Computer Science and Application 计算机科学与应用, 2014, 4, 39-42
http://dx.doi.org/10.12677/csa.2014.42008 Published Online February 2014 (http://www.hanspub.org/journal/csa.html)

Consensus in Directed Networks with Boundary Function Quantized Information Communication

Yalei Ji

School of Science, Anhui University of Science & Technology, Huainan
Email: jiyalei853711612@163.com

Received: Dec. 30th, 2013; revised: Jan. 20th, 2014; accepted: Feb. 1st, 2014

Abstract: In this paper, the boundary function method is proposed for the coding scheme design to solve quantized problem of multi-agent system under a general unbalanced directed network. The multi-agent system can achieve weighted average consensus as long as the directed unbalanced network is strongly connected. Moreover, via choosing a generalized quadratic Lyapunov function, this paper analyzes the convergence of the system.

Keywords: Consensus; Directed Network; Boundary Function Quantization; Multi-Agent Systems; Lyapunov Function

基于边界函数量化信息通信的有向网络一致性

季亚雷

安徽理工大学理学院，淮南
Email: jiyalei853711612@163.com

收稿日期：2013 年 12 月 30 日；修回日期：2014 年 1 月 20 日；录用日期：2014 年 2 月 1 日

摘　要：基于有限水平的边界函数量化策略，本文主要研究了有向非平衡网络多个系统的加权平均一致性问题。研究发现只要固定拓扑有向网络强连通，系统能够实现加权平均一致。并且通过构造广义李雅普诺夫函数对系统的收敛性进行分析。

关键词：一致性；有向网络；边界函数量化器；多个体系统；李雅谱诺夫函数

1. 引言

近年来，在过去十多年中，学者们已经从各个方面对网络化多个体系统的一致性[1]进行了广泛研究，并取得了富有成效的进展。在无人机编队、卫星编队、卫星的轨道约束、水下机器人等等。这些都是以精确信息通信为前提，并且大部分情况下都需要无限的带宽，就会造成能量的浪费。此外，在实际通信网络中，网络数字通道具有有限带宽，因而必须对有限的信息在发送给其邻居个体之前就要进行量化，这使得网络中个体间只能基于量化信息进行通信，因而如何设计有效的量化一致性算法，使得在这种算法下个体就能表现出一致性行为，而这个课题已经成为多个体系统的一致性问题的新热点。如无向图中带有均匀量化器的一致性[2]，无向图中带有对数量化器的一致性[3]，有向非平衡图中带有均匀和对数量化器的一致性[4]，有向非平衡图和平衡图的切换网络的一致性[5,6]。

鉴于此，在文献[7]的基础上重新考虑了有向非平

衡网络的固定加权拓扑，同时进一步确定了文章中没有给出的两个正定矩阵，使得其更具有一般性。

本文结构安排如下：第二部分给出基本概念和预备知识；第三部分给出要描述的问题和分布式边界函数的量化协议；第四部分给出一致收敛性的证明；最后给出文章的总结。

2. 基本概念和预备知识

2.1. 基本概念

1) $\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m}\sum_{j-1}^{n}|a_{ij}|$， $A\in\left[a_{ij}\right]_{m\times n}\in R^{m\times n}$

2) 向量 $x=\left(x_1,\cdots,x_N\right)^{\mathrm{T}}$

3) $\delta_{\max}(\cdot)$和$\delta_{\min}(\cdot)$ 分别表示该矩阵最大和最小奇异值

4) 边界函数的定义[7]：若函数 f 是实数集 s 上的边界函数，则对任意的 $k\ge 0$ 满足

$$f(k)\ge \sup\left\{\left|s(k)\right|:s(\cdot)\in S\right\}$$

2.2. 预备知识

图(Graph)是一组点和边的集合。常用 $G=(v,\varepsilon,W)$ 来表示一个有向网络，其中非空集合 $v=\{1,2,\cdots,N\}$ 表示节点的集合，在控制理论中也表示个体。$\varepsilon=\{(i,j):i,j\in v\}$ 表示所有节点对组成的边的集合。若有向图 G 中有序节点序列 $\left(i_1,i_2,\cdots,i_r\right)$ 满足 $e_{i_j}e_{i_{j+1}}\in\varepsilon$，其中 $j\in\{1,2,\cdots,r-1\}$，则称这个有序节点序列为有向图 G 中的一条有向路径或强路径。若有向图 G 中任意不同的两个节点之间都存在一条强路径，则称图 G 为强连通图。$W=\left[w_{ij}\right]\in R^{N\times N}$ 称为图 G 的有权邻接矩阵。

