$\varphi_{\pm} = \beta_{\pm} (\phi_+ + \gamma_{\pm} \phi_-). \quad (4)$$

从投影波函数出发, 贝里曲率的表达式为

$$\Omega_{\pm}(k) = i \left( \left\langle \frac{\partial \phi_{\pm}}{\partial k_x} \middle| \frac{\partial \phi_{\pm}}{\partial k_y} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \phi_{\pm}}{\partial k_y} \middle| \frac{\partial \phi_{\pm}}{\partial k_x} \right\rangle \right), \quad (5)$$

通过贝里曲率在第一布里渊区内的积分, 我们可以得到自旋陈数为

$$C_{\pm} = \iint_{\text{BZ}} d^2k \Omega_{\pm}(k). \quad (6)$$

在本文中, 我们通过调节 HgMnTe 量子阱的材料参数, 解析或者数值计算得到了哈密顿量(1)的自旋陈数。

## 3. 拓扑相变

对于 HgTe 量子阱( $G_E = G_H = 0$ ), 不考虑自旋轨道耦合效应( $\Delta = 0$ )时, 哈密顿量(1)为块对角形式。在该情况下, HgTe 量子阱的拓扑性质由材料参数  $MB$  决定。当  $MB > 0$  时, 系统为受到时间反演不变性保护的拓扑非平庸的量子自旋霍尔态, 即拓扑绝缘体。然而当  $MB < 0$  时, HgTe 量子阱则为普通绝缘体。

然而对于 HgMnTe 量子阱( $G_E, G_H \neq 0$ ), 不考虑自旋轨道耦合效应( $\Delta = 0$ )时, 通过自旋陈数的解析计算, 对应的自旋陈数为

$$C_{\pm} = \pm \left[ \text{sgn}(B) + \text{sgn}(2M \pm (G_E - G_H)) \right]. \quad (7)$$

当  $G_E G_H < 0$  并且  $G_E - G_H = |2M|$  时, HgMnTe 量子阱发生了从量子自旋霍尔效应到量子反常霍尔效

应的拓扑相变[13] [14]。

下面我们将会讨论 HgMnTe 量子阱中自旋轨道耦合诱导的拓扑相变。我们首先讨论  $G_E = G_H = 0$  的情况。通过解析计算, 我们发现随着自旋轨道耦合强度的增加, 能带反转的 HgTe 量子阱中将会发生从拓扑绝缘体到普通绝缘体的拓扑相变。对于  $G_E, G_H \neq 0$ , 我们分别讨论两种情况,  $G_E G_H < 0$  和  $G_E G_H > 0$ , 并且画出对应的拓扑相图。

### 3.1. $G_E = G_H = 0$

我们首先考虑一个比较简单的情况, 在 HgTe 量子阱中( $G_E = G_H = 0$ ), 引入自旋轨道耦合后, 我们可以得到体态的能谱为

$$\begin{aligned} E_{c,\pm} &= -Dk^2 + \sqrt{(M - Bk^2)^2 + (\Delta \pm Ak)^2}, \\ E_{v,\pm} &= -Dk^2 - \sqrt{(M - Bk^2)^2 + (\Delta \pm Ak)^2}, \end{aligned} \quad (8)$$

其中  $E_{c,\pm}$  和  $E_{v,\pm}$  对应的是导带和价带的能谱。接下来我们给出两个价带的波函数, 在这里, 我们采用了极坐标的方式来表达波函数

$$\psi_+ = A_+ \begin{pmatrix} \Delta + Ak \\ -f_+ e^{i\theta} \\ (Ak + \Delta) e^{i\theta} \\ f_+ \end{pmatrix}, \quad \psi_- = A_- \begin{pmatrix} \Delta - Ak \\ f_- e^{i\theta} \\ (Ak - \Delta) e^{i\theta} \\ f_- \end{pmatrix}, \quad (9)$$

