

Design Deformable Pyramid Transform via SVD Approach*

Chuntao Wang^{1,2}, Dong Zhang²

¹College of Information, South China Agricultural University, Guangzhou
²School of Information and Science Technology, Sun Yat-Sen University, Guangzhou
Email: wct2006@gmail.com

Received: Mar. 2nd, 2013; revised: Mar. 17th, 2013; accepted: Apr. 9th, 2013

Copyright © 2013 Chuntao Wang, Dong Zhang. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Abstract: This paper presents a deformable pyramid transform (DPT) with shift-invariance, steerability, and scalability. This DPT is extended from a numerical steerable pyramid transform (SPT). We take each steerable basis filter of the SPT as the kernel. For each kernel, we employ the singular value decomposition (SVD) approach to construct scalable basis filters and their corresponding interpolation functions. These scalable basis filters are used as analysis filters of the DPT. Its synthesis filters are then theoretically derived under the constraint of perfect reconstruction for analysis and synthesis filters. In addition, we theoretically derive the interpolation function for steerability, and quantitatively analyze the relationship between the number of scalable basis filters and the reconstruction performance. Numerical simulations demonstrate that the proposed scalable basis filters satisfy the constraint of perfect reconstruction. Also, it is observed that merely using half of the number of scalable basis filters can approximate the optimum reconstruction performance at a cost of reconstruction error within 1 dB.

Keywords: Wavelet; Pyramid Transform; Steerability; Deformability; Perfect Reconstruction

基于 SVD 方法设计几何变形可控的 金字塔变换*

王春桃^{1,2}, 张东²

¹华南农业大学信息学院, 广州
²中山大学信息科学与技术学院, 广州
Email: wct2006@gmail.com

收稿日期: 2013 年 3 月 2 日; 修回日期: 2013 年 3 月 17 日; 录用日期: 2013 年 4 月 9 日

摘要: 本文设计了一种具有平移不变性、方向和尺度联合可控特性的金字塔变换, 称为几何变形可控金字塔变换(DPT)。此 DPT 从一种数值形式表示的方向可控金字塔变换(SPT)发展而来。我们以 SPT 的每一个方向可控基滤波器作为核函数, 并通过奇异值分解(SVD)设计针对该方向的尺度可控基滤波器和插值函数。我们以此尺度可控基滤波器作为 DPT 的分析滤波器, 进而在理想重构约束下通过理论推导得到 DPT 的综合滤波器。另外, 我们还通过理论推导获得了实现方向可控特性的插值函数, 并通过定量表达式分析了采用不同数量的尺度可控基滤波器时对 DPT 重构性能的影响。数值仿真表明, 本文设计的尺度可控基滤波器能满足理想重构约束, 且能在误差不超过 1 dB 的情况下以一半数量的尺度可控基滤波器逼近最优重构性能。

关键词: 小波; 金字塔变换; 方向可控; 几何变形可控; 理想重构

*资助信息: 国家自然科学基金(61202467 和 61100170)、教育部留学回国人员科研启动基金、华南农业大学校长基金、中央高校基本科研业务费中山大学青年教师培养项目(12lgpy37)。

1. 引言

自从上世纪八十年代小波(wavelet)问世以来, 由于其良好的时频局部性, 得到了广泛深入的研究^[1]。尽管小波基函数是由核函数的平移和缩放得到的, 它们却对平移非常敏感^[2]。

为解决这个问题, 很多研究人员提出了传统小波的变种。如文献[3]中, Freeman 和 Adelson 首次基于高斯核函数的 n 阶偏导数构造了方向可控(steerable)滤波器。利用这些滤波器, 通过简单的线性插值便可得到任意方向的滤波器, 使得信号旋转前后生成的滤波器响应系数间能构成简单的线性关系, 从而解决了传统小波对几何操作敏感的问题。Freeman 和 Adelson 将这种特性称为方向可控特性(steerability)。他们还进一步研究了方向可控特性的充分必要条件, 并展示了它们的具体应用。方向可控滤波器在文献[4]和[5]进行了理论分析和证明。

随后, Perona 构造了尺度可控(scalable)滤波器^[6], 用于生成一定尺度范围内的任意滤波器。类似于方向可控特性, 他将此称为尺度可控特性(scalability)。此外, Perona 还将方向可控和尺度可控特性结合起来, 提出了几何变形可控(deformable)滤波器, 以通过线性插值生成任意方向和某一给定范围内任意尺度的滤波器。

文献[2]中, Simoncelli 等人构造了更为一般化的几何变形可控滤波器。他们首先展示了传统小波变换对平移的敏感性, 然后提出了位移可控(shiftable)的滤波器, 使得通过线性插值能获得任意平移位置的滤波器。他们将此特性命名为位移可控特性(shiftability)。类似地, 他们发展了方向可控和尺度可控滤波器, 以解决传统小波对旋转和缩放敏感的问题。对于这些位移、方向和尺度可控特性, 他们统一用“shiftability”来表征。为便于区别引用, 本文称为几何可控特性。其中, 在方向和尺度上的几何可控特性分别等同于文献[3]和[6]中提出的方向可控特性和尺度可控特性。Simoncelli 等人进一步指出, 除了可以在位移、方向和尺度方面独立地获得几何可控特性外, 还可以在这三个方面的部分组合(如位移和方向)中同时获得可控特性, 即获得联合可控特性。为对这些概念和理论进行示例, 他们设计了一种具有平移不变性和方向可控的金字塔变换(steerable pyramid transform, SPT)。