假设 1：有向图 G 是强连通的，其对应的邻接矩阵 $W=\left[w_{ij}\right]\in R^{N\times N}$ 满足存在 ρ，即所有 $w_{ii}=1-\sum_{i\in N_i} w_{ij}>0, i\in 1,2,\cdots,N$，并且 $w_{ij}\in\{0\}\bigcup\{\rho,1\}, i\ne j$。且根据 Perror-Frobenius 定理[8]知：若邻接矩阵 W 是一个具有正对角元素的随机矩阵，图 G 是强连通的，则 1 是 W 的代数重数为一的最大特征值，且特征值 1 存在唯一一个正的归一化左特征向量为 $\pi=\left[\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_N\right]^{\mathrm{T}}$ 满足 $\pi^{\mathrm{T}}W=\pi^{\mathrm{T}}$，$\pi^{\mathrm{T}}\mathbf{1}=\sum_{i=1}^{N}\pi_i=1$ 和 $\lim_{k\to\infty}W^k=\mathbf{1}\pi^{\mathrm{T}}$，其中 $\mathbf{1}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}\in R^N$。

3. 问题描述和基于边界函数的量化一致性协议

1) 考虑多个体系统的一个个体集合 $v=\{1,2,\cdots,N\}$，其中每个个体满足如下一阶积分器动力学方程：

$$\begin{gathered}x_i(k+1)=x_i(k)+u_i(k),\\ k=0,1,2,\cdots,i=1,2,\cdots,N\end{gathered}\tag{1}$$

其中 $x_i(k)$ 表示个体 i 在 k 时刻的状态，$u_i(k)$ 表示个体 i 的控制输入或协议。

给出在时间 k 的基于边界函数的量化器 $Q\left(c(k),f(k),R\right)$[7]，其中 $c(k)$ 表示包含所有量化数目组成区域的中心，$f(k)$ 表示区域的半径，R 表示通信信道率，并且量化器 Q 把区域 $\left(c(k)-f(k),c(k)+f(k)\right)$ 分成 2^R 个间隔，即满足：

$$\mathrm{I}_l=\left(c(k)-f(k)+\mu(k)l,c(k)-f(k)+\mu(k)(l+1)\right)$$

$$l=0,\cdots,2^R-1$$

$$\mu(k)=\frac{2f(k)}{2^R}$$

2) 编码协议[7]：

$$W(k)=\varepsilon_l\left(y(k)\right)=l, y(k)\in\mathrm{I}_l$$

其中 $W(k)$ 表示符号码，$\varepsilon(\cdot)$ 是编码器

解码协议：

$$\hat{y}(k)=D_l\left(W(k)\right)=c(k)-f(k)+\left(W(k)+0.5\right)\mu(k)$$

其中 $D(\cdot)$ 是解码器，$\hat{y}(k)$ 是 $y(k)$ 的估计值。

注解 1：从上面的协议中得到估计误差 $e(k)=y(k)-\hat{y}(k)$ 满足：

$$\left|e(k)\right|\le\mu(k)/2=f(k)/2^R\tag{2}$$

3) 量化一致性算法

根据量化协议，提出以下一致性算法

$$u_i(k)=a\sum_{j\in N_i}w_{ij}\left(\hat{x}_{ij}(k)-\hat{x}_{ii}(k)\right)\text{[4]}\tag{3}$$

