Advances in Condensed Matter Physics 凝聚态物理学进展, **2018, 7(1), 7-11**
Published Online February 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/cmp
https://doi.org/10.12677/cmp.2018.71002

Hans汉斯

Geometric Phase in a Quantum Computation with Josephson Qubits Using a Current-Biased Information Bus

Yuanxin Qiao, Zhaoxian Yu

Department of Physics, Beijing Information Science and Technology University, Beijing
Email: zxyu1965@163.com

Received: Dec. 29th, 2017; accepted: Jan. 17th, 2018; published: Jan. 24th, 2018

Abstract

Quantum computation is a new computational model which follows the rules of quantum mechanics to control the quantum information unit. This paper calculates the geometric phase by using the Josephson qubits of current-biased information bus. The geometric phase has nothing to do with the bias current of the large current-biased Josephson junction, the quantum oscillator frequency, the coupler with symmetric Josephson energies, and also the gate capacitance, flux quantum, external flux, and gate voltage applied to the *k*th qubit. The results of this paper have a certain theoretical significance to the calculation of the quantum bit of Josephson.

Keywords

Geometric Phase, Quantum Computation with Josephson Qubits, Current-Biased Information Bus

利用约瑟夫森量子比特计算电流偏置信息总线中的几何相位

乔元新，于肇贤

北京信息科技大学理学院，北京
Email: zxyu1965@163.com

收稿日期：2017年12月29日；录用日期：2018年1月17日；发布日期：2018年1月24日

摘　要

量子计算是一种遵循量子力学规律调控量子信息单元进行计算的新型计算模式。本文利用电流偏置信息

文章引用: 乔元新，于肇贤．利用约瑟夫森量子比特计算电流偏置信息总线中的几何相位[J]．凝聚态物理学进展, 2018, 7(1): 7-11. DOI: 10.12677/cmp.2018.71002

总线的Josephson量子位，计算了几何相位。发现该几何相位与大电流约瑟夫逊结、量子振荡器频率、对称约瑟夫逊能量耦合器的偏置电流无关，与施加到第*k*个量子位的栅极电容、磁通量子、外部电流和栅极电压无关。本文结果对利用约瑟夫森量子比特计算具有一定的理论意义。

关键词

几何相位，约瑟夫逊量子位的量子计算，电流偏置信息总线

1. 引言

量子计算(quantum computation)的概念最早由阿岗国家实验室的 P. Benioff 于 80 年代初期提出[1]，他提出二能阶的量子系统可以用来仿真数字计算；稍后费曼也对这个问题产生兴趣而着手研究，并在 1981 年于麻省理工学院举行的 First Conference on Physics of Computation 中给了一场演讲，勾勒出以量子现象实现计算的愿景。1985 年，牛津大学的 D. Deutsch 提出量子图灵机(quantum Turing machine)的概念，量子计算才开始具备了数学的基本型式。然而上述的量子计算研究多半局限于探讨计算的物理本质，还停留在相当抽象的层次，尚未进一步跨入发展算法的阶段。

1994 年，贝尔实验室的应用数学家 P. Shor 指出，相对于传统电子计算器，利用量子计算可以在更短的时间内将一个很大的整数分解成质因子的乘积。这个结论开启量子计算的一个新阶段：有别于传统计算法则的量子算法(quantum algorithm)确实有其实用性，绝非科学家口袋中的戏法。自此之后，新的量子算法陆续的被提出来，而物理学家接下来所面临的重要的课题之一，就是如何去建造一部真正的量子计算器，来执行这些量子算法。许多量子系统都曾被点名作为量子计算器的基础架构，例如光子的偏振(photon polarization)、腔量子电动力学(cavity quantum electrodynamics, CQED)、离子阱(ion trap)以及核磁共振(nuclear magnetic resonance, NMR)等等。截止到 2017 年，考虑到系统的可扩展性和操控精度等因素，离子阱与超导系统走在了其它物理系统的前面。