其中  $A_{\pm}$  对应的是两个价带的归一化因子以及  $\theta = \tan(k_x/k_y)$ , 并且

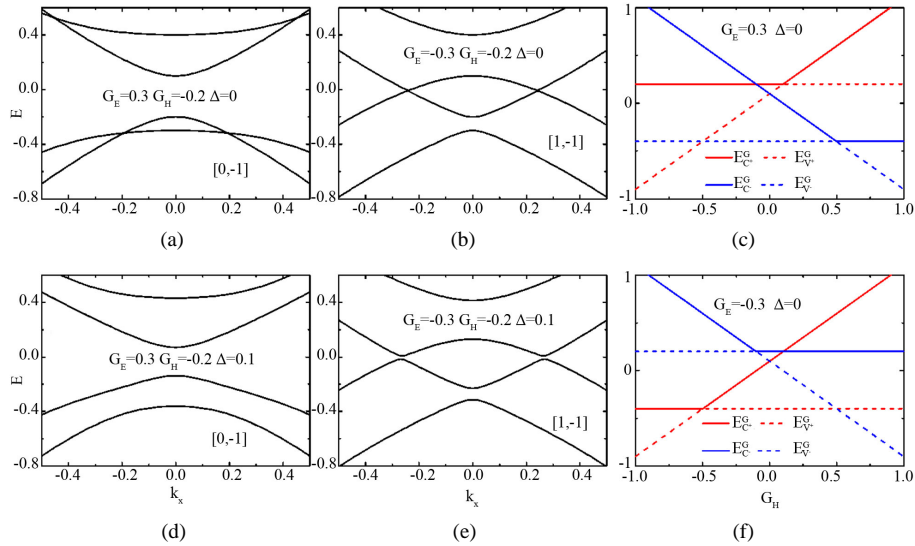
$$\begin{aligned} A_{\pm} &= 1/\sqrt{2(f_{\pm}^2 + (\Delta \pm Ak)^2)}, \\ f_{\pm} &= M - Bk^2 + \sqrt{(M - Bk^2)^2 + (\Delta \pm Ak)^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

我们发现, 在 HgTe 量子阱中考虑到自旋轨道耦合后, 价带的波函数和在三维拓扑绝缘体 Bi<sub>2</sub>Se<sub>3</sub> 薄膜的两个表面施加一个门电压后的哈密顿量的波函数具有类似的形式[21]。所以, 在通过解析地计算自旋陈数后, 我们发现, 对于 HgTe 量子阱处于拓扑绝缘体态 ( $MB > 0$ ) 的时候, 当  $|\Delta| > |A\sqrt{M/B}|$ , 材料由拓扑绝缘体变成了普通绝缘体。然而对于拓扑平庸的 HgTe 量子阱, 自旋轨道耦合强度  $\Delta$  对于材料的拓扑性质没有影响。

### 3.2. $G_E, G_H \neq 0$

对于 HgMnTe 量子阱来说, 我们将通过数值计算的方法讨论自旋轨道耦合对于材料拓扑性质的影响。在下面的数值计算中, 我们选取的参数为  $A = 1, B = -1, D = 0, M = -0.1$ 。

首先我们考虑几种特殊的情况。在图 1(a)和图 1(b)中, 我们画出了 HgMnTe 量子阱在自旋轨道耦合强度  $\Delta = 0$  时的能谱, 通过数值计算得到自旋陈数, 我们发现和解析的结果一致(见公式(7))。在这种情况下, 自旋上和自旋下部分的能谱发生了劈裂, 并且出现了能带的交叉。但是在当  $G_E = 0.3, G_H = -0.2, \Delta = 0$  时(图 1(a)), 这个交叉只发生于自旋上和自旋下部分的导带和导带之间或者价带与价带之间。由于总的陈数不为零, 因此, 在这种情况下, 系统对应于量子反常霍尔效应。当  $G_E = -0.3, G_H = -0.2, \Delta = 0$  时(图 1(b)), 这个交叉却发生于自旋上部分的导带和自旋下部分的价带之间。尽管总的陈数为零, 但是由于能隙闭合, 我们将这种情况称之为能隙闭合区域。



**Figure 1.** (a), (b), (d) and (e) The bulk state energy spectrum at  $k_y = 0$  varies with  $k_x$ . The former (later) number in the brackets means the spin Chern number of the spin up (down) component of the Hamiltonian. (c) and (f) The bulk state energy spectrum at  $k_x = k_y = 0$  varies with  $G_H$ . The solid and dotted lines correspond to the conduction and valence bands, respectively. The red and blue lines correspond to the spectrum of spin up and down part of the Hamiltonian, respectively. The corresponding parameters are given by (a)  $G_E = 0.3$ ,  $G_H = -0.2$ ,  $\Delta = 0$ ; (b)  $G_E = -0.3$ ,  $G_H = -0.2$ ,  $\Delta = 0$ ; (c)  $G_E = 0.3$ ,  $\Delta = 0$ ; (d)  $G_E = 0.3$ ,  $G_H = -0.2$ ,  $\Delta = 0.1$ ; (e)  $G_E = -0.3$ ,  $G_H = -0.2$ ,  $\Delta = 0.1$ ; (f)  $G_E = -0.3$ ,  $\Delta = 0$