除了上述介绍的概念和理论外, 尚有为数不少的研究人员致力于几何可控滤波器的具体设计与实现。文献[7]中, Karasaridis 和 Simoncelli 首先分析了理想重构和方向可控约束下 SPT 所需满足的条件, 然后基于这些约束用数值优化方法设计了一类具有平移不变性和方向可控特性的 SPT。此外, 文献[8-12]根据各自的实际应用需求设计了不同的 SPT。文献[13-16]则对几何可变形滤波器的优化设计与实施展开了大量的研究。

由于方向可控、尺度可控、几何可控滤波器的良好几何特性, 使得它们得到了广泛的应用。如根据文献[3,6,10,12,13], 方向可控滤波器可用于局部方向分析、角度自适应滤波、轮廓检测、基本视觉结构特征(如特征点、线、边缘、纹理等)的提取。此外, 文献[2]利用 SPT 进行三维视觉匹配、图像增强等。除此之外, SPT 还被应用于鲁棒数字水印领域以抵抗旋转攻击, 如文献[17]所示。尽管文献[17]能鲁棒地抵抗几何攻击, 但它采用的 SPT 不具备尺度可控特性, 因此无法抵抗缩放攻击。

旋转和缩放攻击是鲁棒数字水印的常见攻击, 而且如何鲁棒地抵抗包括旋转、缩放、平移等在内的几何攻击仍然是鲁棒数字水印领域具有挑战性的问题之一。而若要同时抵抗旋转和缩放攻击, 则所采用的可控金字塔变换必须同时具备方向和尺度可控特性, 且需同时具备分析和综合滤波器。根据上面的文献简述可知, 方向可控滤波器只具备方向可控性, 但不具备尺度可控性。虽然文献[6,13-16]中设计的几何变形可控滤波器同时具备方向和尺度可控性, 但它们并不没有综合滤波器, 因此不适合用于鲁棒数字水印等需要综合滤波器的场合。据我们对文献尽可能多的了解和掌握, 在相关文献中并没有同时具备方向和尺度可控性的金字塔变换。出于抵抗鲁棒数字水印中旋转和缩放攻击的目的, 我们设计同时具备方向和尺度可控性的金字塔变换, 即为几何变形可控金字塔变换(deformable pyramid transform, DPT)。虽然我们的出发点是着力于解决鲁棒数字水印中的旋转和缩放攻击, 但所设计的 DPT 将同样适用于图像去噪、图像增强等领域中。

如前所述, 文献[7]中设计的 SPT 具备平移不变性和方向可控性。受此启发, 我们以该 SPT 作为 DPT

设计的基础,即我们需要在 SPT 的基础上进一步设计尺度可控基滤波器。为此,我们借鉴[6]中构建尺度可控基滤波器的思想,将 SPT 中对应方向 θ_k ($k = 0, 1, \dots, K-1$) 的方向可控基滤波器 B_k 拓展为尺度可控基滤波器 C_{kj} ($j = 0, 1, \dots, J-1$), 并将它们用作 DPT 的分析滤波器。这样,我们可以利用 C_{kj} 插值出方向 θ_k 下某一尺度 σ ($\sigma > 0$) 的滤波器 $C^{\theta_k, \sigma}$ 。进一步利用方向可控特性,我们可以将各不同方向的 $C^{\theta_k, \sigma}$ 经由线性插值得到任一方向 ϕ 和尺度 σ 的滤波器 $C^{\phi, \sigma}$, 从而获得方向和尺度联合可控特性。其次,根据已设计得到的尺度可控滤波器 C_{kj} , 我们分析理想重构所需满足的约束,并经理论推导得到 DPT 的综合滤波器。综上所述,我们设计的 DPT 继承了 SPT 的非亚抽样结构,即不对高频子带和尺度子带(即尺度可控基滤波器的响应)进行亚抽样,因而具有平移不变性。综上所述,我们设计得到的 DPT 具有平移不变性、方向和尺度联合可控性。

鉴于 C_{kj} 的数量不少,有可能需要较多的插值运算量。为了能在重构性能和运算量之间得到较好的折衷,我们进一步定量地分析尺度可控基滤波器数量与重构性能之间的关系,以便能在一定的误差范围内选择合适的基滤波器数量。

为了评估所设计 DPT 的合理性,我们进行了数值仿真。仿真结果表明,基于 DPT 的重构性能等同于所采用的 SPT 的重构性能,即尺度可控基滤波器能满足理想重构约束。此外,仿真结果也表明,在采用一半数量的尺度可控基滤波器情况下,仍然能以不超过 1dB 的误差而逼近最优重构性能。

