

# Local Polynomial Modeling in the Application of Image Interpolation

Liyun Su<sup>1</sup>, Qian Yang<sup>1</sup>, Ruihua Liu<sup>1</sup>, Jiaojun Li<sup>2</sup>

<sup>1</sup>School of Mathematics and Statistics, Chongqing University of Technology, Chongqing

<sup>2</sup>School of Electronic Information and Automation, Chongqing University of Technology, Chongqing

Email: cloudhopping@163.com

Received: May 30th, 2011; revised: Jul. 21st, 2011; accepted: Jul. 29th, 2011.

**Abstract:** In this paper, we use method of local polynomial to deal with image. Firstly, we obtain low resolution images by down-sampling from the high-resolution images, and then interpolate the obtained low-resolution images and calculate the peak signal to noise ratio. To illustrate the feasibility of this method we compare it with the traditional interpolation method. Experiments show that the method applied in this paper has higher *PSNR* than traditional interpolation, thus this method of image interpolation is feasible and effective.

**Keywords:** Local Polynomial Modeling; Image Processing; Interpolation

## 局部多项式建模在图像插值中的应用

苏理云<sup>1</sup>, 杨 迁<sup>1</sup>, 刘瑞华<sup>1</sup>, 李皎军<sup>2</sup>

<sup>1</sup>重庆理工大学数学与统计学院, 重庆

<sup>2</sup>重庆理工大学电子信息与自动化学院, 重庆

Email: cloudhopping@163.com

收稿日期: 2011年5月30日; 修回日期: 2011年7月21日; 录用日期: 2011年7月29日

**摘 要:** 本文运用局部多项式的方法对图像进行插值。文中我们从一幅高分辨率图像通过下采样得到一张低分辨率图像, 然后对其进行插值并求出插值图像的峰值信噪比(*PSNR*)。为说明本文方法的可行性, 我们把本文的方法与传统的插值方法进行了比较。实验表明本文所运用的方法比传统插值方法具有更高的 *PSNR*, 故本文的方法对图像插值是有效可行的。

**关键词:** 局部多项式建模; 图像处理; 插值

### 1. 引言

随着非线性、非参数建模理论和方法的迅猛发展, 人们所处理的时间序列或数据用参数模型和整体化模型已经无法有效的进行拟合、估计和预测。同时, 信息技术和计算机工业的发展无疑给数据处理带来更多的机遇和挑战。现代社会的数据呈现爆炸式、非线性式、混沌式、分形式以及复杂式。尽管传统参数模型和整体化模型仍然非常有用, 但非参数局部多项式方法提供了一种有效的方法, 可以探索更加精细的结构。局部多项回归作为非参数建模的重要方法之一, 其基

本理论近二十年来得到了长足发展, 并被广泛用于非线性时间序列、通信、图像处理、金融等领域<sup>[1]</sup>。

Takeda 和 Farsiu 等人 2007 年运用核回归的方法对图像进行处理和重建<sup>[2]</sup>。之后 Takeda, Farsiu 和 Milanfar 在 2008 年使用正则局部自适应核回归方法去图像模糊<sup>[3]</sup>。2009 年 Zhang 等人运用局部多项式完成了在医学图像大脑磁共振图片的高分辨率重建<sup>[4]</sup>, 且得到较好的边缘和细节。之后在 2010 年 Zhang 等人对局部多项式核函数的选择和局部自适应带宽的选择也做了研究<sup>[5,6]</sup>。Su 等人 2010 在文献<sup>[7]</sup>中应用局部多

项式对离焦模糊图像完成重建并得到较好的效果。

## 2. 基于局部多项式建模的图像插值

### 2.1. 局部多项式插值

局部多项式拟合是一个用途广泛的非参数技术，它拥有多种好的统计特性。设大小为  $M \times N$  的灰度图像可以用二维函数的观察模型表示。自变量  $X_i = [x_{i1}, x_{i2}]^T$ ,  $x_{i1} = 1, 2, \dots, M, x_{i2} = 1, 2, \dots, N$ 。因变量  $y_i$  是  $X_i$  处的像素值，则

$$y_i = f(X_i) + \sigma(X_i)\varepsilon_i, \quad (1)$$

式中， $f(\cdot)$  为未知函数； $\sigma(X_i)\varepsilon_i$  是独立同分布零均值方差为  $\sigma(X_i)$  的加性高斯白噪声， $i = 1, 2, \dots, l$ ，表示取样窗中像素点数目。

采用不同的基函数都可以将  $f(\cdot)$  展开。 $X = [x_1, x_2]^T$  的邻域  $X_i$  处的像素值的  $p$  阶 Taylor 展开为：

$$\begin{aligned} f(X_i) &\approx f(X) + \{\nabla f(X)\}^T (X_i - X) \\ &+ \frac{1}{2} (X_i - X)^T \{Hf(X)\} (X_i - X) + \dots \\ &= \beta_0 + \beta_1^T (X_i - X) \\ &+ \beta_2^T \text{vech}\{(X_i - X)(X_i - X)^T\} + \dots, \end{aligned} \quad (2)$$