**图 1.** (a), (b), (d)和(e)体态能谱在  $k_y = 0$  随着  $k_x$  变化的关系图。在括号里的前一个数和后一个数分别对应于自旋上和自旋下部分的自旋陈数。(c)和(f)体态能谱在  $k_x = k_y = 0$  随着  $G_H$  变化的关系图。实线和虚线分别对应于导带和价带。红线和蓝线分别对应于自旋上部分和自旋下部分。图中的参数分别为(a)  $G_E = 0.3$ ,  $G_H = -0.2$ ,  $\Delta = 0$ ; (b)  $G_E = -0.3$ ,  $G_H = -0.2$ ,  $\Delta = 0$ ; (c)  $G_E = 0.3$ ,  $\Delta = 0$ ; (d)  $G_E = 0.3$ ,  $G_H = -0.2$ ,  $\Delta = 0.1$ ; (e)  $G_E = -0.3$ ,  $G_H = -0.2$ ,  $\Delta = 0.1$ ; (f)  $G_E = -0.3$ ,  $\Delta = 0$

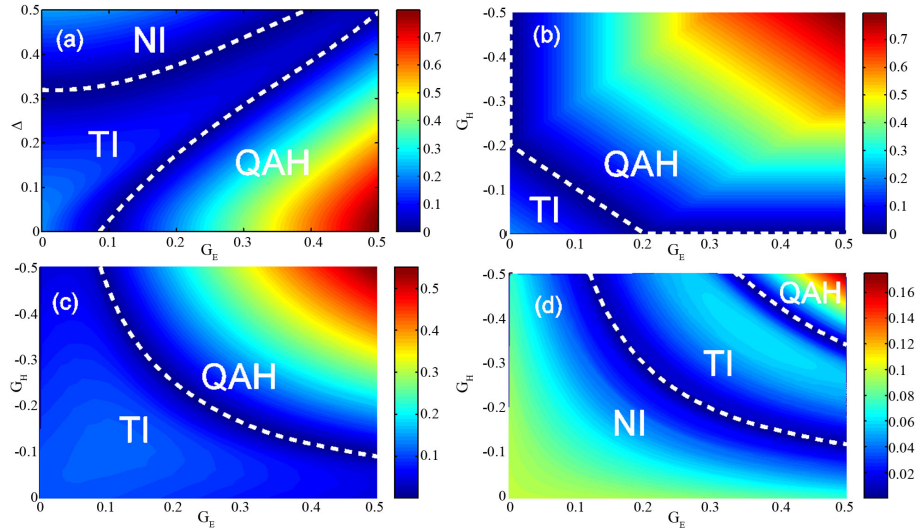
在引入自旋轨道耦合后,我们发现,能带不再交叉(图 1(d)和图 1(e))。通过计算对应的波函数,我们发现自旋上部分的波函数和自旋下部分的波函数发生了耦合。对于图 1(e),我们发现,虽然自旋轨道耦合没有改变系统的自旋陈数,然而能隙闭合的区域却打开了一个能隙,价带由抛物线形变成了马鞍形。

我们画出了体态能谱  $E_{c\pm}^G$  (导带)和  $E_{v\pm}^G$  (价带)在  $k_x = k_y = 0$  随着  $G_H$  变化的图像(图 1(c)和图 1(f)),其中的正负号对应于自旋上和自旋下部分的能谱。我们发现,在  $G_E G_H < 0$  时,导带和价带不会交叉,交叉只会发生在导带和价带之间。然而在  $G_E G_H > 0$  时,交叉则会发生在导带和价带之间。在随后的部分中,我们将分别考虑两种情况,即  $G_E G_H < 0$  和  $G_E G_H > 0$ 。

### 3.2.1. $G_E G_H < 0$

在这一小节中,我们将讨论  $G_E G_H < 0$  的情况。由于拓扑相变总是伴随着能隙的打开或者闭合。由前面的分析我们知道,当  $G_E G_H < 0$  时,能隙的打开或者闭合只可能发生于具有较小能量值的导带和较大能量值的价带之间。所以,我们画出了这个能隙值的相图(图 2)。并且通过自旋陈数的数值计算,我们发现,在随着能隙的打开或者闭合,系统发生了拓扑相变。