由(1)和(3)得：

$$x(k+1)=Px(k)+a(\mathrm{I}-W)\sigma(k)\tag{4}$$

由于矩阵 W 和 I 是随机矩阵，则 $P=(1-a)\mathrm{I}+aW=\left(p_{ij}\right)\in R^{N\times N}$ 其中 $a\in(0,1]$ 是随机矩阵

$$\sigma(k)=x(k)-\hat{x}(k)$$

注解 2：由

$$\pi^{\mathrm{T}}x(k+1)=\pi^{\mathrm{T}}Px(k)+a\pi^{\mathrm{T}}(\mathrm{I}-W)\sigma(k)=\pi^{\mathrm{T}}x(k)$$

得，保证了整个网络具有加权平均一致不变性。

令一致性误差 $\delta(k)=(\mathrm{I}-1\pi^{\mathrm{T}})x(k)$，则

$$\delta(k+1)=P\delta(k)+a(\mathrm{I}-W)\sigma(k) \tag{5}$$

假设 2：

$$\left\|x(0)_{\infty}\right\|=\max_{1\le i\le N}\left|x_i(0)\right|\le c_x$$

且

$$\left\|\delta(0)\right\|_{\infty}=\max_{1\le i\le N}\left|\delta(0)\right|\le c_{\delta}\le\beta$$

定理 3[4]：如果 $\left|\delta(k)\right|\le\beta\alpha^k$，$\beta>0$，$0<\alpha<1$，$c(k)=\hat{x}(k-1)$ 且 $c(0)=0$，

已知 $f(k)=\dfrac{c_x}{2^{Rk}}+\dfrac{\beta(\alpha+1)}{2^{R(k-1)}}\dfrac{1-(\alpha 2^R)^k}{1-\alpha 2^R}$，

则得：
$$f(k)\ge\alpha^k\beta$$
$$\left|x_i(k)-c_i(k)\right|\le f(k)$$
。

注解 3：根据量化器的定义可以用来量化 $x_i(k),i=1,2,\cdots,N$。

4) 一致收敛性分析

定理 4[4]：(1) 假设 1 和假设 2 都成立；

$\pi_{\max}=\max\limits_{1\le i\le N}\pi_i$；$1>\eta=a\rho\pi_{\min}>0$；$\pi_{\min}=\min\limits_{1\le i\le N}\pi_i$

$$D=\mathrm{diag}(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_N)$$

(2) 令 $Q=\dfrac{\eta}{2(N-1)}\mathrm{diag}(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_N)$

则 D,Q 是对称且正定矩阵

$$P^{\mathrm{T}}DP-D+Q<0 \tag{6}$$

$$\delta_{\max}(D-Q)<\delta_{\min}(D) \tag{7}$$

$$1<\alpha 2^R \tag{8}$$

$$\frac{\left\|P^{\mathrm{T}}D(\mathrm{I}-W)\right\|_{\infty}2^{1-R}+\left\|(\mathrm{I}-W)^{\mathrm{T}}D(\mathrm{I}-W)\right\|2^{-2R}}{\delta_{\min}\left(P^{\mathrm{T}}DP-D+Q\right)}<\min\left\{1,\left\|P\right\|^{-2}\left(w-\left\|\mathrm{I}-W\right\|2^{-R}\right)^2\right\} \tag{9}$$

满足：

$$1>\alpha\ge\left(\frac{\delta_{\max}(D-Q)}{\delta_{\min}(D)}\right)^{\frac{1}{2}}\quad w=\frac{c_{\delta}\alpha\left(\alpha 2^R-1\right)}{c_x\left(\alpha 2^R-1\right)+c_{\delta}2^R(1+\alpha)}$$