1984 年 Berry 研究发现，在绝热过程中量子力学波函数存在一个不可积的具有几何性质的相位因子，它不同于通常的动力学相位因子。这一发现在许多物理领域的几何相位因子中已被广泛研究和证实，并逐渐通过相关实验被证实。在最近 20 多年里，几何相位因子的研究已经成为量子力学中最重要的基本问题之一，其基本概念几乎渗透到物理学的各个领域[2]-[15]。特别是应用到量子测量和量子计算领域[16]。

对照于传统的通用计算机，其理论模型是通用图灵机；通用的量子计算机，其理论模型是用量子力学规律重新诠释的通用图灵机。从可计算的问题来看，量子计算机只能解决传统计算机所能解决的问题，但是从计算的效率上，由于量子力学叠加性的存在，目前某些已知的量子算法在处理问题时速度要快于传统的通用计算机。

本文将利用 Lewis-Riesenfeld 不变理论，计算约瑟夫森量子比特计算电流偏置信息总线中的几何相位，以期望对利用本文模型为量子计算器件的研究有理论上的意义。

2. 模板

使用电流偏置信息总线的约瑟夫逊量子位的量子计算的哈密顿量子算符可以写成[17]

$$\hat{H}=\sum_{k=1}^{N}\left[\hat{H}_k+\lambda_k\left(\hat{a}^{\dagger}+\hat{a}\right)\sigma_y^{(k)}\right]+\hat{H}_b, \tag{1}$$

其中

$$\hat{H}_k=\left[\frac{\delta E_{C_k}}{2}\sigma_z^{(k)}-\frac{E_{J_k}}{2}\sigma_x^{(k)}\right], \tag{2}$$

$$\hat{H}_b=\left(\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_b, \tag{3}$$

且

$$\hat{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right)\sqrt{\frac{\tilde{C}_b\omega_b}{\hbar}}\hat{\theta}_b+i\left(\frac{2\pi}{\Phi_0}\right)\frac{\hat{p}_b}{\sqrt{\tilde{C}_b\hbar\omega_b}}\right], \tag{4}$$

$$\hat{a}^{\dagger}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right)\sqrt{\frac{\tilde{C}_b\omega_b}{\hbar}}\hat{\theta}_b-i\left(\frac{2\pi}{\Phi_0}\right)\frac{\hat{p}_b}{\sqrt{\tilde{C}_b\hbar\omega_b}}\right], \tag{5}$$

$$\omega_b=\sqrt{\frac{2\pi I_r}{\tilde{C}_b\Phi_0}}\left[1-\left(\frac{I_b}{I_r}\right)^2\right]^{1/4},\ A=\frac{\delta E_{C_k}}{2},\ B=-\frac{E_{J_k}}{2} \tag{6}$$

其中 C_b， θ_b 和 I_b 是电容，相位下降和偏置电流关于大电流偏置的约瑟夫逊结(CBJJ)。

$$\tilde{C}=C_b+\sum_{k=1}^{N}C_{J_k}C_{g_k}/C_k\ 。$$

3. 动力学与几何相位

为了自洽，我们首先介绍 Lewis-Riesenfeld (L-R)不变量理论[18]。

对于一维系统的与时间相关的哈密顿量，存在运算符 $\hat{I}(t)$ 的不变量满足方程

$$i\frac{\partial\hat{I}(t)}{\partial t}+\left[\hat{I}(t),\hat{H}(t)\right]=0. \tag{7}$$

给出了与时间有关 $|\lambda_n,t\rangle$ 的特征值方程

$$\hat{I}(t)|\lambda_n,t\rangle=\lambda_n|\lambda_n,t\rangle, \tag{8}$$

当 $\frac{\partial\lambda_n}{\partial t}=0$。此系统的有时间有关的薛定谔方程是

$$i\frac{\partial|\psi(t)\rangle_s}{\partial t}=\hat{H}(t)|\psi(t)\rangle_s \tag{9}$$

根据 L-R 不变理论，方程(9)的特定解 $|\lambda_n,t\rangle_s$ 只有相位因子 $\exp\left[i\delta_n(t)\right]$ 与 $\hat{I}(t)$ 的本征函数 $|\lambda_n,t\rangle$ 不同，即

$$|\lambda_n,t\rangle_s=\exp\left[i\delta_n(t)\right]|\lambda_n,t\rangle \tag{10}$$

这表明 $|\lambda_n,t\rangle_s\ (n=1,2,\cdots)$ 形成方程(9)的解的完整集合。那么薛定谔方程(9)的一般解可以写成

$$|\psi(t)\rangle_s=\sum_n C_n\exp\left[i\delta_n(t)\right]|\lambda_n,t\rangle, \tag{11}$$

其中

$$\delta_n(t)=\int_0^t \mathrm{d}t'\langle\lambda_n,t'|i\frac{\partial}{\partial t'}-\hat{H}(t')|\lambda_n,t'\rangle, \tag{12}$$

且 $C_n=\langle\lambda_n,0|\psi(0)\rangle_s$.