式中， $\nabla$  和  $H$  分别为梯度算子和海赛算子； $\text{vech}(\cdot)$  为把对称矩阵下三角部分按字典序排成列向量； $\beta_0$  为用回归函数得出的  $X$  处的估计值  $\hat{f}(X)$ ； $\{\beta_n\}_{n=1}^p$  为回归函数的  $n$  阶梯度系数。

令  $\beta = \{\beta_{s_1, s_2} : s_1 + s_2 = s, s = 0, \dots, p\}$ ，在加权最小二乘下用核函数回归方法求解，式(3)：

$$\text{令 } W = \text{diag}[K_h(X_1 - X), \dots, K_h(X_l - X)], \quad (4)$$

$$Y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_l]^T, \quad (5)$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} - x_1 & x_{21} - x_2 & \dots & (x_{21} - x_2)^N \\ 1 & x_{12} - x_1 & x_{22} - x_2 & \dots & (x_{22} - x_2)^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{l1} - x_1 & x_{2l} - x_2 & \dots & (x_{2l} - x_2)^N \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$K_{H_i}(X_i - X) = \frac{1}{|H_i|} K(H_i^{-1}(X_i - X)), \quad (7)$$

则最小化问题简化为：

$$\hat{\beta}(X; h) = \arg \min_{\beta} F(X; H_i) = (X^T W X)^{-1} X^T W Y, \quad (8)$$

式(7)中， $K(\cdot)$  代表在中心点处取得最大值的二维核函数，其限定条件是非负定对称单峰。

平滑矩阵  $H_i = hI$  的求解方法被称为经典核回归方法。 $I$  为二阶单位阵， $h$  为全局平滑因子，可以约束取样窗口的带宽，限定取样窗中像素点数目  $l$ 。

为了实现局部多项式估计，我们需要选择阶数  $p$ ，核函数  $K$  和带宽  $h$ 。当然这些参数相互关联。当  $h \rightarrow +\infty$  时，局部多项式拟合就变成全局多项式拟合，阶数  $p$  决定模型的复杂性。与参数模型不同，局部多项式估计拟合的复杂性是由阶数  $p$  来控制的。因此，通常  $p$  的选择是较小的<sup>[8]</sup>。

对于核函数  $K$  的选择，对所有  $p$  的选择，由 Fan 等人在 1995 年证明了最优核函数是：

$$K(z) = 3/4(1 - z^2)_+ \quad (10)$$

它被称为 Epanechnikov 核，它是一个万能的加权方式<sup>[9]</sup>。另外在用局部多项式拟合做图像处理时通常选择形式简单的高斯核函数<sup>[6]</sup>。

故与阶数  $p$  和核函数  $K$  相比较，带宽  $h$  的选择在多项式拟合中起着更重要的作用。太大的带宽引起过度平滑，产生过大的建模偏倚，而太小的带宽会导致不足平滑，获得受干扰的估计。理论上在最小均方误差前提下存在最优带宽  $h_{opt}$ ，即

$$h_{opt} = \arg \min \int (f(x) - \hat{f}(x))^2 dx \quad (11)$$

但是最优带宽通常不能够直接求出。只能通过一些方法得到次最优带宽，常见的解次最优带宽的方法有 cross-validation(CV)和 plug-in。

带宽的选择还可由使用者通过目测检查所得的估计曲线来主观选择，或由数据通过极小化的估计理论风险来自动选择。

$$F(X; H_i) = \sum_{i=1}^l \left[ y_i - \sum_{s=0}^p \sum_{s_1+s_2=s} \beta_{s_1, s_2} \prod_{j=1}^2 (x_{ji} - x_j)^{s_j} \right]^2 K_{H_i}(X_i - X) \quad (3)$$

## 2.2. 局部多项式用于图像插值流程图

图 1 中(a)为原始图像; (b)为下采样得到的一张低分辨率图像; (c)为插值重建的图像。其中  $D$  为下采样算子,  $a_1, b_2, \dots$  是  $a, b, \dots$  的拟合值, “\*” 为插值后的像素值。

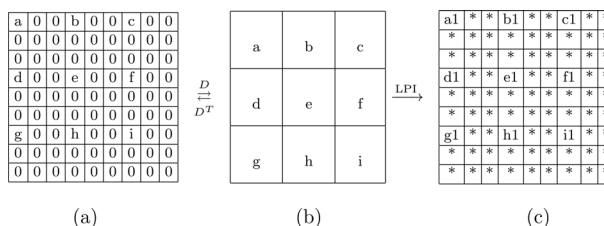


Figure 1. Process of image interpolation  
图 1. 插值流程图

## 3. 实验和结果分析

本文实验所用的是测试图像 Peppers(300 × 300), 即图 2(a)中的原始图像。利用 2.2 节下采样的方法得到一张低分辨率图像 LRpeppers(100 × 100), 图 2(b)中的低分辨率图像。在得到欠采样图像后, 采用本文中提出方法对其进行插值。给出了峰值信噪比(Peak Signal to Noise Ratio,  $PSNR$ )。峰值信噪比越高说明重建效果越好。实验所选择的核函数为高斯核函数。