我们首先考虑一个比较简单的情況(图 2(a)),令  $G_H = -G_E$ 。其中的白线对应为拓扑相变点或者能隙闭合点。我们发现,在这种情况下,出现了三个具有不同拓扑相的区域。当自旋轨道耦合强度和交换场强度较弱时,系统保持拓扑绝缘体态。在自旋轨道耦合较弱时,随着交换场强度的增大,系统发生了拓扑相变,从拓扑绝缘体到量子反常霍尔态。然而在交换场较弱时,随着自旋轨道耦合强度的增大,系统



**Figure 2.** The phase diagram for the value of the energy gap as a function of  $G_E$ ,  $G_H$  and  $\Delta$ . The white lines correspond to energy gap closing. The parameters are given by (a)  $G_H = -G_E$ ; (b)  $\Delta = 0$ ; (c)  $\Delta = 0.2$ ; (d)  $\Delta = 0.4$

**图 2.** 能隙值随着  $G_E$ ,  $G_H$  和  $\Delta$  变化的相图。白色虚线对应于能隙闭合。图中的参数分别为 (a)  $G_H = -G_E$ ; (b)  $\Delta = 0$ ; (c)  $\Delta = 0.2$ ; (d)  $\Delta = 0.4$

从拓扑绝缘体相变至普通绝缘体。根据解析的计算, 自旋轨道耦合强度  $\Delta = 0$  时, 从拓扑绝缘体到量子反常霍尔效应的拓扑相变发生在  $G_E = 0.1$ 。在  $G_E = 0$  时, 从拓扑绝缘体到普通绝缘体的拓扑相变发生在  $\Delta = 0.316$ 。我们发现, 数值得到的结果和解析的结果保持一致。

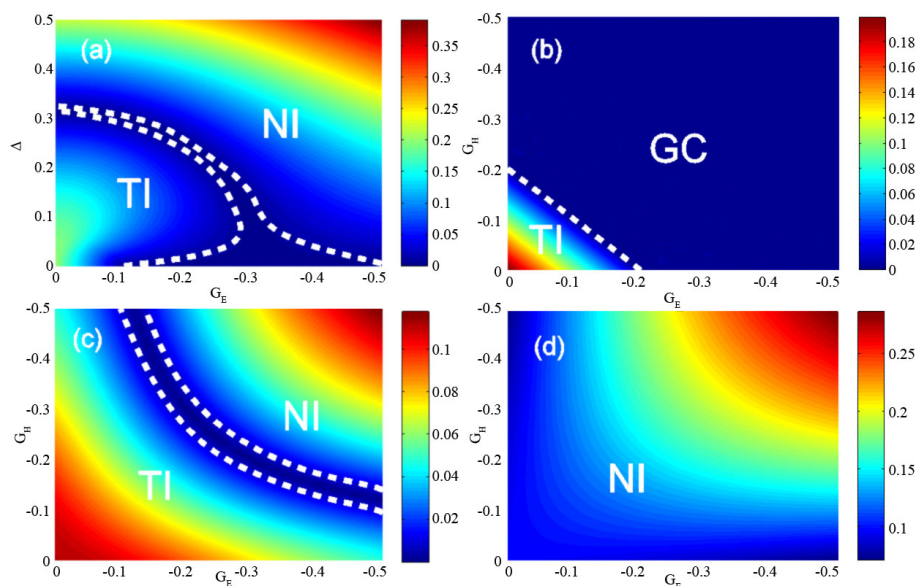
随后我们画出了能隙值的大小关于  $G_E$  和  $G_H$  变化的相图(图 2(b)~(d))。我们发现, 自旋轨道耦合强度  $\Delta = 0$  时, 系统的相变线为一条直线, 和解析的结果一致 ( $G_E - G_H = |2M|$ )。在引入自旋轨道耦合后, 相变线由直线变成了一条曲线 ( $\Delta = 0.2$ )。随着自旋轨道耦合强度的增加 ( $\Delta = 0.4$ ), 我们发现又多出了一个新的普通绝缘体相。原因是不考虑交换场时, 较大的自旋轨道耦合会使得拓扑绝缘体发生相变到普通绝缘体。