对于被方程(1)哈密顿量描述的系统，我们能够定义如下的不变量

$$\hat{I}(t)=\alpha(t)\sigma_+ +\alpha^*(t)\sigma_- +\beta(t)\hat{a}^\dagger\hat{a}+C(t)(\hat{a}^? +\hat{a})(\sigma_- -\sigma_+)+D(t)\hat{a}^\dagger\hat{a}. \tag{13}$$

将方程式(1)与方程式(13)代入到方程式(1)，我们能够到的一个辅助方程

$$i\dot{\alpha}_1(t)-2\alpha(t)A=0,\quad 2CA-2C^*A+1=0,\quad \omega_r C^*=\beta A,\quad 1-CA=0. \tag{14}$$

为了得到一个与时间无关的不变量，可以引入酉变换算子 $\hat{V}(t)=\exp\left[\mu(t)Q-\mu^*(t)\bar{Q}\right]$ 其中 $Q=\hat{a}\sigma_+$ 和 $\bar{Q}=\hat{a}^\dagger\sigma_-$。如果我们令非泡利矩阵和 $\hat{a}^\dagger a\sigma_z$ 的第三个分量的系数为零，则在 $\beta\left[1-\cos(2|\mu|)\right]=1$ 的关系下，会出现与时间无关的不变量

$$\hat{I}_V\equiv\hat{V}^\dagger(t)\hat{I}(t)\hat{V}(t)=\sigma_z^k+\hat{a}^\dagger\hat{a}\sigma_z^k. \tag{15}$$

通过使用 Baker-Campbell-Hausdoff 公式[19]

$$\hat{V}^\dagger(t)\frac{\partial\hat{V}(t)}{\partial t}=\frac{\partial\hat{L}}{\partial t}+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial\hat{L}}{\partial t},\hat{L}\right]+\frac{1}{3!}\left[\left[\frac{\partial\hat{L}}{\partial t},\hat{L}\right],\hat{L}\right]+\frac{1}{4}\left[\left[\left[\frac{\partial\hat{L}}{\partial t},\hat{L}\right],\hat{L}\right],\hat{L}\right]+\cdots, \tag{16}$$

其中 $\hat{V}(t)=\exp\left[\hat{L}(t)\right]$。当满足以下等式时，很容易发现

$$\begin{aligned}\hat{H}_V(t)&=\hat{V}^\dagger(t)\hat{H}(t)\hat{V}(t)-i\hat{V}^\dagger(t)\frac{\partial\hat{V}(t)}{\partial t}\\&=\omega_b\hat{a}^\dagger\hat{a}+\omega_b\left[1-\cos(2|\mu|)\right]\left[1+\sigma_z^k+\hat{a}^\dagger\sigma_z^k\right]\\&\quad+A\cos\left(2\sqrt{2}|\mu|\right)\hat{a}^\dagger\hat{a}\sigma_z^k-A\left[1-\cos\left(2\sqrt{2}|\mu|\right)\right]\\&\quad-\left[1-\cos(2|\mu|)\right]\hat{a}^\dagger\sigma_z^k+i\left[\dot{\mu}\mu^*-\mu\dot{\mu}^*\right]\cos\sqrt{2}\left[\sigma_z^k+\hat{a}^\dagger\hat{a}\sigma_z^k\right]\end{aligned} \tag{17}$$

几何相位为

$$\dot{\delta}^g(t)=i\left(\mu\dot{\mu}^*-\dot{\mu}\mu^*\right)[1+n]\cos\sqrt{2} \tag{18}$$