2. SPT 的约束与设计

本节简要回顾文献[7]中给出的 SPT 所需满足的约束及其设计实现。文献[7]中, Karasaridis 和 Simoncelli 考察了图 1 所示的 SPT 结构。其中, $H_0(\omega)$ 和 $L_0(\omega)$ 为高通和低通滤波器; $\omega = (\omega_x, \omega_y)$ 代表频域坐标向量。 $B_k(\omega)$ ($k = 0, \dots, K-1$) 和 $L_1(\omega)$ 分别代表方向可控滤波器和窄带低通滤波器。为实现理想重构, SPT 需满足下列约束^[7]:

$$|H_0(\omega)|^2 + |L_0(\omega)|^2 \left(|L_1(\omega)|^2 + \sum_{k=0}^{K-1} |B_k(\omega)|^2 \right) = 1 \quad (1)$$

$$\left| L_1\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 \cdot \left(|L_1(\omega)|^2 + \sum_{k=0}^{K-1} |B_k(\omega)|^2 \right) = \left| L_1\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 \quad (2)$$

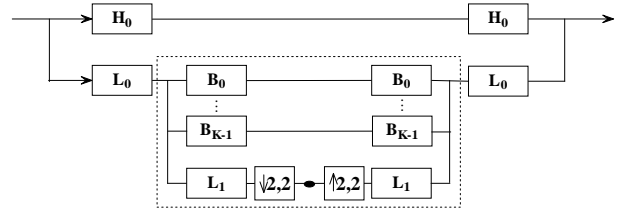


Figure 1. Illustration of SPT^[7]: Recursively insert the sub-system in the dashed box at the location of the filled circle results in a multi-layer pyramid transform.

图 1. SPT 示意图^[7]: 将虚线框内的子系统反复代入小圆黑点内, 可实现 SPT 的多层金字塔变换

$$|L_1(\omega)| = 0, |\omega| > \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

为实现方向可控特性, SPT 尚需满足下列条件:

$$B_k(\omega) = B(\omega) \left[-j \cos(\theta - \theta_k) \right]^{K-1}. \quad (4)$$

其中,

$$\theta = \arg(\omega), \theta_k = \pi k / K, B(\omega) = \sqrt{\sum_{k=0}^{K-1} |B_k(\omega)|^2}.$$

由图 1 可知, SPT 对高频子带和方向子带都没有进行亚抽样, 保持了相应子带的冗余性, 因此具有平移不变性^[2,7]。此外, $B_k(\omega)$ 满足约束式(4), 因此具有方向可控性。也就是说, 文献[7]中的 SPT 具备平移不变性和方向可控特性。

在分析了 SPT 所需满足的约束后, Karasaridis 和 Simoncelli 采用数值优化方法来设计 SPT。为简化设计, 他们进一步设置 $L_0(\omega) = L_1(\omega/2)$, 然后采用 BFGS 方法来优化设计数值方式表示的 SPT。他们设计了 $K=1, K=2$ 和 $K=4$ 这三种具有不同方向选择性的 SPT, 它们的滤波器频谱详见文献[7]。

3. DPT 设计

本节设计具有平移不变性、方向和尺度联合可控性的 DPT。如引言所述, 我们可以基于数值形式的 SPT^[7]来设计 DPT, 如图 2 所示。具体设计如下。

3.1. 分析滤波器的设计

如引言所述, DPT 的分析滤波器 C_{kj} 实际上是以 SPT 的方向可控基滤波器 $B_k(\omega)$ ($k = 0, \dots, K-1$) 为核函数设计得到的一组尺度可控基滤波器。根据文献[2]和[6], 不同尺度的滤波器实质上就是核函数的不同缩放版本。因此, 设计尺度可控基滤波器, 本质上也就

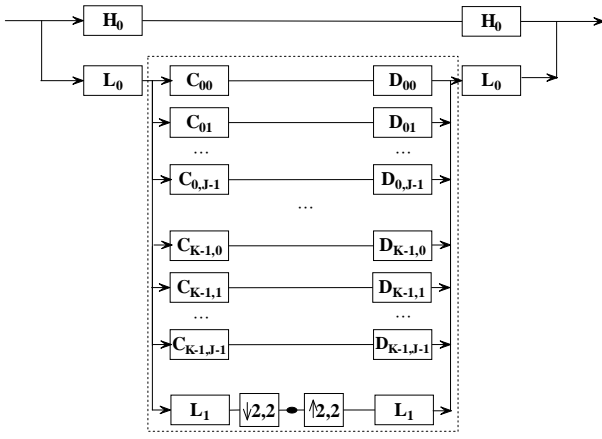


Figure 2. Illustration of DPT: Recursively insert the sub-system in the dashed box at the location of the filled circle results in a multi-layer pyramid transform

图 2. DPT 示意图: 将虚线框内的子系统反复代入小圆黑点内, 则可以生成多层的金字塔变换

是设计一组不同尺度的滤波器, 以便任意尺度的滤波器都能通过这组基滤波器的线性插值而得到。因此, 设计的关键在于确定尺度滤波器的个数。虽然文献[2]的理论中提供了确定基滤波器的个数的方法, 但核函数 $B_k(\omega)$ 是以数值形式而不是封闭表达式表征的, 因此无法直接根据文献[2]的理论来确定基滤波器的个数。对于以数值形式表示的核, 文献[6]提供了一种通过 SVD 来获得基滤波器的方法。本文借鉴此方法来设计 C_{kj} , 具体如下所述。

根据 MatlabPyrTools^[18], 文献[7]设计的 SPT 滤波器最终表现形式为空域的数值滤波器, 记为 $b_k(x, y)$ ($k=0, \dots, K-1$)。相应地, 我们基于空域的方向可控基滤波器 $b_k(x, y)$ 设计空域的尺度可控基滤波器 $c_{kj}(x, y)$, 方法如下:

1) 假定实际应用中所需的尺度范围为 $[\sigma_1, \sigma_2]$ ($0 \leq \sigma_1 < \sigma_2$)。为使得尺度可控滤波器具有相同的倍频程关系, 对 $[\sigma_1, \sigma_2]$ 先求对数得到 $[\log \sigma_1, \log \sigma_2]$, 再将其进行 $n-1$ 等分并进行还原, 得到对数步长为 $\Delta = (\log \sigma_2 - \log \sigma_1)/(n-1)$ 的尺度集 $\Sigma = \{\sigma | \sigma = 2^{\log \sigma_1 + i\Delta}, i=0, \dots, n-1\}$ 。考虑到集合 Σ 中并不必然包含 $\sigma=1$, 为避免进行 $\sigma=1$ 的插值(如插值方向可控基滤波器 $b_k(x, y)$ 的情形)时引起不必要的误差, 我们在集合 Σ 中强制加入 $\sigma=1$, 即

$$\Sigma = \{\sigma | \sigma = 2^{\log \sigma_1 + i\Delta}, i=0, \dots, n-1\} \cup \{1\};$$

2) 对 $\forall \sigma \in \Sigma$, 将 $b_k(x, y)$ 进行如下的缩放:

$$b_k^\sigma(x, y) = \sqrt{\sigma} b_k(\sigma x, \sigma y) \quad (5)$$

3) 设 $b_k(x, y)$ 的大小为 $L \times L$, 则 $b_k^\sigma(x, y)$ 的大小也为 $L \times L$ 。将 $b_k^\sigma(x, y)$ 处理成 $L^2 \times 1$ 的向量, 记为 $\mathbf{b}_k^\sigma = [b_k^\sigma(1,1), \dots, b_k^\sigma(1,L), \dots, b_k^\sigma(L,1), \dots, b_k^\sigma(L,L)]^T$ 。其中, “ \top ” 代表矩阵的转置操作;

4) 将 \mathbf{b}_k^σ 放入矩阵 \mathbf{Z}_k 的第 i ($i=0, \dots, n$) 列, 其中 \mathbf{Z}_k 为 $L^2 \times (n+1)$ 的矩阵。重复步骤 2 和 3, 直至所有的 σ 都处理完毕;

5) 对矩阵 \mathbf{Z}_k 进行 SVD 分解, 得到:

$$\mathbf{Z}_k = \mathbf{U}_k \mathbf{\Lambda}_k \mathbf{V}_k^T = \mathbf{W}_k \mathbf{V}_k^T \mathbf{W}_k = \mathbf{U}_k \mathbf{\Lambda}_k \quad (6)$$

其中, $\mathbf{\Lambda}_k$ 是 $L^2 \times (n+1)$ 的对角阵, \mathbf{U}_k 和 \mathbf{V}_k 分别是 $L^2 \times L^2$ 和 $(n+1) \times (n+1)$ 的矩阵, $\mathbf{W}_k = \mathbf{U}_k \mathbf{\Lambda}_k$;

6) 假定 $\mathbf{\Lambda}_k$ 中有 J ($0 < J \leq \min(L^2, n+1)$) 个非零的奇异值, 则尺度可控基滤波器可如下构建。首先获得这 J 个非零奇异值的行列下标, 记为 $\mathbf{IND} = (\mathit{ind}_r, \mathit{ind}_c)$, 然后次第取 \mathbf{W}_k 矩阵中对应 ind_c 的那一列, 接着将该列变成 $L \times L$ 的矩阵, 最后将此矩阵作为尺度可控基滤波器 $c_{kj}(x, y)$ ($j=0, \dots, J-1$)。与此同时, \mathbf{V}_k 中对应 ind_r 的那一行, 就成为长度为 $1 \times (n+1)$ 的插值函数 $\lambda_{kj}(\sigma)$ ($j=0, \dots, J-1$)。

对每个 $b_k(x, y)$ 都执行上述的步骤, 得到它们对应的尺度可控基滤波器 $c_{kj}(x, y)$ 和插值函数 $\lambda_{kj}(\sigma)$ 。

3.2. 方向插值函数及尺度/方向可控特性推导

我们首先根据几何变形可控特性的理论框架^[2]推导针对方向可控特性的插值函数 $h_k(\phi)$ ($k=0, \dots, K-1$)。根据该理论框架, 插值函数只取决于核函数的非零幅度的傅立叶频率分量, 与其幅度大小无关。由(4)式可知, $b_k(x, y)$ ($k=1, \dots, K-1$) 均可由 $b_0(x, y) = B(\omega)[-j \cos(\theta)]^{K-1}$ 旋转一定角度得到, 因此 $b_0(x, y)$ 可以作为方向可控基滤波器的核函数。此核函数的指数傅立叶形式为:

$$\begin{aligned} b_0(x, y) &= B(\omega) e^{-j\frac{\pi}{2}} \left[\frac{e^{j\theta} + e^{j\theta}}{2} \right]^{K-1} \\ &= B(\omega) e^{-j\frac{\pi}{2}} 2^{1-K} \left[e^{j(K-1)\theta} + \dots \right. \\ &\quad \left. + C_{K-1}^m e^{j(K-1-2m)\theta} e^{-jm\theta} + \dots + e^{-j(K-1)\theta} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