(3) 定理 3

若上述(1)~(3)都成立，则(1) $\left|\delta(k)\right|\le\beta\alpha^{k+1}$ (2)系统(4)得到加权平均一致性

$$\lim_{k\to\infty}x(k)=\left(\sum_{i-1}^{N}\pi_i x_i(0)\right)\mathbf{1}$$

证明：由假设 1 得到1° $\left\|\delta(0)\right\|_{\infty}=\max\limits_{1\le i\le N}\left|\delta_i(0)\right|\le c_{\delta}\le\beta$，当公式成立时，2° $\left\|\delta(k)\right\|_{\infty}\le\beta\alpha^k$ 由(9)，存在 $\gamma>1$ 得

$$\frac{\left\|P^{\mathrm{T}}D(\mathrm{I}-W)\right\|_{\infty}2^{1-R}+\left\|(\mathrm{I}-W)^{\mathrm{T}}D(\mathrm{I}-W)\right\|_{\infty}2^{-2R}}{\delta_{\min}\left(P^{\mathrm{T}}DP-D+Q\right)}<\frac{1}{\gamma}<\min\left\{1,\left\|P\right\|^{-2}\left(w-\left\|\mathrm{I}-W\right\|2^{-R}\right)^2\right\} \tag{10}$$

由于 $\left|\delta(k)\right|\le\beta\alpha^k,\left|\delta(k)\right|\le f(k)$

分类第一种情况 $f(k)\gamma^{1/2}<\left\|\delta(k)\right\|_{\infty}$，从(10)的左边得：

$$\begin{aligned}&-\delta_{\min}\left(P^TDP-D+Q\right)\gamma^{-1}+\left\|P^TD(\mathrm{I}-W)\right\|_{\infty}2^{1-R}\\&+\left\|(\mathrm{I}-W)^TD(\mathrm{I}-W)\right\|_{\infty}2^{-2R}<0\end{aligned} \tag{11}$$

(11)式两边都乘以 $f^2(k)$ 得：

$$\begin{aligned}&-f^2(k)\delta_{\min}\left(P^{\mathrm{T}}DP-D+Q\right)\gamma^{-1}\\&+2f^2(k)\left\|P^{\mathrm{T}}D(\mathrm{I}-W)\right\|_{\infty}2^{-R}\\&+f^2(k)\left\|(\mathrm{I}-W)^{\mathrm{T}}D(\mathrm{I}-W)\right\|_{\infty}2^{-2R}<0\end{aligned} \tag{12}$$

由于 $f(k)\gamma^{1/2}<\left\|\delta(k)\right\|_{\infty}$ 和 $\left\|\sigma(k)\right\|_{\infty}\le f(k)2^{-R}$，得

$$\begin{aligned}&-\delta_{\min}\left(P^{\mathrm{T}}DP-D+Q\right)\left\|\delta(k)\right\|_{\infty}^2\\&+2\left\|\delta(k)\right\|\left\|P^{\mathrm{T}}D(\mathrm{I}-W)\right\|_{\infty}\left\|\sigma(k)\right\|\\&+f\left\|(\mathrm{I}-W)^{\mathrm{T}}D(\mathrm{I}-W)\right\|_{\infty}\left\|\sigma(k)\right\|^2<0\end{aligned} \tag{13}$$

由(12)式和(4)式得：

$$\begin{aligned}&\delta^{\mathrm{T}}(k)\left(P^{\mathrm{T}}DP-D+Q\right)\delta(k)\\&+2\delta^{\mathrm{T}}(k)PD(\mathrm{I}-W)\sigma(k)\\&+\sigma^{\mathrm{T}}(k)(\mathrm{I}-W)^{\mathrm{T}}D(\mathrm{I}-W)\sigma(k)<0\end{aligned} \tag{14}$$

构造李雅谱诺夫函数：

$$\begin{aligned}&V(\delta(k+1))-V(\delta(k))\\&=\delta^{\mathrm{T}}(k+1)D\delta(k+1)-\delta^{\mathrm{T}}(k)D\delta(k)\\&=\left(P\delta(k)+a(\mathrm{I}-W)\sigma(k)\right)^{\mathrm{T}}D\left(P\delta(k)+a(\mathrm{I}-W)\right)-\delta^{\mathrm{T}}(k)D\delta(k)\\&\le-\frac{\eta}{2(N-1)}\delta^{\mathrm{T}}(k)D\delta(k)=-\delta^{\mathrm{T}}(k)Q\delta(k)<0\end{aligned}$$