其中利用了关系式 $\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle n|n\rangle$。

4. 结论

在本文中，我们研究了使用电流偏置信息总线的约瑟夫量子位在量子计算中的几何相位。发现几何相位与大电流偏置约瑟夫逊结、量子振荡器频率、具有对称约瑟夫逊能量的耦合器的偏置电流无关；与栅极电容、量子、外部电流和栅极电压施加到第 k 个量子位也无关。本文获得的几何相位因子是一种新的可观察的物理效应。我们期待几何相位因子在未来量子计算中的应用。

基金项目

本文得到北京信息科技大学研究生院项目支持。

参考文献 (References)

[1] 龙桂鲁, 邓富国, 曾谨言, 主编. 量子力学日新进展(第五辑) [M]. 北京: 清华大学出版社, 2011.

[2] Berry, M.V. (1984) Quantal Phase Factors Accompanying Adibatic Changes. *Physical Review A*, **78**, 45-57.

[3] Aharonov, Y. and Bohm, D. (1959) Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory. *Physical Review A*, **115**, 485-491. https://doi.org/10.1103/PhysRev.115.485

[4] Aharonov, Y. and Anandan, J. (1987) Phase Change during a Cyclic Quantum Evolution. *Physical Review Letter*, **58**, 1953. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.58.1593

[5] Samuel, J. and Bhandari, R. (1988) General Setting for Berry's Phase. *Physical Review Letter*, **60**, 2339. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.60.2339

[6] Gao, X.C., Xu, J.B. and Qian, T.Z. (1992) Geometric Phase and the Generalized Invariant Formulation. *Physical Review A*, **44**, 70-76.

[7] Sun, C.P. and Ge, M.L. (1990) Generalizing Born-Oppenheimer Approximations and Observable Effects of an Induced Gauge Field. *Physical Review D*, **41**, 1349. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.41.1349

[8] Sun, C.P. (1993) Quantum Dynamical Model for Wave-Function Reduction in Classical and Macroscopic Limits. *Physical Review A*, **48**, 898. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.48.898

[9] Sun, C.P. (1988) Analytic Treatment of High-Order Adiabatic Approximations of 2-Neutrino Oscillations in Matter. *Physical Review D*, **38**, 2908. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.38.2908

[10] Sun, C.P., *et al*. (1988) High-Order Quantum Adiabatic Approximation and Berrys Phase Factor. *Journal of Physics A*, **21**, 1595. https://doi.org/10.1088/0305-4470/21/7/023

[11] Fan, H.Y. and Ruan, T.N. (1984) Some New Applications of Coherent States. *China Science*, **42**, 27.

[12] Tsui, D.C., *et al*. (1982) Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit. *Physical Review Letters*, **48**, 1559-1562. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.48.1559

[13] Semenoff, G.W., *et al*. (1986) Non-Abelian Adiabatic Phases and the Fractional Quantum Hall Effect. *Physical Review Letters*, **57**, 1195-1198. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.57.1195

[14] Chen, C.M., *et al*. (1991) Quantum Hall Effect and Bery Phase Factor Physics. *Acta Physica Sinica*, **40**, 345.

[15] Aharonov, Y. and Anandan, J. (1987) Phase Change during a Cyclic Quantum Evolution. *Physical Review Letters*, **58**, 1593-1596. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.58.1593

[16] 张永德. 量子测量和量子计算简述: 量子力学新进展(第一辑) [M]. 北京: 北京大学出版社, 2000: 286-342.

[17] Wei, L.F., Liu, Y.X. and Nori, F. (2005) Quantum Computation with Josephson Qubits Using a Current-Biased Information Bus. *Physical Review B*, **71**, Article ID: 134506.

[18] Lewis, H.R. and Riesenfeld, W.B. (1969) An Exact Quantum Theory of the Time-Dependent Harmonic Oscillator and of a Charged Particle in a Time-Dependent Electromagnetic Field. *Journal of Mathematical Physics*, **10**, 1458. https://doi.org/10.1063/1.1664991

[19] Wei, J. and Norman, E. (1963) Lie Algebraic Solution of Linear Differential Equations. *Journal of Mathematical Physics*, **4**, 575. https://doi.org/10.1063/1.1703993