其中, C_{K-1}^m 为组合函数。因此, 此核函数具有非零幅度的傅立叶频率分量为 $K-1, K-2, \dots, \nu$ 。当 K 为奇数时, ν 为 0; 否则, ν 为 1。根据文献[2], 插值函数 $h_k(\phi)$ 满足下列的方程:

$$\begin{pmatrix} e^{j\nu\phi} \\ e^{j(v+2)\phi} \\ \vdots \\ e^{j(K-3)\phi} \\ e^{j(K-1)\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e^{j\nu\pi/K} & \dots & e^{j\nu(K-1)\pi/K} \\ 1 & e^{j(v+2)\pi/K} & \dots & e^{j(v+2)(K-1)\pi/K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{j(K-3)\pi/K} & \dots & e^{j(K-3)(K-1)\pi/K} \\ 1 & e^{j(K-1)\pi/K} & \dots & e^{j(K-1)(K-1)\pi/K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0(\phi) \\ h_1(\phi) \\ \vdots \\ h_{K-2}(\phi) \\ h_{K-1}(\phi) \end{pmatrix} \quad (8)$$

令(8)式左右两端的实部和虚部相等, 解(8)式即可获得方向插值函数 $h_k(\phi)$ 。例如, 当 $K=2$ 时, 可解得 $h_0(\phi) = \cos(\phi)$ 和 $h_1(\phi) = \sin(\phi)$ 。

利用尺度和方向插值函数, 我们可以用公式表达尺度和方向可控特性。首先考虑尺度可控特性。它表现为利用 $c_{kj}(x, y)$ 和 $\lambda_{kj}(\sigma)$ 进行线性插值得到任一尺度 $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$ 的方向滤波器 $b_k^\sigma(x, y)$, 即有:

$$b_k^\sigma(x, y) = \sum_j \lambda_{kj}(\sigma) c_{kj}(x, y) \quad (9)$$

相似地, 对应方向可控特性的插值公式为:

$$\begin{aligned} b^{\sigma, \phi}(x, y) &= \sum_k h_k(\phi) b_k^\sigma(x, y) \\ &= \sum_k h_k(\phi) \sum_j \lambda_{kj}(\sigma) c_{kj}(x, y) \end{aligned} \quad (10)$$

公式(10)第一个等式体现了方向可控特性, 第二个等式则体现了方向和尺度联合可控特性。

若设 $q_{kj}^l(x, y)$ ($l=1, 2, \dots; k=0, \dots, K-1; j=0, \dots, J-1$) 为 DPT 第 l 层的尺度基子带, 则任一尺度 $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$ 和方向 $\phi \in [0, 2\pi)$ 的子带 $q^{l, \sigma, \phi}(x, y)$ 可经由方向和尺度联合可控特性得到, 即

$$b^{l, \sigma, \phi}(x, y) = \sum_k h_k(\phi) \sum_j \lambda_{kj}(\sigma) q_{kj}^l(x, y). \quad (11)$$

3.3. 综合滤波器的设计

对比图 1 和 2 可知, DPT 实现理想重构所需满足的约束如下:

$$\sum_{j=0}^{J-1} C_{kj}(\omega) D_{kj}(\omega) = |B_k(\omega)|^2. \quad (12)$$

考虑到 3.1 节中 $C_{kj}(\omega)$ 及 $B_k(\omega)$ 实际上都采用了空域的表现形式, 即 $c_{kj}(x, y)$ 和 $b_k(x, y)$, 因此综合滤

波器 $D_{kj}(\omega)$ 也采用空域的表现形式 $d_{kj}(x, y)$ 。为此, 对(12)进行逆傅立叶变换得到:

$$\sum_{j=0}^{J-1} c_{kj}(x, y) d_{kj}(x, y) = |b_k(x, y)|^2. \quad (13)$$

令 $\sigma=1$, 则根据式(9)有

$$b_k(x, y) = b_k^\sigma(x, y)|_{\sigma=1} = \sum_j \lambda_{kj}(1) c_{kj}(x, y) \quad (14)$$

将(14)代入(13), 即得

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{J-1} c_{kj}(x, y) d_{kj}(x, y) \\ = \sum_{j=0}^{J-1} \lambda_{kj}(1) c_{kj}(x, y) \left(\sum_{m=0}^{J-1} \lambda_{km}(1) c_{km}(x, y) \right). \end{aligned} \quad (15)$$

因此, DPT 的综合滤波器 $d_{kj}(x, y)$ 可以设计如下:

$$d_{kj}(x, y) = \lambda_{kj}(1) \left(\sum_{m=0}^{J-1} \lambda_{km}(1) c_{km}(x, y) \right). \quad (16)$$

4. 尺度可控基滤波器的数量与重构性能

如 3.1 节所述, 我们假定 SVD 分解后得到 J 个非零的奇异值, 并全取这 J 个奇异值及其对应的 U_k 子矩阵设计尺度可控基滤波器。利用这 J 个尺度可控基滤波器, 可以无误地恢复矩阵 Z_k 。虽然这时的恢复性能很好, 但当 J 比较大时, 无论是 DPT 的分解和重构还是线性插值, 运算量都将会比较大。为了降低运算量, 可以在适当牺牲恢复性能的基础上, 减少尺度可控基滤波器的数量^[6]。为此, 我们分析尺度可控基滤波器的数量与 Z_k 恢复性能的关系。