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2}\right), \quad \|x\| = (x_1^2 + x_2^2)^{-1/2}.$$

峰值信噪比计算公式为:

$$PSNR = 10 * \log_{10}\left(255^2/mse\right), \quad mse = \|I - I_0\|_2,$$

$mse$  为残差平方和,  $I$  为原始图像,  $I_0$  为插值重建图像。实验结果表明当  $p = 2, h = 0.8$  时  $PSNR$  达到最大值。

对选择的参数  $p$  和  $h$ , 对图像插值放大一定倍数  $L$ (如  $L = 3$ ) 计算出  $PSNR$ 。并对同一图像运用传统插值方法如: 最近邻域法, 双线性插值法<sup>[10]</sup>等插值放大的倍数  $L$ , 比较各方法得到的插值放大图像和  $PSNR$ 。结果如图 2。

图 2 中(a)为本文的方法插值的图像( $p = 2, h = 0.8, PSNR = 22.9032$ ); (b)为最近邻域法插值的图像( $PSNR = 20.7446$ ); (c)为双线性插值的图像( $PSNR = 22.1900$ ); (d)为原始图像; (e)为下采样后的低分辨率图像。从图 2 可以看出本文提出的方法其峰值信噪比比传统方法都有提高, 且图像边缘锯齿现象也有所改善。

## 4. 结论

本文运用局部多项式来对下采样图像进行了插值。并且和传统插值方法进行了比较, 实验表明运用本文的方法对图像插值后具有更高的  $PSNR$ , 边缘轮廓

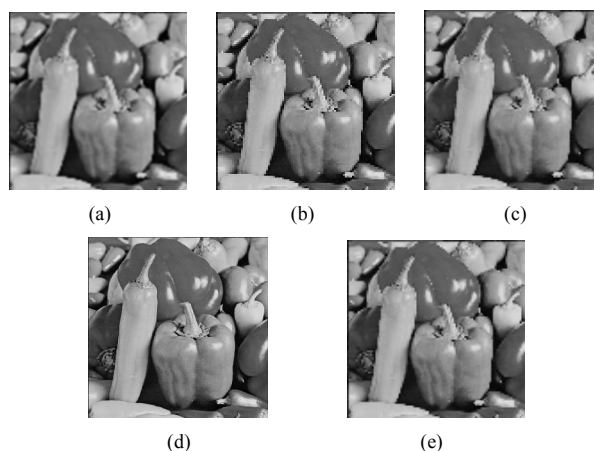


Figure 2. Comparison of interpolated images  
图 2. 插值后图片的比较

也得到改善。表明了本文提出的方法比传统的插值方法具有更好的插值效果, 也说明了采用局部多项式对图像插值是有效可行的。

## 5. 致谢

本文得到了重庆市科委自然科学基金(CSTC 2010BB2310, CSTC2011JJA40033)和重庆市教委项目(KJ100818, KJ100810)的资助。

## 参考文献 (References)

- [1] L. Su. Prediction of multivariate chaotic time series with local polynomial fitting. *Computers & Mathematics with Applications*, 2010, 59(2): 737-744.
- [2] H. Takeda, S. Farsiu, and P. Milanfar. Robust kernel regression for restoration and reconstruction of images from sparse noisy data. *Atlanta: Process of the International Conference on Image Processing (ICIP)*, 2006: 1257-1260.
- [3] H. Takeda, S. Farsiu, and P. Milanfar. Deblurring using regularized locally adaptive kernel regression. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2008, 17(4): 550-563.
- [4] Z. Zhang, S. Chan, X. Zhang, E. Lam, E. Wu, and Y. Hu. High-resolution reconstruction of human brain mri image based on local polynomial regression. *Antalya: Proceedings of the 4th International IEEE EMBS Conference on Neural Engineering*, April 29 2009: 245-249.

- [5] Z. Zhang, S. Chan. Local polynomial modelling of time-varying autoregressive processes and its application to the analysis of event-related electroencephalogram. Paris: Proceedings of 2010 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS), 2010: 3124-3127.
- [6] Z. G. Zhang, S. C. Chan. On kernel selection of multivariate local polynomial modelling and its application to image smoothing and reconstruction. *Journal of Signal Processing Systems*, 2011, 64(3): 361-371.
- [7] L. Su, F. Li. Deconvolution of defocused image with multivariate local polynomial regression and iterative wiener filtering in DWT domain. *Mathematical Problems in Engineering*, 2010: Article ID 605421.
- [8] J. Fan. Local Linear regression smoothers and their minimax efficiency. *The annals of Statistics*, 1993, 21(1): 196-216.
- [9] J. Fan, I. Gijbels. Data-driven bandwidth selection in local polynomial fitting: Variable bandwidth and spatial adaptation. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 1995, 57(2): 371-394.
- [10] 杨杰. 数字图像处理及 MATLAB 实现[M]. 北京: 电子工业出版社, 2010: 47-49.