### 3.2.2. $G_E G_H > 0$

当  $G_E G_H > 0$  时, 由于能隙的闭合, 会出现导带和价带的能带交叉。对于能带交叉的部分, 数值的方法并不能很好的计算自旋陈数, 我们只能通过解析的方法得到系统的拓扑性质。当引入一个较小的自旋轨道耦合后, 能带交叉点会打开一个能隙, 打开的能隙使得我们能够通过数值的办法计算自旋陈数。我们发现, 一个较小的自旋轨道耦合虽然打开了能隙, 但是拓扑数保持不变。

首先我们考虑一个比较简单的情况(图 3(a)), 令  $G_H = G_E$ 。我们发现, 在自旋轨道耦合强度为零时 ( $\Delta = 0$ ), 当  $G_E > 0.1$  时, 出现了导带和价带的交叉, 体态的能隙闭合, 和解析得到的结果一致。随着自旋轨道耦合强度的增加, 这个区域的宽度将会减小, 并且发生了从拓扑绝缘体到普通绝缘体的拓扑相变。

在图 3(b)~(d)中, 我们给出了能隙关于  $G_H$  和  $G_E$  的相图, 并且计算了对应的自旋陈数。我们发现, 当自旋轨道耦合强度为零时(图 3(b)), 能隙闭合的曲线为一条直线, 和解析的结果一致 ( $G_E - G_H = |2M|$ )。在能隙打开的区域, 通过数值计算自旋陈数, 我们发现这块区对应的是拓扑绝缘体。当考虑一个较小的自旋轨道耦合强度 ( $\Delta = 0.2$ ) 时(图 3(c)), 能隙闭合的区域有很大一部分区域打开了能隙, 通过数值计算对应的自旋陈数, 我们发现分别出现了拓扑绝缘体相和普通绝缘体相。在这两个相之间, 仍然有一部分能隙保持闭合。当自旋轨道耦合强度  $\Delta = 0.4$  时, 整个区域都变成了普通绝缘体(图 3(d))。



**Figure 3.** The phase diagram for the value of the energy gap as a function of  $G_E$ ,  $G_H$  and  $\Delta$ . In (a) and (c), the gap closing (GC) region is surrounded by the white lines. The parameters are given by (a)  $G_H = G_E$ ; (b)  $\Delta = 0$ ; (c)  $\Delta = 0.2$ ; (d)  $\Delta = 0.4$

**图 3.** 能隙值随着  $G_E$ ,  $G_H$  和  $\Delta$  变化的相图。在(a)和(c)中, 白色虚线包围的区域是能隙闭合的。图中的参数分别为(a)  $G_H = G_E$ ; (b)  $\Delta = 0$ ; (c)  $\Delta = 0.2$ ; (d)  $\Delta = 0.4$

#### 4. 总结

在本文中, 我们讨论了 HgMnTe 量子阱中自旋轨道耦合诱导的拓扑相变。我们发现, 对于能带反转的 HgTe 量子阱考虑到体反演不对称引起的自旋轨道耦合后, 当该自旋轨道耦合强度  $|\Delta| > (A\sqrt{M/B})$  时, 系统由拓扑绝缘体变成了普通绝缘体。在锰掺杂引起的交换场强度系数  $G_E G_H < 0$  时, 由于体态能谱不会出现导带和价带的交叉, 拓扑相图将会分为三个区域: 普通绝缘体, 拓扑绝缘体和量子反常霍尔效应。当  $G_E G_H > 0$  时, 由于体态能谱出现了导带和价带的交叉, 出现了能隙闭合的区域。然而我们发现, 自旋轨道耦合将会在能隙闭合的区域打开一个能隙, 能隙打开的区域将会呈现出拓扑绝缘体相或者普通绝缘体相。

#### 基金项目

中国国家自然科学基金(11274102), 教育部新世纪优秀人才支持计划(NCET-11-0960), 教育部博士点基金(博导类)(20134208110001)。

#### 参考文献 (References)

- [1] Hasan, M.Z. and Kane, C.L. (2010) Colloquium: Topological Insulators. *Reviews of Modern Physics*, **82**, 3045. <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.82.3045>
- [2] Qi, X.L. and Zhang, S.C. (2011) Topological Insulators and Superconductors. *Reviews of Modern Physics*, **83**, 1057. <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.83.1057>
- [3] Kane, C.L. and Mele, E.J. (2005)  $Z_2$  Topological Order and the Quantum Spin Hall Effect. *Physical Review Letters*, **95**, Article ID: 146802.
- [4] Kane, C.L. and Mele, E.J. (2005) Quantum Spin Hall Effect in Graphene. *Physical Review Letters*, **95**, Article ID: 226801. <http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.95.226801>
- [5] Yao, Y., Ye, F., Qi, X.L., et al. (2007) Spin-Orbit Gap of Graphene: First-Principles Calculations. *Physical Review B*, **75**, Article ID: 041401. <http://dx.doi.org/10.1103/physrevb.75.041401>