所以得：$\dfrac{\|\delta(k+1)\|_\infty^2}{\|\delta(k)\|_\infty^2} < \dfrac{\delta_{\max}(D-Q)}{\delta_{\min}(D)} \le \alpha^2$ 即

$$\|\delta(k+1)\|_\infty < \|\delta(0)\|_\infty \alpha^{k+1} < c_\delta \alpha^{k+1} < \beta\alpha^{k+1}$$

第二种情况 $\|\delta(k)\|_\infty \le f(k)\gamma^{-1/2}$ 从(9)的右边即

$$\|P\|_\infty \gamma^{\frac{-1}{2}} + \|(\mathrm{I}-W)\|_\infty 2^{-R} < w$$

两边同乘以 $f(k)$，得：

$$\|P\|_\infty \gamma^{\frac{-1}{2}} f(k) + \|(\mathrm{I}-W)\|_\infty 2^{-R} f(k) < wf(k)$$

由 $\delta(k+1) = P\delta(k) + a(\mathrm{I}-W)\sigma(k)$ 则

$$\begin{aligned}\|\delta(k+1)\|_\infty &\le \|P\|_\infty \|\delta(k)\|_\infty + a\|\sigma(k)\|_\infty \|(\mathrm{I}-w)\|_\infty \\ &< \|P\|_\infty f(k)\gamma^{\frac{-1}{2}} + f(k)2^{-R}\|(\mathrm{I}-W)\| \\ &< wf(k)\end{aligned}$$

又 $$wf(k) = \frac{c_\delta \alpha(\alpha 2^R - 1)}{c_x(\alpha 2^R - 1) + c_\delta 2^R(1+\alpha)} f(k) = c_\delta \alpha^{k+1} < \beta\alpha^{k+1}$$

综上得 $|\delta(k+1)| < \beta\alpha^{k+1}$

所以 $|\delta(k)| \to 0$ 当 $k \to \infty$ 则

$$\lim_{k\to\infty} x(k) = \left(\sum_{i-1}^{N} \pi_i x_i(0)\right)\mathbf{1}\text{。}$$

5. 结束语

本文在[7]的基础上，引入了与网络拓扑相关联的矩阵，研究了有向非平衡图中的量化一致性问题。而当网络拓扑是平衡时，所得结果即退化为一般的平均一致性情形。但仍有很多问题有待进一步研究，比如研究在边界函数的量化信息通信下，存在外在噪声干扰的网络多个体系统一致性问题。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(61073102)。

参考文献 (References)

[1] Carli, R., Bullo, F. and Zampieri, S. (2010) Quantized average consensus via dynamic coding/decoding schemes. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **20**, 156-175.

[2] Li, T., Fu, M.Y., Xie, L.H. and Zhang, J.-F. (2011) Distributed consensus with limited communication data rate. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **56**, 279-292.

[3] Bian, T. and Wang, Y.-W. (2012) Average consensus of multi-agent systems under logarithm quantized communications. *IEEE Control Automation Robotics & Visio*, **46**, 418-423.

[4] Li, D.Q., Liu, Q.P., Wang, X.F. and Lin, Z.L. (2013) Consensus seeking over directed networks with limited information communication. *Automatica*, **49**, 610-618.

[5] Li, D.Q., Liu, Q.P., Wang, X.F. and Yin, Z.X. (2013) Quantized consensus over directed networks with switching topologies. *System and Control Letters*, Accepted.

[6] Li, T. and Xie, L. (2011) Distributed consensus over digital networks with limited bandwidth and time-varying topologies. *Automatica*, **47**, 2006-2015.

[7] Wang, J. and Yan, Z. (2012) Coding scheme based on boundary function for consensus control of multi-agent system with time-varying topology. *IET Control Theory Apply*, **6**, 1527-1535.

[8] Horn, R.A. and Johnson, C.R. (1985) Matrix analysis. Cambridge University Press, Cambridge, 33-57.