设将 SVD 分解后的 J 个非零奇异值 g_j 按降序排列, 即 $g_0 \geq g_1 \geq \dots \geq g_{J-1}$, 则排序后的对角阵为 $\Lambda_k = \text{diag}(g_0, \dots, g_{J-1}, 0, \dots, 0)$ 。依据 Λ_k 的排序下标, 相应地调整 U_k 和 V_k 的行列顺序, 以便和 g_j 一一对应。现假定取其中 P ($0 < P < J$) 个最大的奇异值及其对应的 U_k 子矩阵来设计尺度可控基滤波器 $c_{kj}(x, y)$ (参考 3.1 节)。由于 SVD 分解后的 U_k 和 V_k 为单位阵, 因此利用 $c_{kj}(x, y)$ ($j=0, \dots, P-1$) 恢复 Z_k 时的误差 err , 实质源自于 g_P, \dots, g_{J-1} 的误差, 即

$$\text{err} = \sum_{j=P}^{J-1} g_j^2 \quad (17)$$

所以采用 P 个尺度可控基滤波器时, Z_k 的恢复误差与其总能量的比值为^[6]:

$$\text{ratio}_k = \frac{\text{err}}{\|\mathbf{Z}_k\|^2} \quad (18)$$

因此，我们可以利用(18)式得到不同 P 对应的 ratio_k 。基于此曲线图，我们就能在可接受的误差范围内选取合适的 P ，从而在恢复误差性能和计算复杂度间取得良好的折衷。

5. 数值仿真结果与分析

为评估本文所设计的 DPT 的合理性,我们进行数值仿真。在数值仿真时,我们以 MatlabPyrTools^[18]中提供的 $K=2$ 个方向的空域 SPT 作为 DPT 设计的基础。此 SPT 是用数值优化方式实现的,不能达到理想重构^[7]。为此,在评估 DPT 重构性能之前,我们首先评估 SPT 的重构性能。我们以 512×512 的灰度图像 Lena 为例,利用文献[18]提供的 SPT 工具箱将其分解为 3 层,然后再进行重构。Lena 原图像和恢复图像分别如图 3(a)和(b)所示。由图可知,原始图像和恢复图像肉眼难于分出差别,但重构图像的信噪比(SNR)为 38.99 dB,峰值信噪比(PSNR)为 44.64 dB。

在采用 3.1 节的方法设计 DPT 时,我们设置 $\sigma_1=0.1, \sigma_2=4.0, n=1000$ 。经 SVD 分解后,每一个 \mathbf{Z}_k 均有 $J=16$ 个非零的奇异值。为获得良好的插值性能,我们全取这 16 个奇异值,因此针对每一个 $b_k(x, y)$ 得到尺度可控基滤波器 $c_{kj}(x, y)(j=0, \dots, 15)$ 。为评估所设计的 DPT 的重构性能,我们以前述的 Lena 作为测试图像。在数值仿真中,我们对 Lena 进行了 3 层的 DPT 变换,然后再进行 3 层的逆变换。我们在图 4(a)和(b)中给出了 Lena 的原图像及其重构图像,在图 4(c)和(d)中分别给出了高通和低通子带,并在图 4(e)-(l)、(m)-(t)和(u)-(II)中分别画出了 3 层 DPT 分解后第 1、2



Figure 3. Illustration of reconstruction of the SPT^[7]: (a) Original image; (b) SPT reconstructed image
图 3. SPT^[7]重构示意图: (a) 原始图像; (b) SPT 重构图像