- [6] Bernevig, B.A., Hughes, T.L. and Zhang, S.C. (2006) Quantum Spin Hall Effect and Topological Phase Transition in HgTe Quantum Wells. *Science*, **314**, 1757. <http://dx.doi.org/10.1126/science.1133734>
- [7] König, M., Wiedmann, S., Brüne, C., *et al.* (2007) Quantum Spin Hall Insulator State in HgTe Quantum Wells. *Science*, **318**, 766-770. <http://dx.doi.org/10.1126/science.1148047>
- [8] Zhou, B., Lu, H.Z., Chu, R.L., *et al.* (2008) Finite Size Effects on Helical Edge States in a Quantum Spin-Hall System. *Physical Review Letters*, **101**, Article ID: 246807. <http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.101.246807>
- [9] Cheng, Z. and Zhou, B. (2014) Finite Size Effects on Helical Edge States in HgTe Quantum Wells with the Spin-Orbit Coupling Due to Bulk- and Structure-Inversion Asymmetries. *Chinese Physics B*, **23**, Article ID: 037304. <http://dx.doi.org/10.1088/1674-1056/23/3/037304>
- [10] Cheng, Z., Chen, R. and Zhou, B. (2015) Finite Size Effects on the Quantum Spin Hall State in HgTe Quantum Wells under Two Different Types of Boundary Conditions. *Chinese Physics B*, **24**, Article ID: 067304. <http://dx.doi.org/10.1088/1674-1056/24/6/067304>
- [11] 盛利. 自旋陈数理论和时间反演对称破缺的量子自旋霍尔效应[J]. 物理学进展, 2014, 34(1): 10-27.
- [12] Lu, H.Z., Shan, W.Y., Yao, W., *et al.* (2010) Massive Dirac Fermions and Spin Physics in an Ultrathin Film of Topological Insulator. *Physical Review B*, **81**, Article ID: 115407. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.81.115407>
- [13] Li, H., Sheng, L., Shen, R., *et al.* (2013) Stabilization of the Quantum Spin Hall Effect by Designed Removal of Time-Reversal Symmetry of Edge States. *Physical Review Letters*, **110**, Article ID: 266802. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.266802>
- [14] Beugeling, W., Liu, C.X., Novik, E.G., *et al.* (2012) Reentrant Topological Phases in Mn-Doped HgTe Quantum Wells. *Physical Review B*, **85**, Article ID: 195304. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.85.195304>
- [15] Fu, H.H., Lü, J.T. and Gao, J.H. (2014) Finite-Size Effects in the Quantum Anomalous Hall System. *Physical Review B*, **89**, Article ID: 205431. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.89.205431>
- [16] Liu, C.X., Qi, X.L., Dai, X., *et al.* (2008) Quantum Anomalous Hall Effect in Hg<sub>1-y</sub>Mn<sub>y</sub>Te Quantum Wells. *Physical Review Letters*, **101**, Article ID: 146802. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.146802>
- [17] Jiang, Z.F., Chu, R.L. and Shen, S.Q. (2010) Electric-Field Modulation of the Number of Helical Edge States in Thin-Film Semiconductors. *Physical Review B*, **81**, Article ID: 115322. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.81.115322>
- [18] Fu, B., Zheng, H., Li, Q., *et al.* (2014) Topological Phase Transition Driven by a Spatially Periodic Potential. *Physical Review B*, **90**, Article ID: 214502. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.90.214502>
- [19] Sheng, D.N., Weng, Z.Y., Sheng, L., *et al.* (2006) Quantum Spin-Hall Effect and Topologically Invariant Chern Numbers. *Physical Review Letters*, **97**, Article ID: 036808. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.97.036808>
- [20] Prodan, E. (2009) Robustness of the Spin-Chern Number. *Physical Review B*, **80**, Article ID: 125327. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.80.125327>
- [21] Li, H., Sheng, L., Sheng, D.N., *et al.* (2010) Chern Number of Thin Films of the Topological Insulator Bi<sub>2</sub>Se<sub>3</sub>. *Physical Review B*, **82**, Article ID: 165104. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.82.165104>