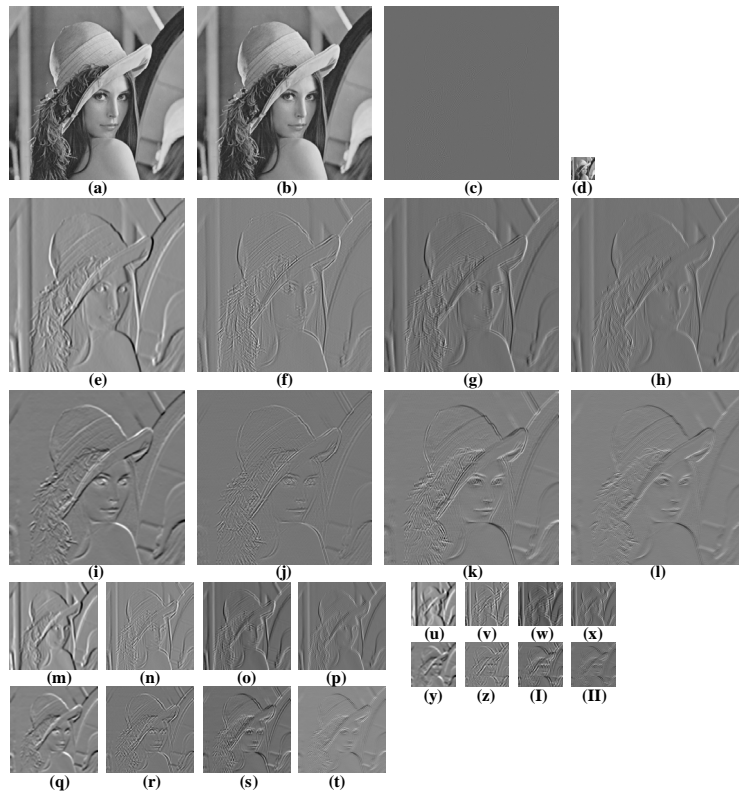


Figure 4. DPT decomposition and reconstruction
图 4. DPT 分解及重构示意图

和 3 层的部分子带 $q_{jk}^l(x, y) (l=1, 2, 3; k=0, 1; j=0, 5, 10, 15)$ 。由图 4(a)和(b)可知, 虽然原始图像和重构图像肉眼难分差别, 但重构图像的 SNR 为 38.99 dB, PSNR 为 44.64 dB。对比 SPT 的重构性能可知, DPT 和 SPT 的重构性能相同。也就是说, 采用 16 个尺度可控基滤波器, 可以满足理想重构约束, 可以无误地恢复方向可控基滤波器 $b_k(x, y)$ 或者对应的方向子带。但是 DPT 的重构并不理想(即 SNR/PSNR 并非无穷大), 主要原因在于设计 DPT 时所采用的 SPT 是非理想重构的。

在前述的 DPT 设计中, 我们取全部 16 个非零奇异值, 得到了 $J=16$ 个尺度可控基滤波器。相对于给定范围 $[0.1, 4.0]$ 内的所有尺度总数 $n=1001$ 来说, 16 是一个相当小的数。然而, 若每个方向可控基滤波器都对应设计 16 个尺度可控基滤波器, 则 DPT 分解和重构以及线性插值时所需的运算量仍然不小。为了能在 DPT 重构性能与插值运算量之间获得较好的折衷, 下面我们评估不同尺度可控基滤波器数量 P (参见第 4 节)与 DPT 重构性能之间的关系。我们首先根据公式(18), 计算 $P(0 < P < J)$ 取不同值时 $Z_k (k=0, 1)$ 的恢复误差与其总能量的比值 $ratio_k$ 曲线图。图 5 给出了不同 P 值时对应的 $ratio_0$ 。由图可知随着 P 的增加, $ratio_0$ 呈指数下降。 $ratio_1$ 也有相同的结果, 不再赘述。

进一步, 我们将尺度可控基滤波器的数量 P 设置为 1 至 16 间的数(虽然 P 的取值是 1-15 间, 但为方便比较, 增加了值 16), 然后考察重构图像的 PSNR。图

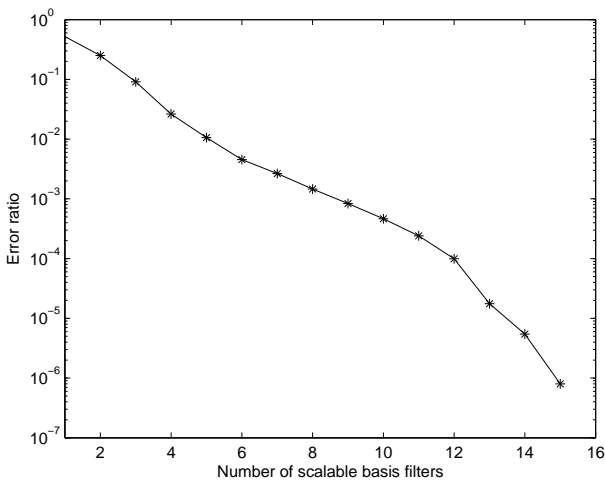


Figure 5. The performance of $ratio_0$ between Z_0 's reconstruction error and its total energy
图 5. 矩阵 Z_0 的恢复误差与其总能量比值 $ratio_0$ 的曲线图

6 给出了不同 P 值时对应的 SNR 和 PSNR。

由图可知, 当 P 等于 10 时, 重构图像的 SNR 和 PSNR 最大, 分别为 39.11 dB 和 44.76 dB。当 P 从 1 逐渐增到 10 时, SNR/PSNR 逐渐增大, 这表明增加 P 是有利于提高重构性能的。但当 P 大于 10 时, SNR/PSNR 值反而不如 $P=10$ 时的(约 0.3 dB 的差距)。这主要是因为当 $P > 10$ 时, 对应的非零奇异值幅度相对较小, 其中隐含的、由核函数插值及 SVD 分解引入的误差不可忽略, 因此继续增大 P 反而会降低重构性能。此外, 从图 6 中也可以看到, 当 $P=4$ 时, 重构图像的 SNR 和 PSNR 值分别为 37.62 dB 和 42.94 dB, 与最优的 SNR/PSNR 值相差不超过 2dB; 当 $P=8$ (即一半数量)时, 重构图像的 SNR 和 PSNR 值分别为 38.45 dB 和 44.09 dB, 与最大 SNR/PSNR 值相差不超过 1 dB。这表明, 我们若采用 $P=J/2$ 的尺度可控基滤波器, 即在较大幅度降低运算量的同时, 能获得与最佳重构性能相当接近的性能。

6. 总结

本文中, 我们设计了一种具有平移不变性、方向和尺度联合可控的 DPT。此 DPT 由一种数值形式的空域 SPT 发展而来。其中, 平移不变特性通过保持 DPT 的高通子带和尺度子带的非亚抽样结构而得到, 方向和尺度联合可控特性则通过 SVD 方法将 SPT 的每一个方向可控基滤波器作为核函数来设计一组尺度可控基滤波器而得到。我们将此尺度可控基滤波器

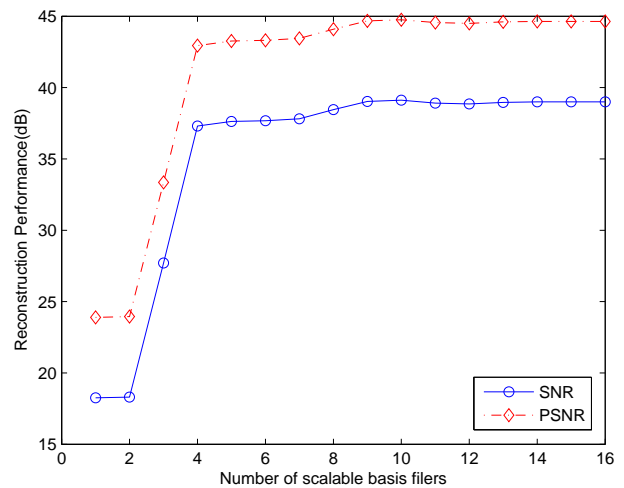


Figure 6. Relationship between the number of scalable basis filters and the DPT's reconstruction performance
图 6. 尺度可控基滤波器个数与 DPT 重构性能关系曲线

作为 DPT 的分析滤波器；对于综合滤波器，我们则在构建理想重构约束的基础上通过理论推导而得到。此外，我们推导了方向插值函数，并结合尺度插值函数推导出了表征方向和尺度联合可控性的插值公式。我们也定量分析了不同尺度可控基滤波器数量与重构性能之间的关系，以便在 DPT 重构性能和 DPT 分解、重构、插值所需运算量之间获得良好的折衷。数值仿真表明，本文所设计的 DPT 能满足理想重构约束。不同尺度可控基滤波器数量与重构性能关系仿真结果也表明，SVD 分解后只需要取一半数量的尺度可控基滤波器，即能以不超过 1dB 的误差而逼近最优的重构性能。

参考文献 (References)

- [1] 多布著, 李建平, 杨万年, 译. 小波十讲[M]. 北京: 国防工业出版社, 2004.
- [2] E. P. Simoncelli, W. T. Freeman, E. H. Adelson and D. J. Heeger. Shiftable multi-scale transform. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1992, 38(2): 587-607.
- [3] W. T. Freeman, E. H. Adelson. The design and use of steerable filters. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence (PAMI)*, 1991, 13(9): 891-906.
- [4] R. Lenz. Group theoretical methods in image processing (Lecture Notes in Computer Science). Berlin: Springer Verlag, 1990.
- [5] K. Krajsek, R. Mester. A unified theory for steerable and quadrature filters. *The International Conference on Computer Vision Theory and Applications (VISAPP and GRAPP 2006)*, Setubal, 2006: 201-204.
- [6] P. Perona. Deformable kernels for early vision. *IEEE Transactions on PAMI*, 1995, 17(5): 488-499.
- [7] A. Karasaridis, E. P. Simoncelli. A filter design technique for steerable pyramid transform. *The 21st International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP '96)*, May 1996, 4: 2387-2390.
- [8] K. R. Castleman, M. Schulze and Q. Wu. Simplified design of steerable pyramid filters. *IEEE International Symposium on Circuits and Systems 1998*, 5: 329-332.
- [9] J. Portilla, V. Strela, M. J. Wainwright and E. P. Simoncelli. Image denoising using scale mixtures of Gaussians in the wavelet domain. *IEEE Transaction on Image Processing*, 2003, 12 (11): 1338-1351.
- [10] C. T. Patrick, H.-O. Yacov. Design of multiparameter steerable functions using cascade basis reduction. *IEEE Transactions on PAMI*, 1999, 21(6): 552-556.
- [11] Jeffery R. Price, M. H. Hayes III. Steerable filter cascades. *The International Conference on Image Processing '99 (ICIP'99)*, Kobe, 24-28 October 1999: 880-884.
- [12] M. Jacob, M. Unser. Design of steerable filters for feature detection using Canny-like criteria. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2004, 26(8): 1007-1019.
- [13] D. Shy, P. Perona. X-Y separable pyramid steerable scalable kernels. *Proceedings of IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Los Alamitos, 21-23 June 1994: 237-244.
- [14] R. Manduchi, P. Perona. Pyramidal implementation of deformable kernels. *Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing*, October 1995, 1: 378-381.
- [15] R. Manduchi, P. Perona and D. Shy. Efficient deformable filter banks. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1998, 46(4): 1168-1173.
- [16] R. Manduchi, P. Perona. Multirate separable implementation of steerable filter banks. *Proceedings of the 1998 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, Monterey, 31 May-3 June 1998, 5: 333-336.
- [17] J. Ni, R. Zhang, J. Huang, C. Wang and Q. Li. A rotation-invariant secure image watermarking algorithm incorporating steerable pyramid transform. *IWDW'06 Proceedings of the 5th international conference on Digital Watermarking*, 2006, 4283: 446-460.
- [18] E. P. Simoncelli. *MatlabPyrTools*. <http://www.cns.nyu.edu/~eero/STEERPYPYR/>